

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Addition à la note sur certaines égalités entre des sommes qui dépendent de la fonction numérique $E(x)$, insérée dans le cahier d'août

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 5 (1860), p. 455-456.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5_455_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

ADDITION

A LA NOTE SUR CERTAINES ÉGALITÉS
ENTRE DES SOMMES QUI DÉPENDENT DE LA FONCTION NUMÉRIQUE $E(x)$,
INSÉRÉE DANS LE CAHIER D'AOUT [*];

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je veux ajouter une égalité nouvelle aux deux égalités que j'ai données dans la Note indiquée (voir p. 287 et 288). Celle dont je veux parler aujourd'hui est plus compliquée, mais toujours dépendante de la fonction $E(x)$ qui marque l'entier contenu dans x . Elle offrira un troisième exemple d'une suite de propositions qui touchent à la théorie des formes quadratiques. L'égalité dont il s'agit se rapporte en effet à la forme $x^2 + 3y^2$, comme les deux précédentes à la forme $x^2 + y^2$.

Au premier membre figurera la différence des deux sommes

$$\sum E\left(\frac{\alpha + r}{2r}\right), \quad \sum E\left(\frac{\alpha + s}{2s}\right) :$$

α est une quantité positive donnée à volonté; les signes sommatoires portent sur r et sur s : on donne à r les valeurs successives 1, 7, 13, etc., tirées de la formule $6\mu + 1$, et à s les valeurs 5, 11, 17, etc., tirées de la formule $6\mu + 5$; dès qu'on dépasse α , on ne trouve plus que des zéros, et les séries s'arrêtent d'elles-mêmes. Ceci expliqué, je fais

$$A = \sum E\left(\frac{\alpha + r}{2r}\right) - \sum E\left(\frac{\alpha + s}{2s}\right),$$

pour désigner le plus simplement possible la différence que j'ai en vue.

[*] Il y a une faute d'impression à corriger : page 288, ligne 15, au lieu de m , mettez n .

En second lieu, représentons par B et C les deux sommes respectives

$$\sum E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha - 3\varpi^2}\right), \quad \sum E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha - \varpi^2}{3}}\right),$$

où ϖ prend les valeurs 2, 4, 6, 8, etc., formant la suite des nombres pairs en commençant à 2 et en s'arrêtant pour chaque somme au moment où le radical deviendrait imaginaire.

L'égalité que j'ai annoncée peut maintenant s'écrire :

$$A = E\left(\frac{1+\sqrt{\alpha}}{2}\right) + E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right) + 2(B + C) [*].$$

Soit, comme exemple, $\alpha = 27$: il viendra

$$A = 14 + 2 + 1 + 1 + 1 - 3 - 1 - 1 - 1,$$

c'est-à-dire

$$A = 13.$$

D'un autre côté, on trouve, pour cette valeur de α ,

$$E\left(\frac{1+\sqrt{\alpha}}{2}\right) = 3, \quad E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right) = 2$$

et

$$2(B + C) = 2(2 + 1 + 1) = 8 :$$

le total $3 + 2 + 8$ faisant 13, notre égalité est vérifiée.

[*] On remarquera que α est une quantité positive quelconque. Nous aurions pu attribuer cette même signification étendue aux lettres m et n dans nos deux anciennes égalités, au lieu de supposer que m et n désignent des entiers, l'un impair, l'autre quelconque. Mais alors au lieu de dire (page 287) que les valeurs de s sont 1, 3, 5, 7, ..., m , il aurait fallu dire de prendre $s = 1, 3, 5, 7, \dots$, sans dépasser m , la série s'arrêtant d'elle-même dès qu'on a $s > m$.