

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Égalités entre des sommes qui dépendent de la fonction numérique $E(x)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 5 (1860), p. 287-288.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5_287_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

ÉGALITÉS

ENTRE DES SOMMES QUI DÉPENDENT DE LA FONCTION NUMÉRIQUE $E(x)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je désigne ici par $E(x)$ l'entier contenu dans x , en sorte que si l'on pose

$$x = E(x) + r,$$

le reste r se réduira à zéro quand x sera un entier, mais dans tous les autres cas aura une valeur positive essentiellement plus petite que 1.

Cela posé, soit m un nombre impair donné. Désignons par s un entier impair qui prenne les valeurs successives 1, 3, 5, 7, ..., m , et formons la somme

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} E\left(\frac{m+s}{2s}\right),$$

relative à ces diverses valeurs de s . Il est clair que dans cette somme les termes sont alternativement positifs et négatifs : quant aux quantités placées sous le signe E , ce sont des fractions rationnelles.

Au contraire, les termes sont tous positifs, et il entre sous le signe E , un radical carré, dans la somme

$$\sum E\left(\frac{1 + \sqrt{2m - t^2}}{2}\right),$$

où t est un entier impair auquel on donne les valeurs successives 1, 3, 5, 7, ..., en ayant soin de s'arrêter au moment où l'on cesserait d'avoir

$$2m - t^2 > 0 :$$

la dernière valeur de t est donc la racine du plus grand carré impair contenu dans $2m$.

Cela posé, le premier des deux théorèmes que je veux énoncer ici

consiste en ce que les deux sommes indiquées sont égales, à savoir :

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} E\left(\frac{m+s}{2s}\right) = \sum E\left(\frac{1+\sqrt{2m-t^2}}{2}\right).$$

Soit comme exemple $m = 9$: notre équation exprime que les deux quantités

$$E\left(\frac{9+1}{2}\right) - E\left(\frac{9+3}{6}\right) + E\left(\frac{9+5}{10}\right) - E\left(\frac{9+7}{14}\right) + E\left(\frac{9+9}{18}\right)$$

et

$$E\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) + E\left(\frac{1+\sqrt{9}}{2}\right)$$

ont la même valeur, ce qui est vrai, la valeur commune étant 4.

Maintenant désignons par n un entier quelconque pair ou impair, puis supposons encore s impair et prenant les valeurs 1, 3, 5, etc., sans dépasser n . D'un autre côté soit θ un entier prenant toutes les valeurs paires ou impaires 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc., sans que jamais son carré dépasse ni même atteigne ce même nombre n . On aura cette seconde égalité

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} E\left(\frac{n}{s}\right) = \sum E(\sqrt{n-\theta^2}).$$

Ainsi, pour $n = 4$, il vient

$$E\left(\frac{4}{1}\right) - E\left(\frac{4}{3}\right) = E(\sqrt{4}) + E(\sqrt{3}),$$

ce qui est exact.

La démonstration des deux égalités ci-dessus s'offrira d'elle-même à tous ceux qui sont un peu au courant de la théorie des nombres, en particulier de ce qui concerne les décompositions d'un entier en deux carrés. Aussi ne les ai-je données que comme un sujet d'exercices pour les jeunes géomètres. Il serait, en effet, à désirer qu'on les établît directement sans recourir à la théorie des nombres.