

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur le double d'un nombre premier $4\mu + 1$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 5 (1860), p. 119-120.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1860_2_5__119_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR

LE DOUBLE D'UN NOMBRE PREMIER $4\mu + 1$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier donné $4\mu + 1$. Nous allons rapprocher du double de m les nombres premiers p de la forme $8n + 1$. A cet effet, je pose de toutes les manières possibles l'équation

$$2m = x^2 + p^{4l+1} \cdot y^2,$$

où l'on doit prendre successivement tous les nombres p cités, et où x et y sont des entiers impairs non divisibles par p : on admet pour l la valeur zéro. J'ai trouvé et je vais donner une règle simple pour décider si le nombre N des décompositions de $2m$ sous la forme indiquée est pair ou impair, zéro étant regardé comme un nombre pair. Le cas de N impair offre surtout de l'intérêt, car alors on peut affirmer qu'il y a au moins un nombre premier p de la forme $8n + 1$ lié à m par notre équation.

Comme on a $m = 4\mu + 1$, on peut décomposer le double du nombre premier m en une somme de deux carrés impairs, et cela d'une seule manière. Soit donc

$$2m = a^2 + b^2.$$

Cherchons combien de facteurs premiers, égaux ou inégaux, de la forme $4s + 1$, entrent dans la composition de a et de b , ou, si l'on veut, dans la composition du produit ab . Soit σ le nombre ainsi obtenu, dans lequel on pourrait, sans inconvénient pour l'usage que nous en ferons, supprimer les multiples de 2.

Je me suis assuré que l'on a toujours

$$N \equiv \mu + \sigma + 1 \pmod{2}.$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que N soit impair, c'est que σ soit pair quand μ est pair, impair quand μ est impair, ou,

en d'autres termes, que σ soit pair quand $m = 8\nu + 1$, impair quand $m = 8\nu + 5$.

Les plus petits nombres premiers de la forme $8\nu + 5$ sont 5 et 13. On a

$$2.5 = 1^2 + 3^2, \quad 2.13 = 1^2 + 5^2,$$

de sorte que $\sigma = 0$ pour $m = 5$, mais $= 1$ pour $m = 13$. Ainsi N est pair pour $m = 5$, mais impair pour $m = 13$. Or on peut aisément vérifier que les valeurs de N relatives à ces deux nombres sont respectivement 0 et 1, la dernière valeur provenant de ce que

$$2.13 = 3^2 + 17.1^2.$$

Quant à la forme $8\nu + 1$, le plus petit nombre premier qu'elle fournit est 17. On a

$$2.17 = 3^2 + 5^2,$$

d'où $\sigma = 1$, partant N pair; or il est aisé de voir que, dans ce cas, $N = 0$.

Voici une autre règle tout aussi commode pour déterminer la nature de N . Conservons les notations précédentes, et cherchons combien dans la composition du produit ab il entre de facteurs premiers, égaux ou inégaux, de la forme $8g + 1$ et de la forme $8g + 3$. En désignant par τ le nombre ainsi obtenu, on aura cette seconde congruence

$$N \equiv \tau + 1 \pmod{2};$$

en sorte que N est impair quand τ est pair et *vice versa*, comme on peut le vérifier sur les exemples ci-dessus. On remarquera ce corollaire, que toujours $\tau \equiv \mu + \sigma \pmod{2}$, chose aisée, du reste, à établir directement.

