

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Théorème concernant les nombres premiers de l'une ou de
l'autre des deux formes $40\mu + 11$, $40\mu + 19$**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 5 (1860), p. 387-388.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__387_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

THÉORÈME

CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS DE L'UNE OU DE L'AUTRE
DES DEUX FORMES $40\mu + 11$, $40\mu + 19$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Pour tout nombre premier m de l'une ou de l'autre des deux formes $40\mu + 11$, $40\mu + 19$, on peut poser (un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 5x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x et y étant des entiers impairs, et p un nombre premier ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$) qui ne divise pas y .

En d'autres termes, si d'un nombre premier donné m , de l'une ou de l'autre des deux formes $40\mu + 11$, $40\mu + 19$, on retranche les termes de la suite

$$5.1^2, 5.3^2, 5.5^2, 5.7^2, 5.9^2, \dots,$$

qui ont une valeur moindre, il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$2p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier qui ne divise pas y . Quant à la forme linéaire de p ($20\nu + 3$ ou $20\nu + 7$), elle est une conséquence de l'équation même

$$m = 5x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

qui dans nos hypothèses sur m entraîne ces deux congruences

$$p \equiv 3 \pmod{4}, \quad p \equiv \pm 3 \pmod{5}.$$

Considérons d'abord les nombres premiers $40\mu + 11$. Le plus pe-
49..

tit est 11, et l'on a

$$11 = 5.1^2 + 2.3.1^2,$$

conformément à notre théorème, 3 étant contenu dans la forme $20\gamma + 3$. Ensuite vient 131, pour lequel on a les trois décompositions canoniques

$$5.1^2 + 2.7.3^2, \quad 5.3^2 + 2.43.1^2, \quad 5.5^2 + 2.3.1^2.$$

On en a également trois pour 211, savoir :

$$5.1^2 + 2.103.1^2, \quad 5.3^2 + 2.83.1^2, \quad 5.5^2 + 2.43.1^2.$$

Passons à la forme $40\mu + 19$. D'abord

$$19 = 5.1^2 + 2.7.1^2,$$

et

$$59 = 5.3^2 + 2.7.1^2;$$

car il ne faut pas compter l'équation $59 = 5.1^2 + 2.3^3$, l'exposant 3 n'étant pas de la forme $4l + 1$. Pour 139, qui vient ensuite, on a trois décompositions :

$$5.1^2 + 2.67.1^2, \quad 5.3^2 + 2.47.1^2, \quad 5.5^2 + 2.47.1^2.$$

Pour 179, on n'en a qu'une seule de l'espèce exigée, savoir :

$$179 = 5.3^2 + 2.67.1^2;$$

mais pour 379, on en trouve de nouveau trois,

$$5.3^2 + 2.167.1^2, \quad 5.5^2 + 2.127.1^2, \quad 5.7^2 + 2.67.1^2.$$

Il y en a aussi trois pour 419; les voici :

$$5.1^2 + 2.23.3^2, \quad 5.5^2 + 2.3.7^2, \quad 5.9^2 + 2.7.1^2.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces exemples.

