

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

**Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans  
la théorie des nombres; douzième article**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 5 (1860), p. 1-8.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1860\\_2\\_5\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__1_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

# JOURNAL

DE

## MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

---

SUR  
QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES  
DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DOUZIÈME ARTICLE.

Les formules que nous donnons dans ce douzième article sont très-générales : elles contiennent une fonction arbitraire  $F(x, y, z)$  de trois variables ; et nous avertissons une fois pour toutes que cette fonction  $F(x, y, z)$  est impaire, c'est-à-dire change de signe avec chaque variable, et de plus s'évanouit quand une des variables se trouve égale à zéro. En un mot, il faudra constamment se rappeler que l'on a

$$F(-x, y, z) = -F(x, y, z),$$

$$F(x, -y, z) = -F(x, y, z),$$

$$F(x, y, -z) = -F(x, y, z),$$

pour tous les systèmes de valeurs de  $x, y, z$  employés dans le calcul. De plus, si une des variables prend une valeur nulle, la fonction devra alors s'annuler, en sorte que si l'on peut avoir, par exemple,  $x = 0$ , il faudra admettre que  $F(0, y, z) = 0$ .

## I.

La première formule dont nous allons nous occuper, renferme comme cas particulier la formule ( $\varepsilon$ ) de notre huitième article : elle se rapporte à un nombre  $m$  quelconque, pair ou impair, dont le mode de partition est défini par les deux équations

$$m = m'^2 + m'', \quad m'' = 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

ou, si l'on veut, par l'équation unique

$$m = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

$d''$  et  $\delta''$  étant impairs et positifs, tandis que l'entier  $m'$  peut être indifféremment positif ou négatif, ou même zéro : on a  $\alpha'' = 0$  quand  $m''$  est impair, ce qui arrive toutes les fois que  $m$  étant impair,  $m'$  est pair, ou que  $m$  étant pair,  $m'$  est impair. On forme la somme double

$$\sum \sum F(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''+1} d'' + 2m' - \delta''),$$

dans laquelle la première sommation s'applique aux valeurs de  $2^{\alpha''} d''$  et  $\delta''$  pour chaque nombre déterminé  $m''$ , tandis que la deuxième sommation concerne les groupes successifs  $(m', m'')$ . Notre théorème consiste en ce que la somme double indiquée est généralement égale à zéro : il n'y a exception que quand  $m$  est un carré, et alors la somme double a pour valeur la somme simple que voici :

$$\sum F(\sqrt{m}, 2s-1, 2s-1),$$

$s$  entier et variant de 1 à  $\sqrt{m}$ .

En d'autres termes, on a, suivant que  $m$  n'est pas ou est un carré.

$$(v) \left\{ \begin{array}{l} \sum \sum F(2^{\alpha''} d'' + m', \delta'' - 2m', 2^{\alpha''+1} d'' + 2m' - \delta'') = 0, \\ \text{ou} \quad = F(\sqrt{m}, 1, 1) + F(\sqrt{m}, 3, 3) + F(\sqrt{m}, 5, 5) + \dots \\ \quad + F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-1, 2\sqrt{m}-1). \end{array} \right.$$

Soit, par exemple,  $m = 3$ ; les valeurs de  $m'$ ,  $2^{\alpha''}d''$ ,  $\delta''$  à employer seront

$$m' = 0, \quad 2^{\alpha''}d'' = 3, \quad \delta'' = 1; \quad m' = 0, \quad 2^{\alpha''}d'' = 1, \quad \delta'' = 3;$$

$$m' = 1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 2, \quad \delta'' = 1; \quad m' = -1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 2, \quad \delta'' = 1.$$

La somme double sera donc ici

$$F(3, 1, 5) + F(1, 3, -1) + F(3, -1, 5) + F(1, 3, 1),$$

et, comme on a, par la nature de la fonction  $F$ , qui est impaire,

$$F(1, 3, -1) = -F(1, 3, 1), \quad F(3, -1, 5) = -F(3, 1, 5),$$

on trouve zéro, comme il le faut.

Soit encore  $m = 4$ . On devra trouver, 4 étant un carré,

$$F(2, 1, 1) + F(2, 3, 3).$$

Or les valeurs de  $m'$ ,  $2^{\alpha''}d''$  et  $\delta''$  à employer sont

$$m' = 0, \quad 2^{\alpha''}d'' = 4, \quad \delta'' = 1,$$

puis

$$m' = 1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 3, \quad \delta'' = 1; \quad m' = 1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 1, \quad \delta'' = 3;$$

$$m' = -1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 3, \quad \delta'' = 1; \quad m' = -1, \quad 2^{\alpha''}d'' = 1, \quad \delta'' = 3.$$

De là, pour la somme double,

$$F(4, 1, 7) + F(4, -1, 7) + F(2, 1, 1) + F(2, 3, 3) + F(0, 5, -3),$$

ce qui se réduit bien aux deux termes écrits plus haut, parce que l'on a

$$F(4, -1, 7) = -F(4, 1, 7), \quad F(0, 5, -3) = 0.$$

Nous n'entrerons dans aucun détail sur les applications de la formule ( $\nu$ ); mais nous devons montrer comment on en déduit la formule ( $\varepsilon$ ) de notre huitième article. Il faut observer que les valeurs de  $y$  et de  $z$  étant essentiellement impaires, on remplira les conditions

imposées à la fonction  $F(x, y, z)$  en la réduisant à la forme

$$(-1)^{\frac{1-z}{2}} F(x, y),$$

pourvu que l'on ait toujours

$$F(-x, y) = -F(x, y) = F(x, -y)$$

et

$$F(0, y) = 0.$$

Or cette valeur particulière de  $F(x, y, z)$  conduit immédiatement à la formule ( $\varepsilon$ ).

## II.

Continuons à désigner par  $m$  un nombre entier positif donné, pair ou impair, et posons

$$m = m'^2 + d'' \delta'',$$

$m'$  étant un entier positif, nul ou négatif, tandis que  $d''$  et  $\delta''$  sont des entiers essentiellement positifs, mais d'ailleurs pairs ou impairs. Puis considérons la somme double

$$S = \sum \sum F(d'' + m', \delta'' - 2m', 2d'' + 2m' - \delta''),$$

où les sommations s'étendent à toutes les valeurs de  $m'$ ,  $d''$ ,  $\delta''$  que comporte notre équation fondamentale

$$m = m'^2 + d'' \delta'',$$

d'après ce qui vient d'être dit.

Le théorème que nous voulons donner au sujet de cette somme double  $S$  consiste en ce que l'on a généralement

$$S = 0.$$

Il n'y a exception que quand  $m$  est un carré, et alors  $S$  s'exprime par la différence des deux sommes simples que voici :

$$\begin{aligned} & F(\sqrt{m}, 1, 1) + F(\sqrt{m}, 2, 2) + F(\sqrt{m}, 3, 3) + \dots \\ & + F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-1, 2\sqrt{m}-1) \end{aligned}$$

et

$$F(1, 2\sqrt{m}, 2) + F(2, 2\sqrt{m}, 4) + F(3, 2\sqrt{m}, 6) + \dots \\ + F(\sqrt{m}-1, 2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-2).$$

Comme on peut représenter la somme

$$F(\sqrt{m}, 1, 1) + F(\sqrt{m}, 2, 2) + F(\sqrt{m}, 3, 3) + \dots \\ + F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-1, 2\sqrt{m}-1)$$

par

$$\sum F(\sqrt{m}, s, s),$$

où l'on prend successivement  $s = 1, 2, 3, \dots, 2\sqrt{m}-1$ , et la somme

$$F(1, 2\sqrt{m}, 2) + F(2, 2\sqrt{m}, 4) + F(3, 2\sqrt{m}, 6) + \dots \\ + F(\sqrt{m}-1, 2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}-2),$$

par

$$\sum F(t, 2\sqrt{m}, 2t),$$

où l'on fera  $t = 1, 2, 3, \dots, \sqrt{m}-1$ , notre théorème revient à dire que l'on a, suivant que  $m$  n'est pas ou est un carré,

$$(\varphi) \quad \begin{cases} \sum \sum F(d'' + m', \delta'' - 2m', 2d'' + 2m' - \delta'') = 0, \\ \text{ou} \quad = \sum F(\sqrt{m}, s, s) - \sum F(t, 2\sqrt{m}, 2t), \end{cases}$$

la double sommation au premier membre se rapportant, je le répète, au mode de partition marqué par  $m = m'^2 + d''\delta''$ , avec  $d'' > 0, \delta'' > 0$ , les sommations simples aux entiers  $s$  et  $t$  variant, l'un de 1 à  $2\sqrt{m}-1$ , l'autre de 1 à  $\sqrt{m}-1$ , enfin la fonction  $F(x, y, z)$  étant impaire, chose convenue pour toutes les formules du présent article.

La formule (v), si générale qu'elle soit, pourrait être regardée comme contenue dans la formule (φ). Il n'y a qu'à regarder la fonction  $F(x, y, z)$  comme nulle quand une des deux dernières variables  $y, z$  est un nombre pair. Mais je n'insisterai pas là-dessus pour le mo-

ment. Je me contenterai d'appliquer la formule  $(\varphi)$  à deux exemples, en prenant  $m = 3$ , puis  $m = 4$ .

Pour  $m = 3$ , les couples de valeurs de  $m'$ ,  $d''$ ,  $\delta''$  compatibles avec l'équation

$$m = m'^2 + d'' \delta'',$$

sont

$$m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 3; \quad m' = 1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 2;$$

$$m' = -1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 2;$$

$$m' = 0, \quad d'' = 3, \quad \delta'' = 1; \quad m' = 1, \quad d'' = 2, \quad \delta'' = 1;$$

$$m' = -1, \quad d'' = 2, \quad \delta'' = 1;$$

et, puisque  $m$  n'est pas un carré, il s'ensuit que la somme

$$\begin{aligned} & F(1, 3, -1) + F(2, 0, 2) + F(0, 4, -2) \\ & + F(3, 1, 5) + F(3, -1, 5) + F(1, 3, 1) \end{aligned}$$

doit être égale à zéro; or cela a lieu effectivement puisque, d'après la nature de la fonction  $F$ , on a

$$F(2, 0, 2) = 0, \quad F(0, 4, -2) = 0,$$

et de plus

$$F(1, 3, -1) = -F(1, 3, 1), \quad F(3, -1, 5) = -F(3, 1, 5).$$

Pour  $m = 4$ , les couples de valeurs de  $m'$ ,  $d''$ ,  $\delta''$  sont, d'une part,

$$m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 4;$$

$$m' = 0, \quad d'' = 2, \quad \delta'' = 2;$$

$$m' = 0, \quad d'' = 4, \quad \delta'' = 1;$$

et, d'autre part,

$$m' = 1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 3; \quad m' = -1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 3;$$

$$m' = 1, \quad d'' = 3, \quad \delta'' = 1; \quad m' = -1, \quad d'' = 3, \quad \delta'' = 1;$$

ce qui, réduction faite d'après la nature de la fonction  $F(x, y, z)$ ,

donne, pour premier membre de l'équation ( $\varphi$ ), l'expression suivante

$$F(2, 1, 1) + F(2, 2, 2) + F(2, 3, 3) - F(1, 4, 2).$$

Or c'est bien là ce que donne aussi le second membre,  $m$  étant ici un carré, et les valeurs à employer étant

$$\sqrt{m} = 2, \quad s = 1, \quad s = 2, \quad s = 3, \quad t = 1.$$

Maintenant, sans sortir, au fond, de la même analyse et des mêmes procédés *élémentaires* de démonstration dont il ne sera question que plus tard, passons à une autre formule.

### III.

Nous supposons désormais que l'entier donné  $m$ , auquel nos calculs se rapportent, est un entier impair, du reste quelconque, et nous l'assujettirons au mode de partition marqué par l'équation

$$m = 2m'^2 + d''\delta'',$$

où  $d''$  et  $\delta''$  seront des entiers impairs et positifs, tandis que  $m'$  sera indifféremment un nombre entier positif ou négatif, ou zéro. C'est à tous les groupes  $(m', d'', \delta'')$  ainsi définis que s'appliquera la somme double

$$\sum \sum F(d'' + 2m', \delta'' - 2m', 2m' + d'' - \delta'').$$

Le théorème que nous avons à donner à ce sujet est on ne peut plus simple; car il consiste en ce que la somme double indiquée est égale à zéro, sans qu'il y ait aucune exception.

Ainsi, pour tout nombre entier impair  $m$ , et pour toute fonction algébrique ou numérique  $F(x, y, z)$  remplissant les conditions exigées au début de cet article, on a toujours, sous le mode de partition indiqué,

$$(\chi) \quad \sum \sum F(d'' + 2m', \delta'' - 2m', 2m' + d'' - \delta'') = 0.$$

Soit, par exemple,  $m = 1$ , ce qui donne uniquement

$$m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 1;$$

il viendra

$$F(1, 1, 0) = 0;$$

ce qui a lieu effectivement d'après la nature de la fonction  $F(x, y, z)$ .

Soit ensuite  $m = 3$ . On pourra faire

$$m' = 0, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 3; \quad m' = 0, \quad d'' = 3, \quad \delta'' = 1;$$

et de plus

$$m' = 1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 1; \quad m' = -1, \quad d'' = 1, \quad \delta'' = 1.$$

De là l'équation

$$F(1, 3, -2) + F(3, 1, 2) + F(3, -1, 2) + F(-1, 3, -2) = 0,$$

qui est exacte, puisque le premier et le quatrième terme du premier membre sont égaux au signe près, de même que le second et le troisième terme.

Je m'arrête ici : le lecteur voit assez que la formule ( $\chi$ ) est susceptible d'applications intéressantes.

