

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 5 (1860), p. 305-308.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5_305_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

Il est clair que la forme

$$x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$$

ne peut pas représenter les nombres impairs $4k + 3$; mais elle représente tous les autres nombres, soit pairs, soit impairs, $2k$, $4k + 1$, et l'on peut fixer d'une manière précise le nombre N des représentations dans chaque cas. Ici, comme pour la forme

$$x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2),$$

dont nous nous sommes occupés dans le cahier de *juillet*, tout dépend des théorèmes de Jacobi concernant la représentation des nombres par une somme de quatre carrés. Voici les résultats qu'on obtient : je désigne à mon ordinaire par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de m .

1°. Pour un nombre impair m , on a, comme nous venons de le dire,

$$N = 0,$$

quand m est de la forme $4k + 3$; mais

$$N = 4\zeta_1(m),$$

quand m est de la forme $4k + 1$. Ainsi le nombre 5 a vingt-quatre représentations, qui sont contenues dans les six équations sui-

vantes :

$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 4(o^2 + o^2),$$

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 4(o^2 + o^2),$$

$$5 = (\pm 1)^2 + o^2 + 4[(\pm 1)^2 + o^2],$$

$$5 = (\pm 1)^2 + o^2 + 4[o^2 + (\pm 1)^2],$$

$$5 = o^2 + (\pm 1)^2 + 4[(\pm 1)^2 + o^2],$$

$$5 = o^2 + (\pm 1)^2 + 4[o^2 + (\pm 1)^2],$$

dont chacune fournit quatre représentations.

2°. Pour le double $2m$ d'un nombre impair quelconque m , on a encore

$$N = 4\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 6 a seize représentations, contenues dans ces deux égalités :

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4[(\pm 1)^2 + o^2],$$

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4[o^2 + (\pm 1)^2].$$

3°. Pour le quadruple $4m$ d'un nombre impair quelconque m , on a

$$N = 8\zeta_1(m).$$

Ainsi le nombre 4 a huit représentations. Elles sont fournies par ces quatre équations :

$$4 = (\pm 2)^2 + o^2 + 4(o^2 + o^2),$$

$$4 = o^2 + (\pm 2)^2 + 4(o^2 + o^2),$$

$$4 = o^2 + o^2 + 4[(\pm 1)^2 + o^2],$$

$$4 = o^2 + o^2 + 4[o^2 + (\pm 1)^2],$$

dont chacune donne deux représentations.

4°. Enfin pour tous les nombres divisibles par 8, c'est-à-dire ex-

primés par $2^\alpha m$, m étant impair et $\alpha > 2$, on a

$$N = 24\zeta_1(m).$$

Ainsi 8, 16, 32, etc., ont vingt-quatre représentations.

Pour chaque nombre donné n , N est le nombre des représentations tant propres qu'impropres dont n est susceptible; en d'autres termes, N est le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2),$$

en prenant pour x, y, z, t des entiers positifs, nuls ou négatifs, absolument quelconques. Mais on peut aussi demander le nombre M des représentations propres, c'est-à-dire le nombre M des solutions que l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$$

conserve quand on exclut celles où les quatre entiers x, y, z, t ont un diviseur commun > 1 .

Il faut, pour exprimer M , remplacer $\zeta_1(m)$ par la fonction $Z_1(m)$, qui, pour chaque entier m décomposé en facteurs premiers,

$$m = a^\alpha b^\beta \dots c^\omega,$$

s'exprime par

$$Z_1(m) = (a^\alpha + a^{\alpha-1})(b^\beta + b^{\beta-1}) \dots (c^\omega + c^{\omega-1}).$$

Les coefficients numériques varient d'ailleurs ainsi qu'il suit :

1°. Pour un nombre impair m , on a

$$M = 0,$$

ou

$$M = 4Z_1(m),$$

suivant que m est de la forme $4k + 3$ ou de la forme $4k + 1$.

2°. Pour le double $2m$ d'un entier impair quelconque m , on a

$$M = 4Z_1(m).$$

3°. Pour le quadruple $4m$ d'un entier impair m , on a

$$M = 8Z_1(m),$$

ou

$$M = 4Z_1(m),$$

suivant que m est de la forme $4k + 3$ ou de la forme $4k + 1$.

4°. Pour l'octuple $8m$ d'un nombre impair quelconque m , on a

$$M = 20Z_1(m).$$

5°. Pour $16m$, m étant un entier impair quelconque, on a

$$M = 16Z_1(m).$$

6°. Enfin pour tous les nombres divisibles par 32, on a

$$M = 0.$$

