JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; troisième partie. De la marche des valeurs d'une fonction implicite définie par une équation algébrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 457-474.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__457_0>

NOUVELLE THÉORIE
DES
FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

TROISIÈME PARTIE.
DE LA MARCHE DES VALEURS D'UNE FONCTION IMPLICITE DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE.
(Suite.)

CHAPITRE VII.
De la série de Taylor.

91. Les deux questions, dont nous donnons la solution dans ce chapitre, ont pour objet, la première, de déterminer exactement la région de convergence de la série de Taylor, la seconde, de définir de telle sorte la valeur de la fonction, supposée multiple, qui se développe par la série, qu'on puisse la reconnaître parmi les racines de l'équation qui lie cette fonction à sa variable, et par conséquent l'obtenir par la résolution même de cette équation, au lieu de la calculer par la sommation des termes de la série.

Ainsi une fonction y étant définie par une équation algébrique entière

$$f(x, y) = 0,$$

qui donne m valeurs de cette fonction pour chaque valeur de la variable, nous nous proposons : 1° de déterminer pour chaque système de valeurs, x_0, y_0, de x et de y les limites dans lesquelles la série

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

restera convergente; 2° d'assigner à la valeur de y, représentée par la suite

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x_1 - x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

supposée convergente, des caractères qui puissent permettre de la distinguer au milieu des racines de l'équation

$$f(x_1, y) = 0.$$

La série de Taylor ayant déjà donné lieu à un grand nombre de travaux, je les résume d'abord brièvement pour préciser le point où l'on était parvenu et proposer soit quelques modifications aux énoncés des théorèmes, soit des éclaircissements nouveaux.

92. M. Cauchy a démontré que la convergence d'une série

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots,$$

ne dépend que du module de x et non de la valeur de cette variable : de sorte que si x est représenté par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, et que R soit la limite que le module de x ne doive pas dépasser, la série restera convergente pour toute valeur de x satisfaisant à la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 < R^2;$$

si l'on avait mis la série sous la forme

$$A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + \ldots,$$

la condition de convergence serait

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 < R^2.$$

M. Cauchy exprime cette condition en disant que le point x, $[\alpha, \beta]$, ne doit pas sortir du cercle décrit d'un rayon R autour du point x_0, $[\alpha_0, \beta_0]$. Ce cercle est souvent désigné sous le nom de *cercle de convergence de la série.*

Comme je ne figure pas les valeurs de x de la même manière que

M. Cauchy, et que d'ailleurs j'associe toujours y à x, dans la représentation figurée, je donnerai le nom de *région de convergence* à la portion du plan que peut parcourir le point $[x, y]$ assujetti à satisfaire à l'équation

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \ldots,$$

dont le second membre resterait toujours fini.

93. Pour déterminer la région de convergence de la série, il suffisait de découvrir une valeur de x dont cette variable pût approcher indéfiniment, sans que la série cessât d'être convergente, et qu'elle ne pût dépasser, sans que la série devînt divergente.

La marche à suivre dans cette nouvelle recherche était facile à apercevoir : la valeur cherchée de x devait être une de celles pour lesquelles y prend des valeurs égales.

M. Cauchy a fondé ce nouveau principe sur de savants calculs; mais je crois qu'il suffisait d'observer que la série ne pouvant donner qu'une valeur de la fonction, et ne faisant d'ailleurs pas acception du chemin par lequel x serait parvenu de sa valeur initiale à sa valeur finale, devait nécessairement tomber dans un cas illusoire dès qu'on essayerait de dépasser un point où la fonction prenant deux ou plusieurs valeurs égales pourrait suivre ensuite des routes différentes.

A la vérité, en se maintenant dans cet ordre d'idées, on ne verrait pas pourquoi, au lieu de cesser simplement de représenter la fonction, la série deviendrait divergente au delà d'un point multiple [*].

Mais c'est qu'en réalité le développement d'une fonction, suivant

---

[*] M. Cauchy, par suite d'une manière que je crois fausse, comme je l'ai expliqué dans le chapitre précédent, d'entendre la continuité, admettait qu'au moment où la variable recevait la valeur de l'abscisse d'un des points multiples du lieu, la fonction pouvait, sans violer la loi de continuité, prendre indifféremment la marche de l'ordonnée d'une quelconque des branches réelles ou imaginaires partant de ce point multiple.

En adoptant ce principe, il fallait bien admettre que la série, de manière ou d'autre, cesserait de représenter la fonction au delà d'un point multiple.

Mais comment serait-elle, pour cela, devenue divergente, si à une distance infiniment la série de Taylor, n'est aucunement arrêté par l'interposition d'un point multiple, quand ce point n'offre pas d'ailleurs de nouveaux caractères spéciaux.

Les observations qui ont été présentées dans le chapitre précédent devaient faire prévoir cette affirmation. Quelques mots suffiront pour la légitimer.

94. Si, au point multiple considéré, toutes les dérivées de y, par rapport à x, restent finies, quelque loin qu'on les prolonge, on pourra prendre ce point pour point de départ, et chacune des séries, suivant lesquelles se développeront les différentes formes de y, restera convergente dans un certain rayon : or ce rayon ne saurait évidemment repasser, sans transition, de sa valeur finie à zéro, lorsqu'on déplacera infiniment peu le point de départ.

Cela posé, il est facile de caractériser les points multiples où le développement ne saurait être arrêté.

Lorsqu'en un point multiple du lieu $f(x, y) = 0$ les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont distinctes, il n'y a pas de raison pour qu'aucune valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit infinie; de même si $\frac{dy}{dx}$ ayant au point multiple plusieurs valeurs égales, les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont cependant distinctes, celles de $\frac{d^3y}{dx^3}$ seront finies, et ainsi de suite. Les points multiples, qui ne forment pas obstacle au développement, sont donc ceux où les dérivées de la fonction finissent par se séparer sans devenir infinies.

---

petite du point multiple elle devait avoir une valeur finie, que l'on pouvait même rendre aussi petite qu'on l'eût voulu?

Le vice de la démonstration dont on a cherché à étayer cette croyance me paraît consister en ce que l'on a confondu la série avec la fonction.

On a décomposé la proposition en deux, l'une directe, où l'on établit que l'équation de y à la série représente un lieu n'ayant aucun point multiple; l'autre, réciproque, où l'on démontre que, tant que la fonction ne prend pas de valeurs multiples, le développement est possible.

Mais la série ne représentant, en général, qu'un segment de la fonction, je crois qu'il n'y avait aucune conclusion à tirer du rapprochement des deux propositions.

Ainsi le point double du lieu

$$y = x\sqrt{1+x}$$

n'arrêtera en aucun cas le développement de la fonction $x\sqrt{1+x}$; tandis que le point de rebroussement de la cissoïde

$$y = x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$

ne pourra jamais être franchi, et limitera la région de convergence si elle n'est bornée plus tôt au point $[x = 2a,\ y = \infty]$.

95. Cette théorie paraîtrait en défaut si l'on pouvait douter que les dérivées des mêmes ordres de l'ordonnée de la courbe, par rapport à l'abscisse, se retrouvassent toujours infinies aux mêmes points multiples, quels que fussent les axes auxquels on rapportât la courbe; car le rayon du cercle de convergence ne pouvant varier brusquement lorsqu'on changerait infiniment peu la direction de l'axe des y, les mêmes points multiples devront toujours présenter le même obstacle au développement de la fonction. Il importait donc de vérifier que la cause assignée à cet obstacle se représenterait toujours.

Un exemple suffira pour éclaircir ce point :

Supposons qu'il s'agisse d'un point double, où les deux tangentes se confondent; si l'on a pris ce point pour origine, l'équation de la courbe aura la forme

$$y^2 - 2\alpha xy + \alpha^2 x^2 + Ay^3 + By^2x + Cyx^2 + Dx^3 + \ldots = 0.$$

Cette équation donnera successivement

$$2(y-\alpha x)\frac{dy}{dx} - 2\alpha(y-\alpha x) + (3Ay^2 + 2Byx + Cx^2)\frac{dy}{dx} + By^2 + 2Cyx + 3Dx^2 + \ldots = 0$$

et

$$\begin{aligned}2(y-\alpha x)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4\alpha\frac{dy}{dx} + 2\alpha^2 + (3Ay^2 + 2Byx + Cx^2)\frac{d^2y}{dx^2}\\ + (6Ay + 2Bx)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4(By + Cx)\frac{dy}{dx}\\ + 2Cy + 6Dx + \ldots = 0.\end{aligned}$$

Pour avoir la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ au point double considéré, il faudrait, dans cette dernière équation, remplacer $\frac{dy}{dx}$ par α et faire tendre y et x vers zéro, en maintenant entre eux le rapport α.

Or, en divisant les deux membres par x et faisant les substitutions indiquées, on reconnaît d'abord que les termes qui provenaient de la partie

$$y^2 - 2\alpha yx + \alpha^2 x^2$$

du premier membre de l'équation proposée, disparaissent d'eux-mêmes. D'un autre côté, les termes, qui proviennent de la partie

$$Ay^3 + By^2x + Cyx^2 + Dx^3,$$

se réduisent à

$$x(3A\alpha^2 + 2B\alpha + C)\frac{d^2y}{dx^2} + 6(A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D);$$

et les autres termes peuvent être négligés comme contenant x à des puissances supérieures.

L'équation en $\frac{d^2y}{dx^2}$ se réduit donc à

$$x(3A\alpha^2 + 2B\alpha + C)\frac{d^2y}{dx^2} + 6(A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D) = 0;$$

par conséquent, à moins que $A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D$ ne soit nul de lui-même, la dérivée seconde de y, par rapport à x, au point considéré, sera infinie.

Or la condition

$$A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D = 0$$

a un sens géométrique indépendant du choix des axes, elle signifie que la tangente au point double ne coupe plus la courbe qu'en $m-4$ autres points, elle sera donc toujours satisfaite, ou bien elle ne le sera jamais. C'est assez dire que si $\frac{d^2y}{dx^2}$ a été une fois reconnu infini, il le sera toujours.

Des démonstrations analogues s'appliqueraient sans doute aux autres cas qu'on voudrait examiner.

96. En résumé, un point multiple ne peut arrêter le développement de la fonction qu'autant que les dérivées de cette fonction, sous quelques-unes de ses formes, y deviennent infinies à partir d'un certain ordre.

Hormis ce cas, la série traversera sans embarras le point multiple, et toutes les dérivées de la fonction, après le passage, recevront de la série des valeurs infiniment peu différentes de celles qu'elles avaient auparavant. Elles n'auront subi aucune variation brusque.

Cela étant, on comprend très-bien que la série de Taylor ne puisse cesser de représenter la fonction qu'en devenant divergente.

Car, le développement ne pouvant plus être arrêté que par un point où soit la fonction, soit une de ses dérivées devienne infinie : si, en premier lieu, c'est la fonction qui doit devenir infinie, comme elle aura déjà pris des valeurs excessivement grandes un peu auparavant, la série, en réalité, ne deviendra divergente, que pour continuer de la représenter encore.

Tandis que si c'est une des dérivées de la fonction qui devient infinie, comme on sait qu'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable est convergente ou divergente en même temps que toutes ses dérivées et intégrales : si l'on ne voit pas pourquoi la série, suivant laquelle on a développé la fonction, deviendrait infinie en un point singulier où cette fonction est encore finie, cependant les dérivées de cette série, à partir d'un certain ordre, devant, par hypothèse, devenir infinies en ce point, la série elle-même devra aussi le devenir.

On voit que, dans ce cas, l'objet lui-même eût pu être représenté d'autres manières, c'est le mode de représentation qui tombe en défaut.

97. Ce que nous venons de dire démontre une fois de plus que le développement de la fonction ne peut être limité qu'à l'un des points où soit la fonction, soit ses dérivées, à partir d'un certain ordre, deviennent infinies.

Ce nouvel énoncé du théorème de M. Cauchy s'accorde avec celui qu'avait donné M. Lamarle, dès 1846.

D'après M. Lamarle [*] :

« Toute fonction est développable en série convergente suivant la
» formule de Maclaurin, tant que le module de la variable reste moin-
» dre que la plus petite des valeurs pour laquelle la fonction cesse
» d'être continue ou de prendre même valeur aux deux limites $\theta = 0$,
» $\theta = 2\pi$ [**]. Hors de là la série devient divergente. »

Lorsqu'en un point multiple du lieu considéré les dérivées de la fonction finissent par se séparer sans devenir infinies, cette fonction ne saurait, sans violer la loi de continuité, prendre indifféremment une quelconque des valeurs voisines de l'ordonnée du point multiple : elle n'en peut recevoir qu'une pour chaque valeur de la variable, de sorte qu'elle reprend la même valeur aux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$; au contraire si la dérivée de l'ordre n d'une des formes de la fonction devient infinie en un point multiple, celle de l'ordre $n - 1$ peut prendre deux ou plusieurs valeurs différentes après le passage au point multiple, et la fonction elle-même, si elle est parvenue au point multiple sous l'une des formes permutables, ne reprend plus la même valeur aux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$.

A la vérité la condition qu'aucune dérivée de la fonction ne devienne infinie, me paraît offrir un sens plus net et devoir être d'un usage pratique plus commode que celle que la fonction reprenne la même valeur aux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Mais les deux énoncés s'accordent au fond.

Celui de M. Lamarle tenait donc compte, dans la mesure convenable, de la présence des points multiples du lieu en question.

J'ignore pourquoi dans les énoncés plus récents, qu'on a proposés du théorème de M. Cauchy, la distinction n'a pas été maintenue.

98. La dernière assertion qui termine l'énoncé de M. Lamarle se trouve reproduite en termes analogues dans tous les autres Mémoires que j'ai consultés :

La série devient nécessairement divergente dès qu'on essaye de dé-

---

[*] Voyez le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XI, 1846.

[**] M. Lamarle représente la variable x par $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$.

passer le premier point où la fonction prend une de ses valeurs singulières définies dans la première partie de l'énoncé.

Le fait serait bien évident si l'on supposait que ce fût la fonction, dont la valeur initiale concourt à la formation des coefficients de la série, qui fût venue prendre la valeur de l'ordonnée d'un point dangereux, au moment où la variable atteint celle de l'abscisse de ce point.

Mais, dans le cas contraire, il n'y a pas de raison pour que la série devînt divergente lorsqu'on voudrait dépasser cette valeur de x.

L'énoncé n'est donc pas clair par lui-même, et pourrait être exact ou inexact selon la manière dont on l'entendrait.

J'ai cherché à découvrir l'opinion de tous les auteurs à cet égard, mais il ne m'a pas toujours été possible d'y parvenir.

Je crois que l'on a toujours entendu l'énoncé en ce sens que le cercle de convergence ne devait contenir aucun des points $[a, b]$ correspondants aux valeurs de x pour lesquelles quelques valeurs de y deviennent égales (il faudrait ici reproduire toutes les manières d'entendre la proposition directe) ; mais cela importe moins que de savoir si le fait est exact.

Or l'hypothèse aurait pour conséquence immédiate que si y_1, $y_2, \ldots, y_m$ désignent les valeurs différentes que prend la fonction pour une même valeur x_0 de x, n'offrant aucun caractère exceptionnel, les séries

$$y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

$$y_2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_2 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_m + \left(\frac{dy}{dx}\right)_m \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_m \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

seraient toutes convergentes dans le même cercle, bien que leurs coefficients diffèrent totalement.

Cette conclusion déjà répugne évidemment : il est bien plus probable en effet que chacune des séries aura sa région propre de convergence, ou que, du moins, elles se rangeront en quelques groupes dans chacun desquels la région de convergence restera la même, en variant cependant d'un groupe à l'autre.

99. Pour rendre le fait complétement évident, supposons que x_0 soit une des valeurs de x auxquelles correspondent quelques valeurs singulières de y : que, par exemple, y_2 soit infini, que $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_3$ soit infini, etc., mais que y_1, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$, $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_1$, $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_1$, etc., soient tous finis : la série

$$y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_1 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

sera évidemment convergente dans un cercle de rayon fini, tandis que quelques-unes des autres ne seront convergentes pour aucune valeur de x.

Cela posé, que l'on déplace infiniment peu le point de départ, c'est-à-dire qu'on fasse varier infiniment peu x_0, la série dont le rayon de convergence était fini, restera convergente dans un rayon fini encore, dont la valeur même aura infiniment peu varié, tandis que celles qui n'étaient convergentes pour aucune valeur de x n'auront qu'un rayon de convergence infiniment petit.

Le cercle de convergence n'est donc pas le même pour toutes les séries considérées.

100. Ainsi se trouve posée la première des deux questions dont nous avons annoncé la solution au début de ce chapitre.

Toutes les valeurs de x, pour lesquelles la série reste convergente, sont celles qui satisfont à la condition que le module de la différence $x - x_0$ reste inférieur au module de la différence entre x_0 et l'abscisse de l'un des points où les dérivées de la fonction deviennent infinies à partir d'un certain ordre ; mais il reste à déterminer celui de ces points qui, pour chaque système de valeurs de x_0 et de y_0, limite effectivement le développement.

La réponse à faire à cette question, pour suffire aux besoins de la pratique, devrait, s'il était possible, être formulée analytiquement ; mais il paraît peu probable qu'on parvienne à la réduire à de tels termes.

Soient x_0, y_0 les valeurs initiales de la variable et de la fonction, et X, Y leurs valeurs particulières au point dangereux cherché : X dépendra à la fois de x_0 et de y_0, mais il dépendra surtout de la nature de la relation qui lie x et y, car si deux courbes se coupent en un point $[x_0, y_0]$, et ont d'ailleurs les mêmes points dangereux $[X, Y]$, $[X_1, Y_1]$, etc., il n'y aura cependant pas de raisons pour que le même de ces points se trouve être le premier point d'arrêt pour les ordonnées des deux courbes qui partiraient dans les deux cas de la même valeur y_0. Au reste il ne s'agira pas seulement d'obtenir X, la détermination de Y sera également indispensable et pourra être même plus difficile, lorsque plusieurs points dangereux auront même abscisse.

Les conditions à remplir par X et Y ne pouvant être que des conditions d'inégalités, la méthode pour en obtenir les valeurs ne pourra évidemment consister qu'en des précautions à prendre pour ne pas les dépasser.

On pourra donc, le point dangereux, qui se rapporterait à un point de départ une fois choisi, devant se déplacer d'une manière continue, lorsque l'on fera tourner l'axe des y autour de l'origine; on pourra rendre d'abord réelle l'abscisse du point de départ en choisissant convenablement la direction de l'axe des y, déterminer alors le point le plus immédiatement dangereux; et, en ramenant ensuite l'axe des y à sa position primitive, suivre sur la courbe réelle ou sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées le mouvement de ce point dangereux.

Soit

$$\left[x_0 = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \quad y_0 = \alpha'_0 + \beta_0 C_0\sqrt{-1}\right]$$

le point de départ : la conjuguée à laquelle appartient ce point touchera la courbe réelle en des points déterminés par la condition $\frac{dy}{dx} = C_0$; et l'enveloppe imaginaire en d'autres points où $\frac{dy}{dx}$ aura des valeurs m, m', etc., en général différentes de C_0, mais réelles.

Si l'on donnait à l'axe des y la direction $y = C_0 x$, les premiers de ces points, situés sur la courbe réelle, deviendraient les points dangereux, avec d'autres qui n'auraient pas rapport à la conjuguée considérée, et appartiendraient à l'enveloppe imaginaire; tandis que si l'on donnait à l'axe des y l'une des directions $y = mx$, $y = m'x$, etc., le point correspondant de l'enveloppe imaginaire deviendrait un des points dangereux, avec d'autres ne se rapportant pas à la conjuguée considérée [*].

Quelle que soit la direction C_0 ou m, ou m', etc., qu'on donne à l'axe des y, ceux des points dangereux qui appartiendront à la même branche de la conjuguée C_0 que le point de départ, seront évidemment les plus dangereux; mais, parmi eux, si l'on a donné à l'axe des y la direction $y = C_0 x$, celui où la tangente serait la plus proche du point $[x_0, y_0]$, sera le plus immédiatement dangereux.

On aura donc aisément le point dangereux relatif au point de départ, au moment où l'axe des y serait parallèle aux cordes réelles de la conjuguée à laquelle appartient ce point de départ. Or en ramenant ensuite l'axe des y à sa première position, il sera facile de suivre sur la figure la marche de ce point dangereux.

101. On peut présenter cette solution d'une autre manière :

Lorsque les points dangereux sont sur la courbe réelle, ils appartiennent aussi à la conjuguée $C = \infty$; mais lorsqu'ils sont sur l'enveloppe imaginaire, ils peuvent appartenir à des conjuguées quelconques $C = m$, $C = m'$, etc. Supposons qu'on ait construit toutes ces conjuguées ainsi que la conjuguée à laquelle appartient le point de départ : le point mobile $[x, y]$, pour aller se rendre en l'un quelconque des points dangereux, devra avant tout se rendre sur une des conjuguées $C = \infty$, $C = m$, $C = m'$, etc., mais la branche sur laquelle est situé le point de départ, ne pouvant prendre que deux mouvements inverses l'un de l'autre, sera immédiatement comprise entre deux branches déjà construites des conjuguées $C = \infty$, $C = m$, $C = m'$, etc.; et il est clair que le point dangereux relatif au point de départ sera l'un de ceux qui se trouvent sur ces deux branches; le plus dangereux sera le plus rapproché.

Les exemples que nous traiterons achèveront de dissiper ce qu'il peut rester d'obscur dans ces explications.

---

[*] Le coefficient angulaire d'une droite ne peut devenir infini, par suite d'une transformation d'axes, qu'autant qu'il est réel : par conséquent, la dérivée de la fonction en un point ne peut devenir infinie que si elle est déjà réelle.

Dans ces exemples, comme dans tous ceux qu'on pourrait avoir à traiter, on arrivera à une certitude absolue en examinant si, dès que l'on admettrait que le point $[x, y]$ pût, sans que la série devînt divergente, venir se placer sur une des deux conjuguées dangereuses qui comprennent le point de départ $[x_0, y_0]$, il pourrait suivre cette conjuguée jusqu'au point dangereux qu'elle contient. Lorsqu'il en sera ainsi, et ce sera le cas général, ce point dangereux limitera évidemment la région de convergence, car pour aller joindre un autre point dangereux, il faudrait toujours que le point $[x, y]$ traversât la conjuguée en question, et s'il pouvait la traverser, il pourrait, à plus forte raison, d'après ce qu'on suppose, traverser le point dangereux qu'elle renferme, ce qui est toujours impossible. Au reste, lorsqu'une même conjuguée renfermera plusieurs points dangereux, ce qui arrivera fréquemment, le point $[x, y]$ pourra en général se rendre très-près de l'un d'eux, tandis qu'il devra rester à des distances finies des autres; le choix entre ces points sera déterminé par la simple comparaison des modules des différences entre x_0 et leurs abscisses.

102. Bien que la question que nous venons de traiter présentât un grand intérêt, on peut comprendre cependant qu'on ait pu se passer momentanément d'en avoir la solution exacte : comme on est toujours maître de disposer de l'écart que l'on fait subir à la variable, on eût pu même laisser les choses dans l'état où nous les avons trouvées, et se contenter de savoir que la série en tout cas resterait convergente au moins jusqu'au point dangereux le plus voisin du point de départ, c'est-à-dire, dont l'abscisse, retranchée de x_0, donnât le moindre module.

Mais on ne pouvait aborder la seconde question, qui doit nous occuper maintenant, et qui a par elle-même beaucoup plus d'importance, sans avoir préalablement résolu la première : il est évident, en effet, qu'il faudra connaître le rayon de convergence de la série avant de se demander ce qu'elle donnera tant qu'elle sera convergente.

La base générale de la méthode que nous proposerons pour arriver à connaître la valeur de la fonction qui se développe suivant la série, est fondée sur cette importante remarque que, quelque valeur qu'on donne à x, les m valeurs de y fournissent toujours des points séparés les uns des autres par une ou plusieurs conjuguées dangereuses, c'est-à-dire passant par les points dangereux : ces conjuguées séparent le plan en cases dans aucune desquelles ne peuvent jamais se trouver en même temps deux points ayant même abscisse.

On trouverait la preuve du fait que nous avançons ici, dans les explications contenues au chapitre précédent. Mais nous n'insisterons pas, parce que notre affirmation est évidemment conforme à la théorie de M. Cauchy. En effet, le premier principe de cette théorie consiste en ce qu'une des valeurs de la fonction ne peut se permuter avec une autre qu'autant que le point x soit allé auparavant faire un tour autour d'un des points dangereux; or durant cette évolution le point $[x, y]$ aura passé au moins une fois sur une des conjuguées correspondantes.

Ainsi pour qu'un point $[x_1, y_1]$ aille se rendre en un autre point $[x_1, y_2]$, ayant même abscisse, il faut qu'il traverse au moins une des conjuguées dangereuses. C'est bien assez dire que les points

$$[x_1, y_1],\ [x_1, y_2], \ldots,\ [x_1, y_m],$$

sont toujours séparés les uns des autres par des conjuguées dangereuses.

103. Ce principe admis, il est aisé de prévoir que la série devra assigner, pour valeur finale, à la fonction, celle de l'ordonnée du point qui, pour revenir au point de départ, aurait le moins de conjuguées dangereuses à traverser.

Supposons d'abord que tous les points dangereux soient réels, que par conséquent les conjuguées dangereuses aient leurs abscisses réelles : il est évident que dans ce cas la région de convergence ne pourra couper, si encore elle la coupe, que la conjuguée dangereuse qui passerait par celui-là même des points dangereux qui fixe la limite de la région de convergence; le point final ne pourra donc se trouver que dans l'une ou l'autre des deux cases limitées à cette conjuguée dangereuse et à celles qui la comprennent immédiatement; par conséquent tout se réduira à savoir si le point mobile a changé ou non de case.

En effet, si la région de convergence pouvait rencontrer deux conjuguées dangereuses, elle en embrasserait des arcs terminés dans un sens et dans l'autre à des points ayant même abscisse réelle, puisque la convergence de la série ne dépend que du module de x. Le point $[x, y]$ pourrait donc, sans sortir de la région de convergence, prendre successivement différentes ordonnées correspondantes à une même abscisse; ou bien, on pourrait sans sortir de la région de convergence amener la fonction à prendre successivement, pour une même valeur de la variable, des valeurs différentes, ce qui ne saurait être : dans ce cas donc il n'y a aucun doute possible, et l'on voit même que si le point $[x, y]$ peut se rendre sur une des branches de la conjuguée qui passe par le point dangereux situé sur la limite de la région de convergence, il ne pourra même pas, sans sortir de cette région, passer sur l'autre branche de la même conjuguée, qui passe au même point.

Au reste, pour savoir si le point $[x, y]$ a en effet traversé la branche de conjuguée sur laquelle on suppose qu'il pouvait se rendre, il suffira de comparer le signe de la partie imaginaire de la valeur finale de x au signe de la partie imaginaire de sa valeur initiale : suivant que β_0, β_1 sera négatif ou positif, le point $[x, y]$ aura ou non changé de case.

Supposons maintenant que le point dangereux, qui limite la région de convergence, soit imaginaire, ou, seulement, que le lieu proposé présente quelques points dangereux imaginaires.

A la vérité, je ne pense pas qu'on pût encore affirmer, dans ce cas, que le point $[x, y]$ ne pourra traverser qu'une seule conjuguée dangereuse. En effet, les points dangereux sont donnés par le système des équations

$$f(x, y) = 0$$

et

$$\frac{df}{dy} = 0,$$

l'une du degré m, l'autre du degré $m - 1$.

Or il peut se faire que toutes les solutions communes à ces deux équations fournissent effectivement les coordonnées de points où les dérivées de y deviennent infinies à partir d'un certain ordre; d'ailleurs il passera habituellement deux branches d'une même conjuguée par un même point dangereux; le nombre des cases peut donc dépasser de beaucoup le degré de l'équation proposée, par rapport à y; et en conséquence on ne voit pas pourquoi le point $[x, y]$ ne pourrait pas traverser une case tout entière, sans sortir de la région de convergence.

Mais, d'un autre côté, s'il peut traverser plusieurs conjuguées dangereuses, cela tiendra évidemment à ce que les cases correspondantes ne sauraient contenir des points ayant même abscisse, car autrement les ordonnées de ces points pourraient se permuter entre elles, dans l'intérieur de la région de convergence, ce qui est impossible.

La conclusion est donc toujours la même, quoique les faits soient alors plus difficiles à analyser.

Quand on aura calculé les valeurs de y qui correspondent à la valeur finale de x, quelles que soient les cases où se trouvent les points correspondants, il sera toujours possible de distinguer des autres celui qui n'est pas sorti de la région de convergence.

Quant à savoir du reste si le point $[x, y]$ aura ou non traversé l'une des conjuguées dangereuses que pourrait couper la région de convergence, ce sera toujours aisé : cette conjuguée n'ayant pas ses abscisses réelles, elles satisferont à une condition

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

qu'il faudra d'abord former : cela fait, on pourra affirmer que le point $[x, y]$ aura ou non traversé la conjuguée en question, suivant que

$$\varphi(\alpha_0, \beta_0) \times \varphi(\alpha_1, \beta_1),$$

sera négatif ou positif.

104. Lorsque le point dangereux, qui limiterait la région de convergence, sera imaginaire, il arrivera généralement que deux des valeurs de la fonction, qui correspondraient à une valeur de la variable suffisamment voisine de celle de l'abscisse du point dangereux, ne différeront plus l'une de l'autre que par le signe de la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$.

Pour choisir entre ces deux valeurs de la fonction, il suffira de savoir si le point $[x, y]$ a dû passer sur l'enveloppe imaginaire des conjuguées.

Cette enveloppe étant caractérisée par une équation

$$\psi(\alpha, \beta) = 0,$$

qu'on aura formée à l'avance, on saura par le signe de

$$\psi(\alpha_0, \beta_0)\psi(\alpha_1, \beta_1)$$

si le point $[x, y]$ a en effet passé sur l'enveloppe imaginaire, c'est-à-dire si le signe de la partie imaginaire de $\frac{dy}{dx}$ a dû ou non changer, en passant du point $[x_0, y_0]$ au point final cherché.

105. Nous ne pouvions évidemment prétendre à prévoir ici tous les cas qui pourront se présenter et à les discuter par avance. Nous nous sommes donc borné à la discussion des circonstances les plus simples, par conséquent les plus générales du phénomène.

Chaque équation aura évidemment ses caprices, avec quoi il faudra compter à part.

Nous traiterons quelques exemples assez simples pour que les calculs soient praticables, mais qui permettent cependant de constater que la méthode existe bien réellement.

Si l'on s'en proposait de plus compliqués, les difficultés qu'ils présenteraient seraient, en tout cas, de celles que l'on sait résoudre avec de la patience : car s'il le fallait absolument, on pourrait toujours, comme dernière ressource, construire, au moyen des principes que nous avons posés dans le chapitre VI, la limite même de la région de convergence, ce qui assurément mènerait à une solution sans réplique de la question, puisqu'on ne pourrait alors s'empêcher de reconnaître celui des points fournis par les différentes valeurs de y, correspondantes à la valeur finale de x, qui se trouverait au dedans de la limite obtenue.

106. On a dû remarquer que c'est en rétablissant entre les différentes questions, qui nous ont occupé jusqu'ici, l'ordre de dépendance qui dérivait de leur nature même, que nous en avons rendu la solution accessible. Aussi, dès que la question qui faisait l'objet du chapitre précédent avait pu être traitée, toutes celles que comportait l'étude de la série de Taylor devaient évidemment pouvoir être abordées : et la complication seule des exemples pourra en effet mettre obstacle, par la longueur des calculs, à la solution des difficultés les plus inextricables.

Mais il nous reste à présenter une dernière remarque, qui, mieux que les explications qui précèdent, rendra compte de la méthode que nous avons adoptée.

Les démonstrations spéciales que nous aurons à présenter dans chaque cas, paraîtront peut-être tellement simples, qu'après avoir en quelque sorte renoncé à traiter la question, on sera au contraire maintenant tenté de la croire abordable par toutes les méthodes, ou même sans méthode spéciale.

Ce serait exagérer en sens contraire; en effet, ce n'est que parce que nous faisons toujours porter la discussion sur la caractéristique du point mobile, de préférence à toute autre variable réelle, que les faits sont toujours si faciles à analyser et les preuves si simples. Le choix de cette variable nous permet en quelque sorte de réduire l'étude du mouvement du point imaginaire à celle du mouvement du point réel situé sur la même conjuguée et sur la même branche, de façon que toutes les difficultés, qu'entraîne l'introduction de valeurs imaginaires attribuées aux variables, disparaissent, pour ainsi dire aussitôt, toutes les propriétés des points d'une même branche de conjuguée ne dépendant que de la place occupée sur la courbe réelle par le point où la touche cette branche de conjuguée.