

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note à l'occasion d'un théorème de M. Kronecker

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 5 (1860), p. 127-128.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5_127_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

A L'OCCASION D'UN THÉOREME DE M. KRONECKER;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit n un nombre premier de la forme $4s + 3$. Il suit du théorème de Wilson, que toujours

$$1.2.3... (2s + 1) \equiv \pm 1 \pmod{n};$$

mais il reste à décider quel signe on doit prendre dans chaque cas particulier donné. En proposant ce problème dans le Journal de Crelle, Dirichlet ajoute que la question revient à chercher si le produit $1.2.3... (2s + 1)$ est ou n'est pas résidu quadratique de n ; ce qui se conclut immédiatement de ce que 1 est résidu et -1 non-résidu de tout nombre premier $4s + 3$. Donc, en appelant B le nombre des non-résidus quadratiques de n contenus dans la suite

$$1, 2, 3, \dots, 2s + 1,$$

on devra prendre le signe $+$ si B est pair, le signe $-$ si B est impair. Dès lors tout se réduit à trouver la valeur de $B \pmod{2}$; mais il faut ici une méthode abrégée : le calcul direct serait impraticable pour un nombre n un peu grand.

Parmi les règles plus ou moins simples que l'on a données à ce sujet, on distingue celle de M. Kronecker. Considérons la suite

$$n - 2^2, \quad n - 4^2, \quad n - 6^2, \dots, \quad n - (2\omega)^2,$$

où $(2\omega)^2$ est le plus grand carré pair contenu dans n . Soit ν le nombre des termes de cette suite qui sont de la forme

$$p^{4l+1} r^2,$$

p étant un nombre premier qui ne divise pas r . M. Kronecker nous apprend que l'on a

$$B \equiv \nu \pmod{2}.$$

Des recherches entreprises dans un tout autre but m'ont conduit pour le cas de s pair, c'est-à-dire pour les nombres premiers n de la forme $8k + 3$, à une règle nouvelle, qui a quelque analogie avec la précédente, mais où les carrés retranchés de n sont impairs au lieu d'être pairs. Soit i le plus grand carré impair contenu dans n . Considérons les divers termes de la suite

$$n - 1^2, \quad n - 3^2, \quad n - 5^2, \dots, \quad n - i^2,$$

et soit τ le nombre de ceux d'entre eux qui peuvent se mettre sous la forme

$$2q^{4\alpha+1}t^2,$$

q étant un nombre premier qui ne divise pas t . D'un autre côté, décomposons n sous la forme

$$n = a^2 + 2b^2,$$

ce qu'on peut toujours faire (d'une seule manière) pour un nombre premier $8k + 3$, et cherchons le nombre σ des facteurs premiers égaux ou inégaux de la forme $4g + 1$ qui entrent dans la composition de b . Notre théorème consiste en ce que l'on a

$$B \equiv \sigma + \tau \pmod{2}.$$

Pour le nombre 11, par exemple, on trouve aisément $B = 1$, $\nu = 1$, $\sigma = 0$, $\tau = 1$, et la double congruence

$$B \equiv \nu \equiv \sigma + \tau \pmod{2}$$

est vérifiée. Pour $n = 19$, il vient $B = 3$, $\nu = 1$, $\sigma = 0$, $\tau = 1$: même conclusion.