

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers de la forme $40\mu + 23$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 5 (1860), p. 391-392.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5_391_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $40\mu + 23$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Pour tout nombre premier m , de la forme $40\mu + 23$, on peut poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = (10x + 3)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x étant un entier indifféremment positif, nul ou négatif, d'ailleurs pair ou impair, tandis que y est impair et positif: quant à p , c'est un nombre premier ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$) qui ne divise pas y .

L'expression $(10x + 3)^2$, en y prenant x positif, nul ou négatif, donne les carrés des nombres positifs de ces deux formes

$$10s + 3, \quad 10s - 3,$$

savoir

$$3^2, 7^2, 13^2, 17^2, \dots;$$

notre théorème revient donc à dire qu'il y a un nombre impair des termes de la suite

$$m - 3^2, \quad m - 7^2, \quad m - 13^2, \quad m - 17^2, \dots,$$

qu'on peut exprimer par

$$2p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y . La forme ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$), que nous attribuons à p , n'est qu'une conséquence de l'équation même que nous posons,

$$m = (10x + 3)^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

et de la forme linéaire attribuée à m , qui est $40\mu + 23$.

Le plus petit nombre de la forme $40\mu + 23$ est 23; c'est un nombre premier : or on a

$$23 = 3^2 + 2 \cdot 7 \cdot 1^2,$$

conformément à notre théorème. Ensuite vient (en laissant de côté les nombres composés)

$$103 = 3^2 + 2 \cdot 47 \cdot 1^2;$$

ici on ne doit pas compter l'équation $103 = 7^2 + 2 \cdot 3^2$, parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$. Je note encore 223, qui nous offre une seule décomposition canonique :

$$223 = 3^2 + 2 \cdot 107.$$

Pour 263, il y en a trois, savoir :

$$3^2 + 2 \cdot 127 \cdot 1^2, \quad 7^2 + 2 \cdot 107 \cdot 1^2, \quad 13^2 + 2 \cdot 47 \cdot 1^2;$$

de même pour 383, qui peut s'écrire :

$$7^2 + 2 \cdot 167 \cdot 1^2, \quad 13^2 + 2 \cdot 107 \cdot 1^2, \quad 17^2 + 2 \cdot 47 \cdot 1^2.$$

Ces exemples suffiront.

