

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A.-J.-H. VINCENT

Considérations sur les porismes en général et sur ceux d'Euclide en particulier. Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M. Breton (de Champ) aux textes de Pappus et de Proclus relatifs aux porismes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 4 (1859), p. 9-46.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4_9_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

CONSIDÉRATIONS
SUR
LES PORISMES EN GÉNÉRAL
ET SUR
CEUX D'EUCLIDE EN PARTICULIER.

*Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M. Breton
(de Champ) aux textes de Pappus et de Proclus relatifs aux
Porismes.*

PAR A.-J.-H. VINCENT.

§ I.

Historique des derniers travaux. — État de la question.

1. Les lecteurs du *Journal de Mathématiques* se rappellent qu'en 1855 M. Breton (de Champ) publia, dans ce journal (t. XX, p. 209), un Mémoire intitulé : *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide*. Voici ce que j'écrivais quelque temps après, au sujet de ce Mémoire, dans une première *Notice* insérée au journal *La Science* (3^e année, n^o 10, p. 885) :

« Je ne m'étais point encore occupé particulièrement des porismes,
» lorsque M. Breton (de Champ) voulut bien me donner communica-
» tion de l'intéressant travail qu'il avait exécuté sur cette question et
» inséré au *Journal de Mathématiques* de M. Liouville. Après avoir pris
» lecture de ce Mémoire, je m'empressai de dire à l'auteur, en lui
» adressant mes remerciements, que s'il n'avait point complètement
» dissipé l'obscurité qui régnait encore sur cette question difficile, il
» me paraissait du moins dans une bonne voie, et qu'après avoir aussi
» heureusement approché du but, il parviendrait sans aucun doute à
» l'atteindre tout à fait. J'aurais donc laissé à M. Breton l'honneur
» d'élucider entièrement cette curieuse branche de la géométrie an-

» cienne, si je n'avais remarqué ultérieurement que, par un acte de
 » modestie qui l'honore autant que son savoir, l'auteur semblait
 » appeler tout particulièrement la critique sur l'exactitude de sa tra-
 » duction des textes de Pappus et de Proclus. Or comme, en définitive,
 » c'est dans la fidélité de cette interprétation que gît véritablement le
 » nœud de la difficulté, j'ai entrepris de la refaire à nouveau.

» Je vais donc commencer par exposer mes propres traductions,
 » que je ferai suivre des observations nécessaires pour signaler les
 » points principaux dans lesquels je m'écarte de celles de M. Breton,
 » et tâcher de justifier l'opinion que m'a fait adopter un examen
 » scrupuleux des textes. »

Ici j'essayais une nouvelle traduction des textes de Pappus et de Proclus (*ibid*; *tiré à part*, p. 2-8).

2. Maintenant voici quelles étaient mes conclusions (*La Science*, p. 888, col. 2; *tiré à part*, p. 13):

« Après ces explications sur le véritable sens des textes de Pappus et
 » de Proclus, est-il nécessaire d'émettre une opinion sur la nature des
 » porismes? Il nous paraît évident que si l'on a prêté quelque atten-
 » tion aux annotations qui précèdent, on ne pourra se défendre de
 » tirer cette conclusion : que si les divers auteurs qui se sont occupés
 » des porismes sont tous plus ou moins parvenus à en apercevoir la
 » nature sous quelque'une de ses faces, Schooten seul a su en pénétrer
 » à fond la véritable essence ; et, comme le dit avec raison M. Bre-
 » ton [*] : « On doit regretter qu'il n'ait pas développé ses idées sur ce
 » sujet, et surtout qu'il n'ait pas dit comment, dans sa pensée, les
 » porismes tels qu'il les concevait, pouvaient servir à expliquer les
 » passages obscurs de Pappus et de Proclus ». »

Pour que ma pensée soit bien comprise, je crois devoir rappeler ici les termes mêmes dans lesquels M. Breton présente l'opinion de Schooten pour laquelle je me suis prononcé.

« La méthode suivie par l'auteur (par Schooten) pour découvrir
 » toutes ces propriétés, dit M. Breton [**], n'est autre chose que l'al-

[*] *Recherches nouvelles*, p. 256; T. P., p. 48.

[**] *Ibid*.

» gèbre appliquée à la géométrie. Il établit, à l'aide des théorèmes les
 » plus élémentaires de la géométrie, un petit nombre d'équations
 » très-simples entre les diverses lignes de la figure; puis, combinant
 » ces équations de diverses manières, il en déduit successivement de
 » nouveaux théorèmes.

» Il termine en disant : « Et ainsi (c'est Schooten qui parle), et
 » ainsi, en comparant entre elles les quantités de manière à obtenir
 » toujours de nouvelles équations, on pourra trouver d'innombrables
 » propriétés appartenant aux objets proposés ».

Telle est la théorie de Schooten; seulement il est clair qu'au lieu de l'algèbre moderne il faut sous-entendre, de la part des Anciens, l'usage des proportions; et j'ajoute, quant à moi, que dans une foule de cas où il s'agissait exclusivement de relations de position, ce n'était pas même aux proportions qu'il fallait avoir recours, mais à de simples notions d'égalité et de superposition.

5. Je reviens à mes propres conclusions, dont je reprends la suite dans le journal *La Science* :

« On doit le voir, disais-je ensuite [*], la théorie des porismes est
 » bien simple : la seule chose sur laquelle il nous paraisse encore utile
 » d'insister, c'est l'inexactitude de la supposition généralement accréditée, d'après laquelle l'idée de porisme ne peut se concevoir sans
 » celle d'indétermination, de mouvement, de *lieu décrit* ou *engendré*.
 » Il est vrai que l'on peut imaginer, en très-grand nombre, des porismes qui conduisent à des lieux géométriques; mais ce n'est là
 » qu'un des accidents de leur nature, nullement inhérent à leur essence. On peut même dire, au contraire, que si *le porisme ajoute*
 » *à l'hypothèse du théorème local* [**), par là-même il introduit la
 » détermination dans un problème qui, en soi, était indéterminé, et
 » que s'il trouve à se placer dans un lieu géométrique, ce n'est, en
 » quelque sorte, qu'en éliminant celui-ci, bien loin de le constituer [***].
 » Nous pourrions faire des remarques analogues sur la théorie des

[*] *La Science*, ibid. T. P., p. 14.

[**] Voir, ci-après, annotation H.

[***] Voir ci-après, annotations T et U, ce qui est relatif au *segment capable*.

» Transversales, que l'on a cru et que l'on a pu jusqu'à un certain
 » point reconnaître dans la collection des Lemmes de Pappus. Nombre
 » de propositions appartenant à cette théorie s'y retrouvent avec évi-
 » dence ; mais elles ne s'y enchaînent pas de manière à constituer une
 » théorie proprement dite, comme dans la géométrie moderne. De là
 » à un traité de la *Corrélation des figures*, de leurs *Propriétés projec-*
 » *tives*, de là à une *Géométrie supérieure*, il y a encore loin.

» Nous ne doutons pas qu'avec de la patience on ne parvienne faci-
 » lement à mettre dans tout son jour la réalité de ces assertions. Le
 » moyen, pour arriver là, nous paraît simple, mais malheureusement
 » plus fastidieux que fructueux : ce serait de reprendre *un à un* tous
 » les lemmes de Pappus, et dans chaque lemme toutes les proportions,
 » toutes les équations, *une à une* également, de les mettre en relief,
 » ainsi que chaque relation de position dont chaque figure présente
 » plus ou moins de variétés à chaque transformation ; sans compter les
 » réciproques, totales ou partielles, les cas singuliers, *maximums*,
 » *minimums*, etc., etc. Là nous paraît être tout le secret ; mais il est à
 » croire que le mot de l'énigme en ayant fait éclipser tout le merveil-
 » leux, on jugera en définitive, comme Pappus lui-même, que ce détail
 » ne vaudrait pas les peines dont il serait l'occasion, et que *toute*
 » *l'importance réelle réside dans les Lemmes*. Quoi qu'il en soit, M. Bre-
 » ton (de Champ) n'en aura pas moins rendu, en traduisant les Lemmes
 » de Pappus, un véritable service à la science, et nous l'engageons de
 » tout notre pouvoir à continuer son travail sur le reste du VII^e livre,
 » en se tenant toutefois en garde contre des *idées préconçues*.

» Quant à ce qui nous regarde, nous croirons avoir assez fait si nous
 » pouvons contribuer à l'empêcher de faire fausse route. »

On voit combien je suis loin, malgré l'affirmation positive de
 M. Breton (II^e supplément [*]), d'avoir *déclaré tout net qu'il avait fait*
fausse route, ou qu'il s'était *complètement fourvoyé* (ibid.).

4. A la suite de ma *Notice* parut, dans le même journal (*La Science*),
 une réponse de M. Breton, en trois articles, sous le titre d'*Objections*, etc.

[*] *Journal de Mathématiques*, 2^e série, t. III, p. 89; T. P., p. 3 (voir ci-des-
 sous, n^o 4).

(nos 27, 28, et 29; p. 75, 83, et 91), réponse à laquelle je répliquai, de mon côté, par une *Seconde Notice* qui fut également insérée dans *La Science* (nos 40 et 41, p. 180 et 187). Je terminais cette seconde Notice par les réflexions suivantes.

« M. Breton, disais-je (p. 188, col. 2; T. P., p. 15), m'accuse de
 » m'être *laissé dominer par une idée préconçue*. Il est bien vrai qu'une
 » idée s'était emparée de moi à la première lecture du Mémoire de cet
 » estimable Géomètre, et qu'ainsi elle s'est trouvée réellement pré-
 » conçue; mais heureusement elle ne m'a pas dominé. Faut-il le
 » répéter? j'avais préconçu l'idée que M. Breton venait de dire le der-
 » nier mot sur la théorie des porismes. Cependant, une étude plus
 » approfondie m'a fait voir que M. Breton s'était écarté notablement
 » du sens des textes non moins que de la lettre, et n'avait ainsi donné
 » qu'une première approximation. J'ai fourni la seconde *d'après lui*;
 » je ne réclame point d'autre mérite. Il restera donc à M. Breton le
 » mérite principal, s'il ne le répudie pas lui-même par une persistance
 » dont les suites seraient très-fâcheuses, en l'empêchant de compléter
 » son travail comme je l'ai engagé et comme je l'engage plus que
 » jamais à le faire. C'est à quoi il parviendra en développant les Lemmes
 » de Pappus, isolant les faits qui se rencontrent dans leurs diverses
 » démonstrations, mettant en relief les positions des lignes, leurs
 » rapports exprimés, examinant les cas particuliers, les récipro-
 » ques, etc., etc. C'est ainsi qu'il verra disparaître, j'en suis certain,
 » *les doutes, les objections, les impossibilités*.

» Au surplus, je n'ai pas moi-même la ridicule prétention d'avoir
 » donné des traductions irréprochables sous tous les rapports. Celle
 » que j'ai proposée peut bien être, *est* même certainement attaquable
 » sur plusieurs points, notamment dans les énoncés des Porismes, où
 » l'on est obligé de marcher à tâtons. Nul doute qu'une restauration
 » complète de l'ouvrage d'Euclide nécessiterait des modifications de
 » détail dans la rédaction conjecturale que j'ai proposée; mais *je*
 » *maintiens l'ensemble*; et pour les hommes compétents qui m'auront
 » fait l'honneur d'examiner, de peser les développements dans lesquels
 » je suis entré, j'ose espérer que la théorie des porismes cessera d'être
 » un *arcane* et la géométrie ancienne une *science occulte*. »

Sur ces entrefaites M. Houzel publia, dans le *Journal de Mathéma-*

tiques (2^e série, t. I, p. 193), un Mémoire sur le même sujet; et M. Breton y répondit, dans le même journal (2^e série, t. II, p. 185), par des *Observations* sous le titre de *Premier supplément aux Recherches nouvelles*, etc.

Enfin, dans un *Deuxième supplément* (voir ci-dessus, n° 3) postérieurement inséré dans ce même journal (2^e série, t. III, p. 89), M. Breton m'adresse une réponse personnelle dont j'ai particulièrement à m'occuper aujourd'hui.

5. Avant de commencer, je dois faire observer au lecteur, qu'il résulte évidemment des passages de mes deux Notices, cités ci-dessus, que je me suis offert à M. Breton comme *auxiliaire* bénévole, non comme adversaire; c'est donc tout à fait à tort que le savant Géomètre semble affecter de me considérer sous le second point de vue.

Je motiverai une seconde observation du même genre sur le passage suivant du *Deuxième supplément*... de M. Breton (p. 91; T. P., p. 3):

« Je donne ci-dessous, dit-il, l'une à côté de l'autre, la traduction » de M. Vincent et la mienne, en faisant toutefois profiter celle-ci » des modifications que j'ai proposées..., et en y apportant diverses » améliorations de détail, dont quelques-unes ont pour objet de » faire droit à celles de mon savant adversaire dont j'ai reconnu la jus- » tesse, etc. »

Suivent en conséquence, sur deux colonnes en regard, comme on l'a vu (*ibid.*), les deux traductions mentionnées, savoir, d'une part celle de M. Breton, amendée depuis mes premières observations et en partie avec leur secours, comme il vient d'être dit, et d'autre part ma propre traduction sous sa forme primitive et *non amendée*; de telle sorte que, dans cette espèce de compte courant par *doit* et *avoir*, mon apport se trouve figurer dans l'*avoir* de mon adversaire (puisque adversaire il y a) au lieu de figurer dans le mien.

Il est évident que M. Breton n'avait point réfléchi à cette légère irrégularité lorsqu'il crut devoir présenter au public savant notre bilan commun sous la forme qu'il a adoptée, et surtout communiquer aux lecteurs du *Journal de Mathématiques*, la réfutation (suivant lui) d'un écrit dont ces mêmes lecteurs n'avaient point été admis à prendre connaissance. Mais ce n'est pas tout : devais-je prévoir qu'en signalant

moi-même, dans ma *Seconde Notice*, certaines améliorations dont mon premier essai de traduction était susceptible, je n'obtiendrais d'autre avantage que de fournir à M. Breton (voir son *Second supplément*, Note j') un motif pour m'accuser de contradiction, en donnant à entendre que ma seconde Notice n'avait d'autre but que de justifier la première dans tous les points, et que j'avais fait tout le contraire sans m'en apercevoir?

A ce compte, on pourra bien trouver de nouveaux sujets de critique dans le présent écrit. Je suis loin certes de me croire la science innée, et de regarder mon amour-propre comme engagé à défendre toutes les conjectures que j'ai pu proposer dans une discussion où, comme je l'ai dit, je me trouvais en quelque sorte jeté au dépourvu. Au contraire, excité par le désir d'apporter quelque lumière réelle dans une question obscure, j'ai fait, dans les nouvelles *Considérations* que je présente aujourd'hui aux lecteurs, tout ce qui était en mon pouvoir pour tâcher de mettre en défaut, non-seulement mon adversaire, mais moi-même; et, persuadé que si cette question des porismes paraissait si difficile à résoudre, c'était surtout et peut-être uniquement parce qu'avant de la traiter on n'avait pas suffisamment étudié le vocabulaire de la géométrie ancienne, c'est à ce dernier point que je me suis particulièrement attaché ici; et je crois être parvenu, même aux dépens de certains détails secondaires de ma première traduction et de mes interprétations, à rendre aussi mes conclusions *plus nettes*.

C'est donc, je dois me hâter de le dire, parce que M. Breton me paraît avoir détourné de leur véritable sens, général ou spécial, plusieurs expressions grecques très-importantes ou plutôt capitales dans la question controversée, qu'il est arrivé à des conclusions si différentes des miennes.

6. La première expression dont j'ai à rectifier le sens, est *εὕρεῖν*, qui se traduit en latin tantôt par *invenire* (*inventer*), tantôt par *reperire* (*trouver par hasard*); c'est avec le second sens qu'on le lit dans Lucien (II, 282) : *Χρυσοῦν δακτύλιον ὁδῶ βαδίζων εὕρε* : *tout en cheminant il trouva sous ses pas une bague d'or* (voir le *Trésor grec* d'Henri Estienne).

Le sens du mot *εὑρημα* vient à l'appui de ce que je viens de dire (Xén., *Cyr.* VII, 3, 6) : *Εἰ δὲ μισθὸν προσλήψοντο, εὑρημα εἰδοίκεσθαι* : *s'il leur arrivait de toucher une solde, ils la regardaient comme une trouvaille.*

Nous sommes ici très-loin, comme on le voit, de l'*εὕρηκα* d'Archimède.

Quand Pappus emploie l'expression *δύναμις εὐρετική*, la *puissance inventive* [*], ce n'est point des porismes en particulier qu'il parle, mais des matières du VII^e Livre de ses *Collections mathématiques*, c'est-à-dire de tout ce qui est compris dans le *Τόπος ἀναλυόμενος*.

Tel est donc, selon moi, le sens dans lequel il faut prendre le mot *εὕρεσις* dans toute cette théorie des porismes. *Ὁρᾶν καὶ εὕρεῖν*, c'est tout simplement *ouvrir les yeux et ramasser*. Cela n'exclut pourtant pas (que M. Breton se rassure) toute sagacité et toute finesse de vue : ce serait peu d'ouvrir les yeux si l'on était dépourvu de toute clairvoyance. Ainsi donc, malgré l'insistance que M. Breton met à dire et à répéter que, suivant Pappus, *le porisme exige de l'invention*, la fin de non-recevoir que l'on peut, sur ce point, opposer au système de mon savant adversaire, suffirait pour frapper d'impuissance tout ce système ; mais on va voir que ce n'est pas la seule.

7. En effet, l'illusion que nous venons de signaler chez M. Breton, en a produit plusieurs autres semblables : d'abord relativement au mot *πορίζειν*, qu'il se croit autorisé à traduire, en conséquence de ce qui précède, par *inventer*. En réalité, les dictionnaires usuels ne peuvent conduire à aucune lumière certaine sur le sens scientifique de ce mot, non plus que sur celui de *πορισμός*, de *πόρισμα*, et des divers dérivés mathématiques de *πόρος*, puisque les Savants, qui seuls pourraient fournir les éléments propres à remplir cette lacune, discutent encore sur la valeur de cette famille de mots. Ainsi, dans l'état actuel des choses, si l'on n'admettait pas le sens naturel fourni par les lexiques, on n'aboutirait jamais à autre chose, si ce n'est à conclure, en langage plus ou moins français, que *πορίζειν* c'est *faire un porisme ou des*

[*] Préface du VII^e livre.

porismes, que *πορισμός* indique l'action de *poriser*, et *πόρισμα* le résultat de cette action. Commençons donc par rechercher le sens primitif des mots; c'est le procédé qui se présente le premier, c'est même le seul rationnel : nous verrons ensuite si le sens naturel ne peut nous apporter aucune lumière. Or on trouve parmi les racines grecques

πείρω transpercer se traduit;

πόρος trajet, voie, ou conduit; (d'où le mot français *pore*).

De là *πόροι*, voies et moyens; *πορίζειν*, pénétrer, traverser, acquérir, fournir [*]; *πορίζεσθαι*, se procurer; *πόριμος*, pénétrable, que l'on a déjà pénétré ou acquis; *ποριστός*, facile à acquérir; *πορισμός*, acquisition, action d'acquérir, de tirer parti d'une chose; *πόρισμα*, objet d'une acquisition, ressource, et en latin *corollarium*, d'où le français *corollaire* [**]. De sorte que le titre de *Porismes*, donné à un livre de géométrie, présente assez bien l'idée de ce que nous appellerions des *Compléments de géométrie*, sans toutefois rien préciser sur la nature spéciale des théories supplémentaires à développer.

En attendant que nous discutons les textes de Pappus et de Proclus, citons, en passant, la définition de *Philoponus* (in *Aristot. Analyt.*, I, 8) : *πόρισμα τὸ κατὰ τοὺς γεωμέτρους ἐκ τῶν προειρημένων συνάγει* : *Le porisme, suivant les géomètres, déduit quelque conséquence des choses qui ont précédé.*

Eh bien! il se trouve que toutes ces locutions, qui appartiennent à la langue vulgaire, conviennent on ne peut mieux à la matière, et expliquent parfaitement les passages de Pappus et de Proclus dont nous allons reprendre la traduction. Rien donc n'autorise à chercher, pour composer, pour inventer une théorie des porismes, autre chose que ce qu'indiquent ces documents authentiques, considérés dans toute leur simplicité.

[*] *Τοῖς ἄλλοις πολίταις, ὧν δέονται, πορίζειν* (Xén.) : *fournir au public ce dont il a besoin*. — Dans Euclide, *πορίζεσθαι* est ordinairement employé dans le sens d'*obtenir par déduction*.

[**] *Corollaire*, du latin *corollarium*, qui signifie *couronnement, supplément*, ce qu'on ajoute à ce qui est dû, le *comble*, le *par-dessus*. — (Cp. VARRO, *De lingua latina*.)

8. Continuons cet examen. M. Breton traduit les expressions $\delta\epsilon\delta\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\nu\ \sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}\omicron\nu$, $\delta\epsilon\delta\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\eta\ \epsilon\upsilon\theta\epsilon\acute{\iota}\alpha$, par celles-ci : *point fixe*, *droite fixe*, au lieu de *point donné*, *droite donnée*. Énoncer simplement ce fait, c'est dénoncer une erreur évidente. Il est bien vrai, cependant, que d'après la définition d'Euclide (Eucl. *Dat.* def., 4), un point donné, une droite donnée, sont essentiellement *fixes* [*]; mais la substitution de ce dernier mot au mot *donnés* a pour conséquence presque inévitable un grave abus que l'on trouve presque partout chez M. Breton, celui de faire considérer, en quelque sorte de plein droit, comme essentiellement variables, tout point, toute droite, qui ne sont point annoncés comme *donnés*. Comment admettre que la distinction de ce qui est ou n'est pas donné puisse autoriser de pareilles conséquences, au moins d'une manière générale? Que dans chaque cas où M. Breton croit qu'une telle conclusion résulte de l'hypothèse particulière, il cherche à le démontrer, c'est son droit; mais l'accorder d'une manière absolue, cela nous est impossible.

9. J'en dirai autant pour l'expression $\acute{\alpha}\pi\tau\epsilon\sigma\theta\alpha\iota\ \theta\acute{\epsilon}\sigma\epsilon\iota\ \delta\epsilon\delta\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\eta\varsigma\ \epsilon\upsilon\theta\epsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma$ que M. Breton traduit constamment par *décrire une droite*, au lieu de reconnaître que cela signifie simplement *se trouver sur une droite*. Que peut-on voir de décrit, par exemple, dans la définition de l'angle plan (Eucl. *Elem.* I def. 8), où les côtés de cet angle sont nommés $\delta\upsilon\omicron\ \gamma\gamma\alpha\mu\mu\alpha\acute{\iota}\ \acute{\alpha}\pi\tau\acute{\omicron}\mu\epsilon\nu\alpha\iota\ \alpha\lambda\lambda\acute{\eta}\lambda\omega\nu$? Croit-on par hasard qu'Euclide aurait voulu établir une opposition entre cette définition et celle du plan qui précède immédiatement, lequel $\acute{\gamma}\iota\tau\alpha\iota$, $\kappa\epsilon\acute{\iota}\tau\alpha\iota$, *entre ces droites*? Mais non; depuis Héron d'Alexandrie (*Traité de la Dioptré*,

[*] (Eucl., *Dat.* def. IV) : *Des points, des droites, des angles, sont dits donnés de position, lorsqu'ils occupent toujours le même lieu.*

Au reste, ce mot de *donné*, habituellement employé par Euclide, est loin de s'appliquer exclusivement à une *quantité*, à une *ligne*, données *à priori*; il signifie plus ordinairement encore que la quantité ou la ligne se trouve déjà connue ou *déterminée* par une opération ou par un raisonnement précédent. C'est ce qui résulte des définitions mêmes d'Euclide, de Pappus, de Proclus et de Marinus : $\Delta\epsilon\delta\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\alpha\ \tau\tilde{\omega}\ \mu\epsilon\gamma\acute{\epsilon}\theta\epsilon\iota\ \lambda\acute{\epsilon}\gamma\epsilon\tau\alpha\iota\ \dots\ \acute{\omicron}\iota\varsigma\ \delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\theta\alpha\ \gamma\alpha\rho\ \pi\omicron\rho\acute{\iota}\sigma\tau\alpha\sigma\theta\alpha\iota$ (Eucl., *Dat.* def. I), et ce qui, d'ailleurs, comprend quatre cas, savoir : donnés de *position*, de *rapport*, de *grandeur*, et de *forme* ou d'*espèce* (Procl. in *Euclid.*, p. 57; Barocc., p. 117).

dans les *Notices et Extraits des manuscrits*, t. XIX, 2^e part., p. 312, T. P., p. 156) jusqu'à Proclus, les géomètres grecs, pour indiquer la description d'une ligne, se servent constamment des expressions $\gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\epsilon\iota\nu$ ou $\gamma\epsilon\nu\gamma\acute{\alpha}\nu$ (Cp. Procl., in Eucl., p. 29, Barocc., p. 61), et non du mot $\alpha\pi\tau\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$.

D'ailleurs, il y a une preuve sans réplique que les mots $\acute{\alpha}\pi\tau\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$ $\delta\epsilon\delta\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\eta\varsigma$ $\gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\varsigma$ n'ont nullement le sens que M. Breton leur attribue, et qu'ils ne font, le cas échéant, que constater l'existence du lieu en vertu d'une démonstration analytique : cette preuve consiste en ce que l'*analyse* du problème, quand il s'agit d'une description effective, est toujours suivie d'une *synthèse* dans laquelle le lieu est véritablement décrit ; et que, pour lors, cette description est exprimée par le mot $\gamma\epsilon\gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\theta\omega$: c'est un fait dont peuvent se convaincre, en recourant au texte même de Pappus (*Lieux à la surface, Coniques*, etc.), ceux à qui resteraient quelques doutes sur ce point.

Ce n'est pas à dire pour cela que l'expression $\acute{\alpha}\pi\tau\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$, appliquée à un point, soit exclusive de tout mouvement, qu'elle exclue toute ligne décrite ou engendrée si la nature de la question comporte, explicitement ou implicitement, la variation du point ; mais ce n'est alors qu'un accident. Et fût-il vrai en fait (ce qui n'est pas) que le mot $\acute{\alpha}\pi\tau\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$ eût toujours ce sens dans Pappus, on ne serait pas en droit pour cela de remplacer, sans nécessité, le sens propre et primitif du mot, par un sens détourné qui peut conduire, et conduit en effet, à des idées totalement fausses. Il n'est d'ailleurs pas exact de dire que ce soit là avoir *deux langages différents*, puisque l'on ne fait que désigner, par une seule et même expression, une idée commune aux deux faits ; et surtout il n'en résulte pas davantage, comme M. Breton me le fait dire (II^e Supplément, p. 120, T. P., 32, 3^o) « que $\acute{\alpha}\pi\tau\eta\tau\alpha\iota$ a le même sens que $\delta\epsilon\delta\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\alpha\ \eta\ \acute{\iota}$ ». Où puis-je avoir dit qu'un point ne peut être sur une droite donnée de position sans être donné lui-même?... L'observation de M. Breton porte donc entièrement à faux ; et je me trouve forcé de dire que « certainement » c'est lui-même qui « se trompe ».

10. Ici se rattache la question du sens que présente l'énoncé du grand théorème interprété par R. Simpson, et d'après lequel les ima-

ginations ont tant travaillé. Eh bien ! après de nouvelles recherches, de nouvelles réflexions, et une nouvelle collation des manuscrits, je puis aujourd'hui l'affirmer, et j'en vais donner les preuves : *cette proposition n'appartient pas au livre des Porismes*.

En effet, voyons comment la mention de ce théorème est introduite dans la question des porismes. Après avoir parlé des diverses sortes de *lieux*, dont on a composé et publié des livres particuliers, les porismes proprement dits étant mis à part (*voir plus loin*, § III, Annot. I), Pappus parle des inconvénients que présente l'abréviation habituelle des énoncés, procédé auquel on est cependant presque forcé de recourir à cause de la multitude des propositions, dont il résulte que les géomètres se trouvent sans cesse exposés à prendre le change sur leur véritable sens. Cependant, reprend Pappus, « dans une semblable matière *il est bien agréable* » (*ἡδίστα* dans tous les manuscrits : c'est à tort que M. Breton écrit *ἡκίστα*, *très-difficile*), « il est bien agréable, » dit Pappus, de pouvoir comprendre beaucoup de choses en une seule proposition, par la même raison qu'Euclide, de son côté, n'a donné que peu de développement à chaque espèce ». Or il faut remarquer qu'ici se trouve *unanimentement un gros point* dans les manuscrits, et que, par conséquent, la phrase est complètement terminée. L'auteur continue, sans qu'il paraisse y avoir de lacune dans ce passage comme on l'a cru, mais seulement une ellipse : Ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα κ.τ.λ. Je pense toutefois qu'il y a lieu de lire *προσαρκεῖν* au lieu de *πρὸς ἀρχὴν* dont la prononciation est presque la même, et peut-être *δεδομένα* au lieu de *δεδομένον*, dont la sigle abrégative terminale aurait été mal lue [*]; je conserve ἐν ᾧ : et quant à la conjonction ἀλλά, elle est explétive. Je traduis, en conséquence, à peu près mot à mot : « Pour exemple d'une grande multitude dans laquelle il est très-suffisant que peu de choses soient données [nous citerons ceci] : il a » placé des propositions semblables du I^{er} livre, empruntées à cette

[*] A moins de supposer qu'il y avait *δεδομένον ἔστω ᾧ α̃ βιβλίου τίθεικεν*, ce qui est très-possible, *ἔστω* pouvant avoir été représenté, comme il arrive souvent, par un signe de convention que le copiste n'aura pas compris, et le pronom *α̃* ayant été absorbé par la sigle *α̃* (*πρώτου*).

- » espèce si féconde des Lieux, de sorte que leur nombre s'élève à 10.
- » C'est pourquoi, ayant trouvé admissible de les comprendre dans une
- » même proposition, nous avons résumé le tout comme il suit ».

Malgré la tournure elliptique de la phrase, il est bien clair que Pappus parle ici de l'espèce des Lieux, dont on avait composé des livres spéciaux : c'est donc évidemment du I^{er} livre des *Lieux plans* qu'il est question, d'autant plus que les mots *παρ' ἐκείνου τοῦ διαφιλεστέρου εἶδους τῶν τόπων* ne sont que la répétition des précédents *εἶδος ἐστὶν οἱ τόποι καὶ πλεονάζουσιν*.

En résumé, l'auteur avait besoin d'un exemple; il le prend où il le trouve. Il n'est ici nullement question des Porismes, dont le I^{er} livre, pas plus que les autres, ne contient rien que l'on puisse rattacher au théorème en question avec quelque apparence de bonne raison; et, ce qui permet de regarder comme très-probable que c'est du I^{er} livre des *Lieux plans* (et, par conséquent, des Lieux en général) qu'il s'agit dans ce passage, c'est que Pappus, arrivé aux lemmes des *Lieux plans* (voir *Command.*, p. 346), commence immédiatement par le second livre, en passant entièrement le premier sous silence. On peut donc croire que les 10 propositions résumées par Pappus dans son théorème, se rapportaient précisément au I^{er} livre des *Lieux plans*. Or, on voit sur-le-champ que ce résultat, une fois constaté, suffit pour faire prendre à la question une face toute nouvelle : car dès lors il n'existe plus aucune raison pour chercher à voir, dans les livres d'Euclide spécialement consacrés aux Porismes, des propositions du même genre que le théorème de Pappus.

Par suite, je n'ai donc plus, de mon côté, aucune raison de soutenir l'explication que j'avais donnée de cette proposition en la prenant, après tout le monde, pour un exemple de porisme. Je me réserve cependant de faire voir, quand j'arriverai au commentaire de ce passage, que mon interprétation, dans l'hypothèse du porisme, n'était pas aussi dépourvue de sens géométrique que l'on a bien voulu le dire.

11. Reste une dernière observation générale relative au reproche que m'adresse M. Breton, d'assimiler les porismes aux corollaires (Note 2^o). Or, il doit m'être permis de demander à mon savant adversaire pourquoi les Grecs n'auraient pas donné des dénominations diffé-

rentes à des propositions qui, suivant lui, sont de natures si diverses? La langue grecque était-elle donc devenue si pauvre dans la bouche des géomètres? M. Breton connaît aussi bien que moi l'origine latine du mot *corollaire* (ci-dessus, n° 7, p. 17): qu'il nous dise donc comment les Grecs nommaient le corollaire! Ne voit-on pas tout ce qu'il y a d'exorbitant à partager ainsi les propositions *uniformément nommées porismes*, *πορίσματα*, en deux catégories pleinement arbitraires, pour dépouiller l'une, non moins arbitrairement, du titre que lui donnaient les Grecs? N'est-ce pas comme si l'on disait: « Voici mon opinion sur » les porismes; tous les porismes qui y satisfont conserveront leur » titre; mais pour les autres, je les en destitue et veux qu'ils soient » dorénavant réduits à s'appeler corollaires »? Quelle théorie sérieuse, je le demande, pourrait-on établir sur de semblables procédés?

12. Enfin, toutes ces questions préliminaires étant vidées, il ne me reste plus qu'à donner une nouvelle traduction des passages de Pappus et de Proclus, refaite conformément aux observations que je viens d'exposer, et à la justifier dans un commentaire. Je ne mettrai point en regard de ma propre traduction, celle de M. Breton, surtout sa première rédaction: ce serait pour moi un avantage tout personnel que je ne rechercherai point. Mon seul but est de convaincre le lecteur que le vrai sens des textes de Pappus et de Proclus ne comporte *rien des idées de mouvement, de profonde invention*, etc., que l'on avait cru y apercevoir. Je ne m'appesantirai point sur les détails; je reconnais que M. Breton a raison dans plusieurs circonstances; et des *cinquante contresens* dont il se plaît (II^e Suppl., p. 2) à composer l'enjeu de la partie qu'il soutient contre moi, je consens volontiers à en prendre la majeure partie pour mon compte. Aussi remarquera-t-il que, pour éviter des discussions tout à fait secondaires, et je dirai même oiseuses, j'ai *laissé passer* sa traduction dans le plus grand nombre des cas. Mais je réclame la permission de me défendre sur les autres points, dussé-je m'y faire accuser d'un supplément de contresens. Le public compétent jugera en dernier ressort; et il trouvera, je l'espère, que si je ne suis point parvenu à lui faire comprendre ce qu'étaient les porismes, j'ai du moins montré clairement ce qu'ils ne pouvaient être.

§ II.

Traduction des textes de Pappus et de Proclus.

« Après les *Contacts*, dit Pappus (livre VII), il y a les *Porismes* d'Euclide en trois livres, recueil très-riche, et disposé avec beaucoup d'art pour la résolution des problèmes les plus difficiles considérés dans toutes les variétés (A), en nombre illimité, que présente leur nature. On n'a toutefois rien ajouté à ce qu'Euclide a écrit [sur ce sujet], si ce n'est que certains [géomètres] venus avant nous, ont, mal à propos, mêlé quelques doubles rédactions (B) parmi les siennes, chaque chose étant à la vérité susceptible d'un certain nombre de démonstrations, comme nous le faisons voir, mais Euclide ne donnant pour chacune d'elles qu'une seule explication qui en est l'expression la plus claire. La théorie en est fine et naturelle, et nécessaire à ceux qui savent voir et déduire des conséquences (*πορίζειν*). Leurs diverses espèces ne sont, quant à la forme, ni des théorèmes ni des problèmes, mais tiennent en quelque sorte le milieu entre les deux ; de telle façon qu'il est facultatif d'en mettre les énoncés sous la forme qui convient aux théorèmes aussi bien que sous celle qui convient aux problèmes (C) ; d'où il est résulté que, parmi beaucoup de géomètres, les uns estiment qu'elles appartiennent au genre des théorèmes, tandis que d'autres, ne tenant compte que de la manière de formuler les énoncés, les considèrent comme appartenant au genre des problèmes.

» Mais les différences entre ces trois choses ont été mieux connues des Anciens, ainsi qu'on le voit par leurs définitions : car ils disaient que le *théorème* est une chose proposée en vue de la *démonstration* de ce qui est proposé, que le *problème* est une chose proposée en vue de la *construction* de ce qui est proposé, et qu'enfin le *porisme* est une chose proposée en vue du *parti à tirer* (*πορισμός*, ci-dessus, n° 7) de ce qui est proposé (D). Cette définition du porisme a été changée par les Modernes, lesquels ne pouvant pas tout pénétrer (*ἅπαντα πορίζειν*) [pour aller au delà], mais se prévalant de ce qu'ils voyaient dans ces éléments [des porismes] et se bornant à y montrer la chose seule qui est demandée (*ὅ ἐστι τὸ ζητούμενον*) (E), mais sans aller plus loin (*μὴ πορίζοντων δε τούτο*), convaincus (F) par la définition [précitée] et par ce qui est en-

seigné, ont en conséquence écrit ceci, en s'arrêtant à une circonstance accessoire (G) : « Le porisme est ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse d'un » théorème local (H) ».

» Dans ce genre des porismes (I), les *Lieux* sont compris comme espèce; et ils abondent dans le livre nommé *Analyomène* ou *Répertoire d'analyse* (J). Ceux des porismes [qui ne sont pas des lieux] étant mis à part, on a réuni les autres sous des titres particuliers, et on les a donnés séparément, cette espèce étant beaucoup plus nombreuse que les autres. En effet, parmi les *Lieux* les uns sont *plans*, d'autres *solides*, d'autres *linéaires*, et il y a en outre ceux *aux moyennes*.

» Il arrive encore aux porismes ceci, de présenter des énoncés très-peu explicites où plusieurs choses sont ordinairement sous-entendues, ce qui est une cause d'incertitude (K); de sorte que beaucoup de géomètres ne saisissent qu'en partie ce dont il s'agit, et ce qu'il y a de plus essentiel leur échappe. Toutefois, dans une pareille matière [qui est si riche], il est bien agréable (ci-dessus, n° 10) de pouvoir comprendre un grand nombre de propositions dans un seul énoncé; et c'est par la même raison qu'Euclide n'a pas donné beaucoup de choses de chaque espèce. Pour exemple d'un cas où peu de paroles suffisent à exprimer un grand nombre de choses, [citons], au I^{er} livre [des *Lieux*], plusieurs propositions analogues entre elles appartenant à cette espèce si féconde, et dont le nombre s'élève à 10. C'est pourquoi, trouvant admissible de les comprendre dans un seul énoncé, nous avons résumé le tout comme il suit.

« Dans un système de quatre droites (L) telles, que deux d'entre » elles formant un angle, les deux autres se coupent dans l'intérieur » de cet angle ou à l'extérieur, ou bien soient parallèles, si trois de » leurs points d'intersection sont donnés sur l'une d'elles, ou deux » seulement sur l'une des droites parallèles dans ce dernier cas, et » que les points restants, un seul excepté, soient situés chacun sur » une droite donnée, ce dernier point sera également situé sur une » droite donnée. »

« Il ne s'agit ici que de quatre droites, telles que pas plus de deux ne se coupent en un seul point; mais ce que l'on ne sait pas, c'est que la même chose est vraie pour un nombre quelconque de droites, de cette manière : « Tant de droites qu'on voudra se coupant les unes » les autres, mais pas plus de deux en un même point, si tous les

» points où l'une d'elles est rencontrée par les autres, sont donnés, et
 » que chacun des points où l'une de ces dernières est coupée par l'une
 » des droites restantes, se trouve en même temps sur une droite don-
 » née.....; ou plus généralement : Tant de droites qu'on voudra se
 » coupant les unes les autres, mais pas plus de deux en un même
 » point, si tous les points où l'une d'elles est rencontrée par les autres,
 » sont donnés, et que parmi les points d'intersection de ces dernières,
 » lesquelles forment un nombre triangulaire, il s'en trouve autant si-
 » tués chacun sur une droite donnée, qu'il y a d'unités dans le côté
 » de ce nombre, de telle sorte que trois d'entre elles ne puissent abou-
 » tir aux angles d'un espace triangulaire [c'est-à-dire former un
 » triangle], chacun des points d'intersection restants sera pareillement
 » situé sur une droite donnée. »

» Il est vraisemblable que l'auteur des *Éléments* n'ignorait pas
 cette extension; mais il n'a prétendu que fixer un point du débat.
 Et il paraît avoir répandu dans tous ses porismes les principes et les
 germes seulement de nombreuses et grandes foules [de propositions].
 Il faut distinguer chacune [de ces foules] non pas par les différences des
 hypothèses, mais par celles des choses qui arrivent ou qui sont cher-
 chées (M). Or les hypothèses diffèrent toutes les unes des autres par
 des aspects très-divers; mais chacune des choses qui arrivent ou qui
 sont cherchées se présente unique et la même pour plusieurs hypo-
 thèses différentes.

» Voici en conséquence, pour le 1^{er} livre, le genre des choses
 cherchées dans les propositions (*voyez* la figure au commencement de
 ce livre, (N). « Si de deux points donnés on mène deux droites se cou-
 » pant sur une droite donnée de position, et que l'une d'elles retranche
 » d'une droite donnée de position un segment à partir d'un point
 » donné sur cette dernière, la seconde retranchera aussi sur une
 » autre (O) [droite donnée de position, à partir d'un point donné sur
 » cette droite], un segment qui sera au premier dans un rapport
 » donné. »

» Et ensuite [*] :

[*] Le lecteur doit comprendre qu'il nous est impossible de garantir l'exactitude
 parfaite d'une grande partie des énoncés qui suivent.

- » 1°. Que tel point est situé sur une droite donnée de position (P).
- » 2°. Que le rapport de telle droite à telle autre est donné.
- » 3°. Que telle droite est partagée dans un rapport d'apotome (Q).
- » 4°. Que telle droite est donnée de position (R).
- » 5°. Que telle droite passe par un point donné.
- » 6°. Qu'il y a un certain rapport entre telle droite et un segment compris entre tel point et un point donné.
- » 7°. Qu'il y a un certain rapport entre telle droite et un certain segment abaissé de tel point.
- » 8°. Qu'il y a un certain rapport entre tel espace et le rectangle qui a pour côtés une droite donnée et telle autre droite (S).
- » 9°. Que tel espace est [décomposable en deux parties dont] l'une est donnée et dont l'autre est [à la première] dans un rapport d'apotome.
- » 10°. Que tel espace pris seul ou avec un certain espace [est décomposable en deux parties dont l'une est donnée et dont] l'autre est [à un espace donné] dans un rapport d'apotome.
- » 11°. Que telle droite, plus une autre droite avec laquelle telle autre droite est dans un rapport donné, est elle-même dans un certain rapport avec un certain segment compris entre tel point et un point donné.
- » 12°. Que le triangle qui a pour sommet un point donné et pour base telle droite, est équivalent au triangle qui a pour sommet un point donné et pour base le segment compris entre tel point et un point donné.
- » 13°. Qu'il y a un certain rapport entre la somme de telle droite ajoutée à telle autre droite, et un certain segment compris entre tel point et un point donné.
- » 14°. Que telle droite détermine, sur des droites données de position, des segments qui comprennent un espace donné. »

» Dans le II^e livre, ce sont d'autres hypothèses. Quant aux choses cherchées, la plupart sont les mêmes que dans le premier livre; mais il y a de plus les suivantes :

- » 1°. Que tel espace, ou la somme de cet espace et d'un espace donné, est [partagé] suivant un rapport d'apotome.
- » 2°. Que le rectangle qui a pour côtés telle droite et telle autre droite est [partagé] suivant un rapport d'apotome.
- » 3°. Que le rectangle qui a pour côtés la somme de deux droites et la somme de deux autres droites est [partagé] suivant un rapport d'apotome.
- » 4°. Que deux rectangles, dont le premier est construit sur telle droite et telle autre droite augmentée d'une troisième droite qui est avec une quatrième dans un rapport donné, et dont le second est construit sur telle droite et telle autre droite qui est dans un rapport donné avec la précédente, forment une somme qui est partagée suivant un rapport d'apotome.

- » 5°. Qu'il y a un certain rapport entre la somme de deux droites [désignées] et une certaine droite comprise entre tel point et un point donné.
- » 6°. Que le rectangle de telle droite et de telle autre droite est donné.

» Dans le III^e livre, le plus grand nombre des hypothèses sont relatives au demi-cercle; quelques-unes regardent le cercle et les segments. Pour les choses cherchées, la plupart ressemblent aux précédentes; mais il y a celles-ci en plus :

- » 1°. Qu'il y a un certain rapport entre le rectangle construit sur telle et telle droite et le rectangle construit sur telles autres droites.
- » 2°. Que le carré construit sur telle droite est [partagé] suivant un rapport d'apotome.
- » 3°. Que le rectangle de telle droite avec une autre droite [est égal] au rectangle qui a pour côtés une droite donnée et le segment compris entre tel point et un point donné.
- » 4°. Que le carré construit sur telle droite [est égal] au rectangle qui a pour côtés une droite donnée et le segment déterminé, à partir d'un point donné, par une [certaine] perpendiculaire.
- » 5°. Que le rectangle construit sur la somme de deux droites d'une part, et d'autre part telle droite qui a un rapport donné avec telle autre droite, est lui-même [partagé] suivant un rapport d'apotome.
- » 6°. Qu'il existe un point donné tel que les droites menées de ce point à deux points donnés comprennent un angle donné d'espèce (T).
- » 7°. Qu'il existe un point donné tel, que les droites menées de ce point à deux points donnés interceptent des arcs égaux.
- » 8°. Que telle droite est parallèle à une certaine droite passant par un point donné, ou fait avec elle un angle donné (U). »

Tel est le passage que Pappus consacre à l'explication des Porismes d'Euclide, dans la préface du septième livre de ses *Collections mathématiques*, livre consacré spécialement au recueil nommé en grec soit *Τόπος αναλυόμενος*, soit simplement *Ἀναλυόμενος* [*], et en latin, suivant Commandin, *Locus resolutus*, ce que je crois pouvoir traduire en français par les mots *Lieux (communs) de l'analyse*, et non *Lieu résolu*, considérant le mot *ἀναλυόμενος* comme appartenant à la voix moyenne et non au passif.

Voici maintenant les passages extraits de Proclus.

[*] Voir ci-après l'annotation J.

Le premier ne contient que ces quelques mots [*] :

« *Porisme* se dit de certains problèmes tels que les *Porismes d'Euclide*; mais il se dit plus particulièrement lorsque, des choses que nous avons démontrées, il en surgit quelque autre qui est un théorème que nous n'avions pas énoncé et que pour cela on a appelé *porisme*, lequel est comme un gain accessoire qui vient s'ajouter à la démonstration scientifique (ὡςπερ τὸ κέρδος ὃν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πᾶρεργον). »

Voici maintenant le second passage, beaucoup plus long et plus important.

Il vient à propos de la proposition quinzième du premier livre des *Éléments d'Euclide*, établissant que : *Quand deux droites se coupent mutuellement, les angles opposés au sommet* [formés par leur intersection] *sont égaux entre eux*.

Euclide ajoute à ce théorème un *porisme* ou corollaire que Peyrard, dans son édition grecque-latine-française des *Éléments d'Euclide*, en trois volumes in-4°, a supprimé, et cela avec bien peu de raison, il faut le dire. Ce *porisme* consiste en ce que : *La somme des quatre angles* [formés dans la circonstance susdite] *est égale à quatre angles droits* [**].

« Le mot *porisme*, reprend Proclus en cet endroit [***], est un des » termes qu'emploie la géométrie; il a une double signification. On » nomme *porismes*, d'abord, des théorèmes qui se trouvent implicite- » ment préparés par la démonstration de quelques autres, et qui sont, » pour ainsi dire, des gains éventuels et des bénéfices dont on profite » en passant; en second lieu, des notions comprises implicitement dans » l'objet d'une question, mais où il y a cependant quelque chose de » particulier à trouver : de sorte qu'il ne s'agit, dans ce cas, ni d'une » construction proprement dite, ni d'une simple théorie (V).

» Par exemple, que *Dans les triangles isoscèles, les angles à la base*

[*] Procl. in Eucl., p. 58 et 59; Barocc., p. 121.

[**] Un peu plus loin, Proclus, dans son Commentaire, étend ce *porisme* à un nombre quelconque de droites issues d'un même point.

[***] *Ibid*, p. 80; Barocc., p. 173.

» *soient égaux*, c'est là simplement une affaire de théorie, et dont il
 » ne s'agit que d'acquiescer la connaissance, comme de toutes les choses
 » qui *sont*. D'un autre côté, la bissection d'un angle, la construction
 » d'un triangle, une addition ou une soustraction, tout cela n'exige
 » qu'une opération dont le but est déterminé. Mais au contraire, « Un
 » cercle étant donné, en trouver le centre [*] » ; ou bien : « Deux
 » grandeurs commensurables étant données, en trouver la plus grande
 » commune mesure [**] » : toutes les questions de ce genre tien-
 » nent, en quelque sorte, le milieu entre les problèmes et les théo-
 » rèmes [c'est-à-dire ne sont précisément ni l'une ni l'autre de ces
 » deux choses (W)]. En effet, ce ne sont pas ici des créations (X),
 » quoiqu'il y ait quelque chose à trouver ; et ce ne sont pas non plus
 » des théorèmes abstraits, puisqu'il faut offrir à la vue, représenter
 » devant les yeux, l'objet de la question (Y). Or, tel est le genre des
 » propositions nommées *Porismes*, et traitées par Euclide dans les
 » livres de *Problèmes* qu'il a composés ; mais il n'y a pas lieu de parler
 » ici de cette espèce de *porismes* (Z). Quant aux *porismes* contenus
 » dans les *Éléments*, ils se trouvent implicitement compris dans la
 » démonstration de quelques autres théorèmes et résultent de quel-
 » que recherche précédente. Telle est, par exemple, la proposi-
 » tion dont il s'agit. Il fallait établir que : *Quand deux droites se*
 » *coupent mutuellement, les angles [opposés] par le sommet sont égaux*.
 » Or, en même temps qu'on démontre cette vérité, on fait voir égale-
 » ment que les quatre angles sont égaux à quatre droits. Car lorsque
 » nous avons dit : « Soient les deux droites AB, CD, qui se coupent
 » au point E : puisque la droite AE rencontre CD, elle fait deux angles
 » adjacents égaux à deux droits » : en parlant ainsi, dis-je, nous
 » avons implicitement démontré (avec la proposition principale) que
 » les angles formés autour du point E sont égaux à quatre droits.
 » Le *porisme* est donc un théorème mis en évidence, sans intention
 » directe, dans l'exposition d'un autre problème ou théorème, et sur
 » lequel on tombe comme par hasard : car on ne l'avait point en vue

[*] Eucl., *Élé.* III, 1.

[**] *Ibid.*, X, 3.

» et on ne le cherchait point lorsqu'il s'est rencontré. Voilà pourquoi
 » nous avons assimilé les porismes à des profits éventuels : et telle est
 » sans doute l'origine du nom que leur ont donné les grands Mathé-
 » maticiens, voulant par là montrer au vulgaire toujours attiré par
 » l'appât du gain, que les Vérités sont des présents de Dieu et de véri-
 » tables épaves, mais non dans le sens où l'entend la foule; en effet,
 » c'est comme une plante dont le Génie du Gain a créé la racine en
 » nous-mêmes, et que la puissance génératrice de la Science fait fruc-
 » tifier, ajoutant ainsi aux produits précédemment acquis, de riches
 » moissons de théorèmes [*]. Telle est donc l'essence propre que l'on
 » doit attribuer aux *porismes*.

» Maintenant, il faut les diviser suivant les sciences auxquelles ils ap-
 » partiennent : car les uns se rapportent à la géométrie, les autres à
 » l'arithmétique. Ainsi, le *porisme* en question se rapporte à la géo-
 » métrie, et celui qui se trouve à la fin du second théorème (*lisez*
 » problème) du septième [livre, qui est le premier] des livres relatifs
 » aux nombres, celui-là se rapporte à l'arithmétique.

» Ensuite, quant à la nature des propositions antécédentes d'où dé-
 » pendent les porismes, ce sont, pour les uns des problèmes, et pour
 » les autres, des théorèmes; le présent porisme appartient à un théo-
 » rème; et celui qui se trouve annexé à la deuxième [proposition du
 » septième] livre, se rapporte à un problème [**].

» La troisième distinction concerne le mode de démonstration : car
 » les uns dépendent d'une démonstration directe, les autres d'une
 » réduction à l'absurde. Or, celui qui nous occupe dépend d'une
 » démonstration directe, et celui de la première proposition du troi-
 » sième livre est fondé sur la réduction à l'absurde [***].

[*] Il est bon de noter en passant les jeux de mots contenus dans cette phrase : ἡ μὲν Πόρος ἀπογεννᾷ.... εὐπορίας ἀφθόγους θεωρημάτων.

[**] La proposition consiste à *Trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres non premiers entre eux* : c'est donc un problème; et le porisme consiste en ce que *Tout nombre qui en divise séparément deux autres, divise aussi leur plus grand commun diviseur*.

[**] La proposition est de *Trouver le centre d'un cercle donné*; et le porisme consiste en ce que *La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite passe par le centre*.

» On peut encore, dit Proclus en terminant, diviser les *porismes* de
 » beaucoup d'autres manières ; mais les précédentes nous suffiront
 » pour le moment présent. »

§ III.

Annotations et commentaires sur les traductions qui précèdent.

(A) La transformation de *γενῶν* en *γενομένων* adoptée par M. Breton ne me paraît nullement justifiée. De plus, *γενῶν* est incontestablement régi par *πλῆθος ἀπερίληπτον* que ne précède aucune virgule.

(B) Le sens du mot *formule* est bien moderne pour permettre de supposer qu'il rendra exactement le mot *ῥαφή*. Je ne vois que les *proportions* (*ἀναλογίαι*) dont on puisse, dans les procédés de démonstration des Anciens, comparer la nature à ce que nous appelons *des formules*. Je crois qu'il s'agit ici des doubles et triples démonstrations que l'on trouve dans les divers écrits d'Euclide et des autres géomètres, démonstrations vraisemblablement dues pour l'ordinaire aux commentateurs, et qui s'annoncent par le mot *ἄλλως*.

Quant au fait signalé plus bas, que dans le deuxième livre des *Porismes*, beaucoup de choses sont les mêmes que dans le premier livre, et que dans le troisième beaucoup sont à peu près semblables, on peut se l'expliquer en songeant, par exemple, à la multitude des démonstrations relatives à la valeur du carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ; les unes sont fondées sur l'arithmétique, d'autres sur les propriétés des triangles ou sur la simple superposition, d'autres sur les propriétés du cercle, etc.

Or, on sait que la construction d'un problème de géométrie un peu compliqué, d'une *épure*, se décompose en un certain nombre de constructions élémentaires, telles, par exemple, que la détermination d'une quatrième, d'une moyenne proportionnelle, etc. (je me borne aux plus simples), et que suivant le cas, c'est-à-dire suivant l'état où l'exécution de la figure est déjà parvenue, suivant la disposition relative des lignes déjà placées, tel mode de construction élémentaire peut être très-préférable à tel autre ; et c'est à fournir une plus grande variété dans le choix de ces moyens de construction que le *Lieu commun des analyses* était particulièrement destiné. Aussi les mêmes résultats, les mêmes porismes se retrouvent-ils en une multitude d'endroits du septième livre de Pappus, considérés comme ne formant qu'un seul tout, et non pas seulement dans la partie qui appartient à Euclide. C'est certainement dans ce sens très-large qu'il faut entendre l'assertion de Pappus : qu'*Un grand nombre d'hypothèses différentes donnent lieu aux mêmes résultats*.

(C) Il est facile de concevoir comment les porismes pouvaient être présentés sous ces deux formes. Ainsi par exemple, si un porisme établit que *telle droite est troisième proportionnelle à deux droites données*, on pourra le présenter sous cette forme même qui

est celle d'un théorème, ou sous celle de problème en disant : *Construire* (par tel procédé, ou en vertu de telle propriété) *une troisième proportionnelle, etc.*

(D) C'est avec raison que M. Breton appelle particulièrement l'attention sur les définitions du *théorème* et du *porisme*. La chose qui frappe surtout en lisant ses Notes *i, j, k* (II^e Supplément), c'est de voir combien mon honorable contradicteur s'éloigne, dans sa définition du porisme, des principes que lui-même pose dans ces trois Notes. En effet, la définition du théorème et celle du porisme ne différant dans le grec que par un seul mot, il en doit être de même dans le français suivant les principes mêmes de M. Breton. Or, ma définition seule satisfait aux conditions ainsi posées, en remplaçant le mot *démonstration* par un équivalent d'*acquisition* ou *profit*. Quant à la justification de ce dernier mot, observons que, dans le théorème, il s'agit principalement de *démontrer* une vérité qui jusque-là était inconnue, tandis que dans le porisme, il suffit de la *constater* en passant, afin de pouvoir s'en servir au besoin : car pour son évidence, elle est censée résulter de celle de la proposition principale à laquelle le porisme se rattache.

(E) Ὁ ὅστις τὸ ζητούμενον me paraît être une formule terminale et conclusive de la solution des problèmes, analogue à ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, de même que ὅπερ ἔδει δεῖξαι est la formule conclusive des théorèmes. Ainsi, les géomètres qui manquaient de sagacité, arrivés à la conclusion ὁ ὅστις τὸ ζητούμενον, s'arrêtaient là sans chercher plus loin ; mais les habiles, τοῦτο πορίζοντες, examinaient s'il n'y avait pas quelque chose à remarquer et à déduire. (Voyez ci-après l'annotation M.)

(F) Ἐλεγχόμενοι, *convaincus* ; il m'est impossible de reconnaître à ce mot une autre signification. Les géomètres modernes dont il s'agit se conformaient à la définition précitée, en faisant ressortir des conséquences qui n'avaient pas besoin de démonstration spéciale. (Voyez ci-après l'annotation I.)

(G) Τὸ συμβεβηκός, *l'accident*, par opposition soit à ἀναγκαῖον, le *nécessaire*, soit à ὑποκείμενον, le *sujet*, soit encore à οὐσία, l'*essence*, conformément aux doctrines aristotéliques. (Voyez ci-après l'annotation M.)

(H) *Ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse d'un théorème local, et non pas ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse* pour que celle-ci devienne l'énoncé d'un *théorème local*.

Quoi qu'en dise ici (Not. u) M. Breton, il y a une différence capitale entre ces deux interprétations ; et je repousse formellement celle de mon honorable adversaire, bien qu'il dise, à la phrase suivante (sans doute par l'effet de quelque *lapsus*), que je n'élève aucune objection contre cette interprétation.

D'abord, qu'entendaient les Anciens par un *théorème local* ? c'est ce que Proclus explique à l'occasion de la proposition 36 du premier livre d'Euclide [*], consistant en ce que *Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes*

[*]. Procl. in Eucl.; p. 103; Barocc., p. 237.

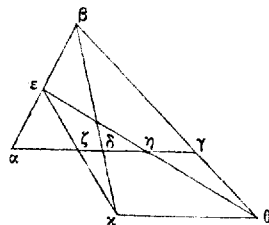
parallèles, sont équivalents en surface. « L'espace compris entre deux parallèles, dit Proclus, est le lieu des parallélogrammes équivalents qui sont construits sur la même « base [*] ». Le même auteur donne un second exemple de lieu géométrique : c'est celui du segment de cercle (non de l'arc, qu'on le remarque bien), segment qui est le lieu des angles égaux, comme par exemple le demi-cercle est le lieu des angles droits. Nous aurons occasion de revenir plus loin sur cet exemple (Annot. T et U).

On reconnaîtra sans peine que cette notion antique du *lieu géométrique*, analogue à l'idée que les Modernes attachent à la même expression, en diffère cependant d'une manière essentielle. Or, il me paraît évident que l'idée moderne, substituée à l'idée ancienne, n'a pas peu contribué à obscurcir la véritable et simple notion des porismes, comme tout l'ensemble de cette Notice le fait voir.

Pour en revenir à la discussion rapportée par Pappus, on voit ce que signifient ces expressions : « Ce qui manque à l'hypothèse d'un théorème local... ». Dans le cas du parallélogramme, il manque, soit son sommet, soit l'inclinaison des côtés sur la base, conditions nécessaires pour faire disparaître l'indétermination. Dans le segment capable d'un angle donné, il manque de même, soit le sommet de cet angle, soit la direction d'un côté, etc.

Maintenant, je vais justifier mon mot-à-mot. Je prends pour exemple la proposition que je considère comme étant précisément l'énoncé du premier lemme donné par Pappus dans les termes suivants, savoir :

« Soit la figure $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta$, et soit $\alpha\zeta:\zeta\eta::\alpha\delta:\delta\gamma$. Joignez $\theta\alpha$. Je dis que $\theta\alpha$ est parallèle « à $\alpha\gamma$. »



La démonstration est inutile ici ; mais il est important de compléter l'énoncé. Pappus a l'habitude, très-fâcheuse pour nous, de donner les figures sans explication suffisante, comme parlant à des gens qui les avaient sous les yeux et connaissaient les hypothèses d'après lesquelles elles étaient construites. C'est encore là, pour le dire en passant, une des grandes causes de l'obscurité qui règne dans le style de cet auteur. Je reprends l'explication de la figure et l'énoncé complet du lemme.

[*] Ce lieu faisait en même temps partie du nombre des lieux dits *paradoxaux* ou prodigieux : le paradoxe actuel est pour la géométrie, ce que le paradoxe dit *hydrostatique* est pour la mécanique.

« Soit un triangle quelconque $\alpha\beta\gamma$: je mène par le sommet β une droite quelconque $\beta\delta$
 » (que je prolonge ainsi que le côté $\beta\gamma$) ; le rapport $\alpha\delta : \delta\gamma$ se trouve ainsi déterminé. Je
 » prends sur le côté $\alpha\gamma$ deux points ζ, η , tels que l'on ait la proportion $\alpha\zeta : \zeta\eta :: \alpha\delta : \delta\gamma$.
 » D'un point quelconque ε pris sur le côté $\alpha\beta$ je mène les droites $\varepsilon\zeta, \varepsilon\eta$, que je prolonge
 » jusqu'à leurs points respectifs de rencontre, κ avec $\beta\lambda$, θ avec $\beta\gamma$. Je mène $\theta\kappa$; et je
 » dis que cette droite est parallèle à $\alpha\gamma$. »

(Nous voyons d'abord ici un exemple de théorème *local*, puisque tous les points de la droite $\alpha\beta$ jouissent de la propriété énoncée, et qu'ainsi cette ligne est le lieu du point ε . Mais il ne s'agit en aucune manière de chercher ce lieu puisque la figure est donnée, malgré l'absence d'un énoncé complet.)

Cela posé, le parallélisme des droites $\alpha\gamma, \kappa\theta$, entraîne la proportion $\beta\delta : \beta\gamma :: \delta\kappa : \gamma\theta$; or, cette proportion n'est autre chose que le porisme également donné par Pappus, en ces termes (je ne fais qu'ajouter les lettres) :

« Si de deux points donnés $[\zeta, \gamma]$ on mène deux droites $[\zeta\varepsilon, \eta\varepsilon]$ se coupant sur une
 » droite $[\alpha\beta]$ donnée de position, et que l'une d'elles $[\zeta\varepsilon]$ détermine sur une droite $[\alpha\delta]$
 » donnée de position, un segment $[\delta\kappa]$ mesuré] à partir d'un point $[\delta]$ donné sur cette
 » dernière, la seconde droite $[\eta\varepsilon]$ déterminera aussi sur une autre droite $(*)$ $[\beta\gamma]$ don-
 » née de position, à partir d'un point $[\gamma]$ donné sur cette droite, un segment $[\gamma\theta]$ qui
 » sera au premier dans un rapport donné, [le même que celui des longueurs $\beta\delta, \beta\gamma]$. »

Observons maintenant que si l'on se donne la valeur de l'un des termes du rapport $\delta\kappa : \gamma\theta$, l'autre terme sera connu : et c'est ainsi que le porisme aura ajouté ce qui manquait à l'hypothèse du théorème local.

Le porisme suivant consiste en ce que, si le rapport $\alpha\zeta : \alpha\eta$ est égal au rapport donné $\alpha\delta : \alpha\gamma$, le point ε est situé sur $\alpha\beta$.

Le porisme suivant serait que, si ε est sur $\alpha\beta$, le rapport $\alpha\zeta : \alpha\eta$ est donné.

Etc., etc. — (Voir ci-après l'Annotation T.)

(I) L'article $\tau\acute{\omega}\nu$ donne lieu à une conséquence qui est ici de la plus grande importance ; car il exige impérieusement que la traduction dise (avec l'article) : *des porismes*, comme je l'avais écrit, et non *de porismes* comme M. Breton le soutient avec insistance. Il ne s'agit pas d'un genre de porismes, mais des Porismes considérés comme formant un genre parmi les diverses sortes de propositions ; et dans ce genre (c'est-à-dire dans le genre des Porismes), les Lieux sont une espèce. Mais cette espèce, celle des *porismes-lieux*, est très-nombreuse, puisqu'il y a les variétés diverses des *lieux-plans*,

[*] Je ne fais aucune difficulté de reconnaître que dans ma Seconde Notice (Journal *La Science*, p. 188, col. 1^{re} : T. P. p. 13), en prenant les points κ, θ , au lieu des points ζ, η , pour interpréter ce porisme, j'avais obtenu un résultat moins satisfaisant, puisqu'à la place des deux droites $\beta\delta, \beta\gamma$, qu'exige l'expression $\delta\pi\theta$ $\acute{\epsilon}\tau\acute{\epsilon}\rho\alpha\varsigma$, je n'en considérais qu'une. Je reconnais également que M. Breton avait donné l'explication ci-dessus (que je lui emprunte en corrigeant la mienne) ; mais je l'avais cherchée dans un endroit, et elle était dans un autre. Quant à la conclusion que M. Breton tire de cette inadvertance, en affirmant que *je n'ai pas lu son travail*, je n'ai pas le droit de dire qu'il y a ingratitude de sa part puisque les apparences sont ici contre moi ; mais voyez ci-dessus le § I.

des *lieux-solides*, etc. C'est pourquoi, après avoir mis à part les Porismes qui ne sont pas des Lieux, on a pu faire avec les autres des *lires distincts*; d'où il résulte qu'Euclide n'avait plus à traiter que des Porismes qui ne sont pas des Lieux; voilà évidemment la suite logique du discours: car, à quoi bon faire ici l'énumération des diverses sortes de Lieux, si ce n'eût été pour faire voir combien ils sont nombreux?

Ces remarques n'empêchent pas que l'on ne puisse trouver des Lieux dans les Lemmes d'Euclide, en y faisant varier certains points, certaines lignes; mais ceci n'est qu'accidentel. Et que l'on n'oublie pas d'ailleurs que dans le langage des Anciens, le mot *lieu* désigne simplement un théorème indéterminé, mais nullement une description (*voir*, plus haut, Annotation H).

J'ai donc dû amender la traduction de M. Breton et la mienne, d'abord en admettant ce sens: que *les lieux abondent*, et non que *les porismes abondent* comme je l'avais écrit d'abord; et ensuite en mettant au pluriel les mots *titres particuliers* qui se rapportent aux livres intitulés *Lieux plans*, *Lieux à la surface*, etc.

C'est ici que se présente l'occasion et la nécessité de me justifier des erreurs que M. Breton [*] m'accuse d'avoir commises, « non-seulement sur le sens de ces divers » détails relatifs aux *lieux*, mais aussi, et *très-complètement*, dans tout ce que j'ai dit » du VII^e livre de Pappus ». « Je prends même (tant M. Breton m'accorde ici de sagacité), » je prends les 38 lemmes relatifs aux *porismes* pour une analyse développée des trois » Livres de Porismes composés par Euclide. »

Obligé ainsi de me mettre sur la défensive, je me suis empressé de rechercher dans mes deux Notices, où et comment j'avais pu émettre de pareilles énormités. Or voici ce que j'ai trouvé: d'abord p. 11 de ma première Notice (n^o 10 de *La Science*, p. 888, » col. 1): que « le recueil dont le VII^e livre présente le *résumé* (ce qui est tout le con- » traire d'une analyse développée), porte un titre qui signifie *répertoire d'analyses*, etc. Mais que ressort-il de là, si ce n'est que les 38 lemmes de Pappus contiennent la substance, *non l'analyse développée* du Traité d'Euclide? En second lieu, j'ai parlé, il est vrai (*Ibid.* p. 886, col. 2. T. P. p. 6), d'une « analyse développée que Pappus donne *plus loin*, » des trois livres de porismes composés par Euclide »; mais plus loin que quoi? réponse: plus loin que le mot *ἀναλυόμενος* appartenant au titre du livre, mot que je venais de traduire. Avec un peu d'attention, M. Breton aurait vu qu'il ne s'agit nullement ici des 38 lemmes de Pappus, mais de l'analyse des trois livres de Porismes, traduite par Commandin, aux pages 244-247, sous la rubrique *De porismatibus*. J'aurais pu supprimer, il est vrai, le mot *développée*;... mais en voilà beaucoup trop sur ce sujet:

Hanc veniam petimusque damusque vicissim.

Quelques-unes des critiques de M. Breton sont mieux fondées; et je m'empresserai toujours d'en reconnaître la justesse quand il y aura lieu. C'est ainsi que je rétracte la

[*] Dans sa Note (*) afférente à l'Annotation β' (où elle est marquée de deux astérisques au lieu d'un seul).

proposition que j'avais faite d'intercaler la conjonction καὶ entre les mots λήμματα et τὰ ζητούμενα, et cela, par une raison que l'on verra plus loin (Annot. M).

(J) M. Breton me reproche ici de supposer que τόπος est sous-entendu devant ἀναλυόμενος. Cependant j'avais beaucoup insisté dans ma Seconde Notice, sur cette circonstance, que le mot ἀναλυόμενος se trouve ordinairement seul dans Pappus. Ainsi, par exemple, après le titre du VII^e livre se trouve cette annotation : περιέχει δὲ λήμματα τοῦ ἀναλυομένου : *ce livre contient les lemmes de l'Analyomène* ; puis alors le VII^e livre commence ainsi : Ὁ καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν, κ.τ.λ. : « *Ce que l'on nomme Analyomène, Hermodore mon fils, par une sorte de syllepse* [*], » est une matière propre, préparée à la suite des Éléments communs, pour ceux qui » veulent acquérir, dans les figures, la faculté inventrice des problèmes qui leur sont » proposés ; et c'est pour cet usage seul qu'elle a été établie. Ce recueil a été composé » par trois écrivains différents, savoir : Euclide, l'auteur des Éléments, Apollonius » de Perge, et Aristée l'ancien. On y procède par voie d'analyse et de synthèse, etc. » (Voyez ci-dessus, § II, p. 23.)

(K) Voici, je pense, la véritable origine de ce mot. D'après le témoignage de Plutarque [**] et de Suidas [***], le σκολιὸν était une chanson de table que l'on chantait à la ronde et à tour de rôle ; et les convives se passaient de main en main une branche de myrte que chacun gardait pendant tout le temps que durait sa chanson. Par analogie, lorsqu'un certain nombre d'énoncés présentaient des parties communes, quand ces parties communes avaient été dites une fois, elles étaient censées se transmettre à l'énoncé suivant. Le mot σκολιότης, formé d'après les règles ordinaires de la dérivation des mots grecs, m'a paru rendre très-bien cette transmission.

(L) Ayant annoncé que dans le cas, peu probable cependant, où l'on se refuserait à reconnaître la proposition de Pappus comme étrangère au livre des Porismes, je reproduirais l'interprétation que j'en avais donnée pour cette hypothèse, je vais l'exposer ici.

« Soit A, B, C, D, E, F (Seconde Notice, *La Science*, p. 181, col. 1^{re} : T. P. p. 5), » la figure en question : soient donnés les trois points A, B, C, situés en ligne droite, » ainsi que les droites AD, BE, sur lesquelles doivent se trouver respectivement les » points donnés D, E : je dis que le point F sera aussi sur une droite donnée. »

Le sens de la proposition ainsi énoncée et interprétée, serait tout simplement que

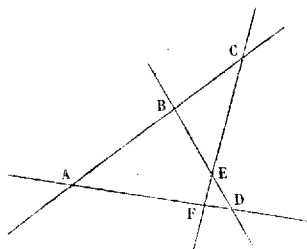
[*] La version de Commandin : *ut summam dicam...*, ne rend pas le grec : la syllepse porte sur le mot ἀναλυόμενος et non sur le discours général de Pappus. La syllepse consiste en ce que l'expression ἀναλυόμενος suppose un mot sous-entendu. Que ce mot soit τόπος, cela est plus que vraisemblable, vu qu'on le rencontre quelquefois ainsi employé ; mais ἀναλυόμενος seul, avec le même sens, est une locution reçue, conforme à l'usage, et qui doit être considérée comme complète et se suffisant à elle-même.

[**] Sympos. I, quæst. 1, p. 615 B.

[***] V. Σκολιότης.

cinq points du quadrilatère déterminent le *sixième* (sous certaines conditions), ce que l'on ne voit pas sur-le-champ, et ce que, par conséquent, on peut se proposer de démontrer. Or, voici la démonstration :

Soient A, B, C, AD, BE [*], les trois points et les deux droites qui sont donnés, etc.



D'abord, le point D d'intersection des deux droites étant nécessairement l'un des points restants, il est nécessaire de stipuler à laquelle des deux droites on l'attribue : soit AD cette droite. Alors il reste à donner le point E sur BD. Cela fait, menons CE ; cette droite, par son intersection avec la droite AD, déterminera le point F : c'est ce qu'il fallait démontrer.

Si « le sentiment des choses géométriques repoussait mon interprétation », comme l'affirme M. Breton, il faudrait, pour être conséquent, refuser aussi ce sentiment à Euclide lui-même, au sujet de certaines propositions du livre des *Données*, qui sont d'une *simplicité* tout aussi *triviale*, et à propos desquelles cet illustre Maître des Modernes ne s'épargne pas les frais de démonstration.

Par exemple (Prop. 1) : *Étant données deux grandeurs, leur rapport est donné.* — (Prop. 25) : *Si deux lignes données de position se coupent mutuellement, leur point d'intersection est donné.* — (Prop. 26) : *Si les extrémités d'une ligne droite sont données de position, la droite est donnée de position et de grandeur.*

Quant à la proposition relative au quadrilatère, entendue comme je viens de l'expliquer, ce serait un simple corollaire de la proposition 25 : M. Breton lui-même en a fait la remarque (II^e Supplément, p. 119, ou T. P., p. 31) ; dès lors, comment a-t-il pu en conclure que mon interprétation était erronée ? c'est ce qu'il ne m'est pas possible de comprendre [**].

L'explication que j'avais donnée du lemme généralisé est analogue à la précédente. Mais comme, en tout état de cause, la solution de la question générale des porismes ne dépend nullement de ce lemme, et que d'ailleurs la question elle-même a totalement changé de face par suite des observations qui précèdent (*ci-dessus*, § I, n^o 10), je me

[*] Dans l'explication de la figure, page 11 de ma Seconde Notice (*La Science*, p. 187, col. 2), il y avait erreur de lettres.

[**] Je ne comprends pas davantage comment mon interprétation du lemme généralisé tombe en défaut lorsqu'on se borne à la première hypothèse, celle où il n'est pas question de nombre triangulaire : comme si les deux énoncés ne se réduisaient pas à un seul ! Seulement, la première forme est tronquée et la seconde est complète, *καθολικώτερον* : c'est toute la différence.

contenterai, pour le théorème généralisé, de renvoyer au journal *La Science* (p. 181, col. 2, et 187, col. 2; 2^e Notice, T. P., p. 7 et suiv.), où j'ai développé mon explication [*].

Avant de terminer ce qui est relatif à ce théorème, je ferai observer que le mot *δέκα* pourrait bien indiquer 10 livres de lieux; car plus haut, après les mots *τῶν γούν τόπων ἐστίν*, il y a aussi, dans les manuscrits, le mot *δέκα*, que M. Breton a supprimé. Or, dans l'analyse de l'*Ἀναλλόμενος*, Pappus n'en a mentionné que 9; mais ici se trouve signalée une nouvelle espèce, à *δὲ γραμμικῶν*, dont il n'avait point été question. S'il y avait un livre de *lieux linéaires*, cela fait 10 livres en tout: c'est peut-être ce nombre qui est mentionné aux deux endroits cités.

(M) Pour comprendre le véritable sens de cette phrase, il faut voir ce que signifient les mots *ὑπόθεσις*, *ζητούμενα*, *συμπεσέσθαι*. Or, nous trouvons dans Proclus (*in Eucl.*, p. 56; Barocc., p. 116): 1^o que « Tout théorème et tout problème complet se compose de ces 6 parties, la proposition, l'exposition, la détermination, la construction, la démonstration, et la conclusion »; 2^o que « La proposition (c'est-à-dire l'énoncé) dit ce qui est donné et ce qui est cherché, parce que toute proposition parfaite présente ces deux choses: ἡ μὲν πρότασις λέγει τίνος δεδομένου, τί τὸ ζητούμενον ἐστίν. ἡ γὰρ τελεία πρότασις ἐξ ἀμφοτέρων ἐστίν ».

Par exemple, dans le théorème I^{er}, que *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux paires de côtés égaux chacun à chacun, ainsi que les angles compris*, les choses données sont l'égalité des deux paires de côtés et celle des angles compris, et les choses cherchées sont l'égalité des bases, celle des angles adjacents à ces bases, et enfin celle des triangles.

Il n'y a donc aucune incertitude sur le sens du mot *ζητούμενον*: il représente l'objet de la conclusion; et c'est ainsi, par exemple, qu'au lemme VI^e de la section déterminée, la conclusion est suivie de ces mots: *τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν* (voyez ci-dessus, Annotation E). Ceci est d'ailleurs confirmé par l'expression *λήμματα τὰ ζητούμενα* employée par Pappus, et d'où il résulte que les choses cherchées dans les lemmes sont identiques avec ces lemmes eux-mêmes.

Quant au mot *ὑπόθεσις*, c'est-à-dire à l'hypothèse, il est ici évidemment synonyme de *δεδομένον*, la chose donnée: car, d'après Aristote (*Anal. prior.* I, text. 25), « L'hypothèse est une proposition que l'auditeur accorde sans contestation à celui qui l'a mise en avant » (Cp. Procl. *in Eucl.*, p. 22, et Barocc., p. 44); et même, dans la géométrie moderne, nous n'avons pas d'autre manière de nous exprimer: c'est-à-dire que

[*] Toutefois je ferai observer que les manuscrits donnent *ἄν τριῶν* et non *τρια* comme l'a écrit M. Breton [p. 4 (92) des *Recherches nouvelles*], en affirmant [*ibid.*, p. 7 (95)] que le sens exige *τρια*, ce qui prouve seulement qu'il n'avait pas entendu le texte comme moi: c'est tout ce que j'ai voulu dire (*La Science*, p. 187, col. 1: T. P. p. 19); mais je m'étais mal exprimé. Il est vrai que moi-même j'ai proposé de lire *ὑπερχουσῶν* au lieu de *ὑτάρχον*: mais le texte, évidemment corrompu en cet endroit, est ici livré aux conjectures.

« l'énoncé de tout théorème se compose de l'hypothèse et de la conclusion ».... Est-il besoin d'insister là-dessus ?

Reste le mot *συμβεβηκότα* (voir plus haut l'Annotation G). Or, l'emploi parallèle des deux expressions *τῶν συμβεβηκότων καὶ ζητούμενων* (et plus loin, *τῶν δὲ συμβαινόντων καὶ ζητούμενων*), mises en opposition, dans toutes les circonstances, avec *ὑποθέσεις*, fait voir que les choses qualifiées *ζητούμενα*, et les choses qualifiées *συμβεβηκότα*, ont cela de commun, d'être les unes et les autres des *résultats*; mais que les *συμβεβηκότα* sont des résultats *non demandés*, c'est-à-dire qui se présentent à l'aventure et sans être attendus. Cela, d'ailleurs, est conforme à la signification propre du mot *συμβεβηκός* (en latin *accidens*), et conduit en outre à cette conséquence très-importante, que la matière des porismes se trouve exclusivement dans les *συμβαίνοντα*, nullement dans les *ζητούμενα* proprement dits. C'est là un point sur lequel je regrette de me trouver en complet désaccord avec M. Breton dans sa Note (v'); et de là résulte, pour le dire en passant, que les *συμβεβηκότα* sont en quelque sorte une subdivision des *ζητούμενα*, et nullement des *ὑποθέσεις*. En d'autres termes, le *συμβεβηκός* est un supplément du *ζητούμενον*, lequel supplément correspond au *πόρισμα* considéré comme étant, de son côté, un supplément de l'*ὑπόθεσις*, ou plutôt de la *πρότασις* complète. Quant à la démonstration du *πόρισμα* ou du *συμβεβηκός*, elle est implicitement comprise dans celle de la *πρότασις* ou du *ζητούμενον* [*]. (Voyez plus haut, Annotation D.)

Enfin, on voit ici pourquoi les résultats *συμβεβηκότα* sont les mêmes pour plusieurs hypothèses différentes : car c'est ainsi, pour expliquer la chose par un exemple, que si l'on veut avoir, dans une figure, une droite *troisième proportionnelle* à deux droites données, on pourra faire dépendre la longueur cherchée, soit de la théorie des *triangles semblables*, soit de celle du *triangle rectangle*, soit de celle du *cercle*, etc., etc., et cela de diverses manières dans chaque cas.

(N) Je suppose qu'il y avait primitivement : *ἐν ἀρχῇ μὲν τούτου [βιβλίου] ζήτην τὸ διαγρῆμα* : *cherchez la figure au commencement du livre*. On sait que l'abréviation ζ pour *ζήτην* est usitée.

(O) M'étant expliqué plus haut (Annot. H) sur l'objet principal de la Note (z') de M. Breton, je n'ai point à y revenir ici, si ce n'est pour témoigner de nouveau mon étonnement de voir mon honorable adversaire supposer que j'abandonne mon interprétation. Il y a sans doute ici quelque malentendu.

(P) Je ne comprends pas davantage comment M. Breton peut prétendre que « ce » porisme est conçu dans des termes qui impliquent l'idée de mouvement ». (Voyez, à ce sujet, tant le § I que l'Annotation H.)

[*] La définition blâmée par Pappus serait donc plus exactement exprimée, à mon sens, si l'on disait que le *porisme est ce qui manque au théorème local, par suite de ce qui manque à son hypothèse*.

(Q) L'observation de M. Breton sur la manière dont j'avais traduit *ἀποτομή* est très-fondée, et la raison pour laquelle j'avais hésité à adopter la définition d'Euclide ne l'est point [*].

Il s'agit de reconnaître qu'une ligne peut être exprimée par une formule telle que $a - \sqrt{b}$, ou, plus spécialement, qu'elle peut satisfaire à l'équation

$$a - b\sqrt{2} = c;$$

car alors c sera une *ligne apotome*. Ce cas ne peut avoir lieu sans que l'on ait en même temps

$$a = c + b\sqrt{2},$$

c'est-à-dire sans que a soit une *ligne binome*. Les deux cas vont donc toujours ensemble; et, par conséquent, il n'y a point à s'étonner de voir toujours citer la ligne apotome et jamais la ligne binome.

Il s'agit donc, ai-je dit, de trouver dans les démonstrations des lemmes de Pappus, quelque relation équivalente à celle-ci :

$$a - b\sqrt{2} = c,$$

d'où

$$(a - c)^2 = 2b^2.$$

Or, on rencontre en effet, dans ces démonstrations, nombre d'équations susceptibles d'être identifiées à cette dernière : elles sont faciles à trouver dans les *Recherches nouvelles*, sans que j'aie besoin d'en faire aucune citation particulière.

L'exactitude de l'explication que je viens de donner ici peut d'autant moins être mise en doute, que le mot *ἀποτομή*, employé dans le même sens que chez Euclide, appartient certainement à la langue de Pappus (voyez, par exemple, livre IV, théor. III).

(R) Je rétablis le sens du mot *θέσις*, que M. Breton change sans aucune espèce de motif valable, et cela de son propre aveu. En effet, d'après sa déclaration (*Comment.*, § XIV), s'il fait ce changement, c'est afin de ne pas « admettre parmi les porismes une » proposition de l'espèce de celles qui font l'objet des *Données* d'Euclide », et ensuite parce que, toujours d'après M. Breton, « les énoncés ou les hypothèses des questions » traitées par Euclide roulaient *exclusivement* sur des figures *variables de forme* suivant « certaines conditions ». Or, c'est ce que je nie formellement, et ce qui, de la part de M. Breton, est une véritable pétition de principe, comme il résulte de notre § I^{er}, n° 9 (ci-dessus, p. 18).

[*] Voir dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (17 octobre 1853) le *Rapport* de M. Chasles sur un *Mémoire* de M. Wæpcke relatif aux *Travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles*, etc.

(S) M. Breton déclare, dans sa Note (f''), que, d'après mon observation, il a remplacé le mot *rectangle* par le mot *espace*, comme l'exige le mot $\chiωρίον$.

Par compensation il me reproche, et ceci avec raison, d'avoir confondu deux énoncés différents d'Apollonius. Ce malentendu, dont je me reconnais le seul coupable, étant ainsi rectifié, il devient inutile d'insister sur ce point [*].

(T) « Rien dans le texte, dit ici M. Breton, ne signifie que les droites dont il est « question dans ce porisme, et qui sont menées d'un point donné, doivent aboutir » à deux points donnés. »

Cependant, 1° M. Breton doit admettre que le point B est *donné*, puisque cela est dans le texte; 2° M. Breton considère les deux points B et C comme jouant le même rôle, puisqu'il les appelle *deux points variables*: donc 3° le point C est aussi *donné*.

En d'autres termes, M. Breton reconnaît, par sa traduction même, qu'il faut mener deux droites d'un point (A) à deux autres points (B, C). Il reconnaît implicitement, par là, que le texte est incomplet, et qu'au lieu des simples mots $τόδε δόθεν$, il faut suppléer $τόδε δόθεν σημείον, καὶ ἕτερον τόδε δόθεν σημείον$, c'est-à-dire qu'il existe un point donné (A) tel que les [deux] droites menées de ce point donné, l'une au point donné (B), [l'autre au point donné (C)], comprennent un angle donné d'espèce.

Cela posé, comment M. Breton peut-il appeler *variables* les deux points donnés B et C, lorsque partout ailleurs il traduit $δόθεν$ par *constant*? c'est ce que je ne puis m'expliquer.

Je suis donc obligé de m'arrêter un instant ici et d'insister sur ce passage, d'autant plus qu'aucun autre, à mon avis, n'est plus capable de mettre dans tout son jour l'inadmissibilité du système de M. Breton.

En effet, le lemme XXIX de Pappus est un problème qui s'énonce ainsi : *Un segment de cercle étant donné, γ inscrire un angle dont les côtés soient entre eux dans un rapport donné* (*Journal de Mathématiques*, t. XX, p. 239; *Recherches nouvelles*, p. 31; — et t. III, 2^e série, p. 133; II^e Supplément, p. 46). Et, à ce sujet, M. Breton pose la question suivante : « M. Vincent suppose-t-il que la question à résoudre (dans le 6^e porisme) est celle-ci : *Sur une droite donnée construire un triangle donné?* »

Je réponds, de mon côté, par la question suivante : « M. Breton suppose-t-il qu'il » se puisse agir d'autre chose? » en ce cas il aurait dû le dire, à défaut de quoi je suis obligé de raisonner dans l'hypothèse qu'il m'attribue avec raison, puisque c'est la seule admissible.

Dès lors, quoi de plus naturel que de considérer le 6^e porisme du III^e livre comme donnant la solution de la question posée par M. Breton? Est-il possible même de le considérer autrement?

[*] Le *post-scriptum* de ma Seconde Notice avait pour but cette rectification; il a été rédigé à la hâte et l'épreuve non corrigée, comme il est facile de le constater. Le mode de publication du journal *La Science* rend parfaitement compte d'une semblable inadvertance.

Les mêmes considérations sont applicables au VII^e porisme. Il est bien évident, pour moi du moins, que le point donné est le milieu de l'arc.

Ces deux porismes me paraissent d'ailleurs fournir une justification frappante de la théorie développée dans l'Annotation H : ce qui manque ici à l'énoncé du théorème local, c'est la détermination du sommet du triangle. Dans le premier cas, la position du sommet dépend de la valeur des angles à la base; dans le suivant, ce sommet doit être placé au milieu de l'arc.

Mais (qui le croirait?) c'est l'évidence même de ces propositions qui répugne à M. Breton : « Y a-t-il dans tout cela, dit-il (Note h''), quelque chose... qui exige de l'invention?... » (Note i'') : « Assurément si une semblable proposition se distinguait par quelque côté, ce n'est pas par l'invention... » (Note k'') : « Le sentiment des choses géométriques s'élève contre de semblables interprétations ».

Il suffit, pour répondre à ces assertions, de renvoyer à ce que j'ai dit plus haut, tant au § I^{er}, que dans l'Annotation L; et j'ajoute ici que c'est précisément de cette sorte de porismes qu'il s'agit au sujet de l'abus que Pappus reproche aux géomètres de son temps. — (Voir ci-dessus, Annotation F. — Voyez aussi l'Annotation U qui suit.)

(U) Ce dernier porisme en comprend deux en réalité, dont chacun correspond à l'un des deux précédents pris en ordre inverse. La droite mentionnée est la tangente menée à l'arc par le sommet du triangle, et le cas du parallélisme est celui où le sommet du triangle se confond avec le milieu de l'arc : c'est le cas du porisme précédent. Dans ce même cas, la flèche de l'arc est un *maximum*, ce que Pappus et les géomètres dont il commente les écrits, désignent par l'expression *μοναχός* employée pour désigner les points singuliers, les valeurs singulières.

— Telles sont les observations que nous avons à faire sur la traduction du texte de Pappus; voyons maintenant celui de Proclus.

(V) Les critiques que M. Breton adresse ici à ma traduction (qu'il me permette de le dire) ne sont pas plus fondées que sa propre traduction. *Γένεσις* est, dans le cas présent, la création, la construction d'une chose qui n'existe pas : par exemple, la construction d'un triangle isocèle sur une droite donnée prise pour base (Eucl., I), est appelée *γένεσις* par Proclus (p. 57); et Barocci (p. 119) traduit ce mot par *ortus*. Au contraire, la recherche du centre d'un cercle n'est point une création, parce que ce centre existe implicitement dès que le cercle est donné. De même, le plus grand commun diviseur de deux nombres existe; mais il n'est pas en évidence : on le trouve, mais on ne le crée pas.

Quant à soutenir que les mots *raisonnement facile* approchent plus de *θεωρία ἀπλή* que les mots *pure* ou *simple théorie*, c'est ce que personne, je pense, n'admettra, malgré l'assurance avec laquelle M. Breton (Note q'') affirme que *M. V. se trompe encore ici*. Plus loin (Note r''), M. Breton me reproche d'avoir traduit les mots *θεωρεῖται δὲ* par ceux-ci : *c'est une affaire de théorie*, tandis que lui-même a écrit que *c'est l'objet d'un*

théorème, en donnant pour raison qu'il faut « rappeler l'idée du théorème, puis celle « du problème ». A ce compte, pourquoi M. Breton se sert-il du mot *opération* au lieu d'employer celui de problème?

Puis ensuite (Note s''), j'ai eu tort, toujours suivant M. Breton, de dire que dans un théorème, *il ne s'agit que d'acquérir la connaissance* de la chose. — Etc., etc.

J'ai vraiment honte de me trouver arrêté sur de semblables minuties; mais il faut pourtant bien montrer comment M. Breton semble s'attacher, évidemment sans s'en apercevoir, à transporter le débat loin de la question principale, et tout à fait hors de son véritable terrain.

(W) Les mots que j'ai renfermés entre crochets rendent le véritable sens; c'est ainsi que φίλος ἢ ἐχθρὸς ἢ μεταξύ signifie *ami ou ennemi ou neutre* (*Dictionn.* d'Alexandre, d'après Aristote).

(X) Je persiste à croire que *créations* est ici la traduction exacte de γένεσις (*voir* ci-dessus l'Annotation V); et le mot *déduction* prouve que M. Breton n'a pas saisi le sens de ce passage. Il en est de même lorsqu'il rend θεωρία ψιλή par *raisonnement exempt de difficulté*, au lieu de dire *simple théorie, pure théorie, théorie abstraite* (*voir* Notices et Extraits des Manuscrits, t. XVI, 2^e partie, p. 114).

Si M. Breton n'avait pas écrit par un grand Δ (au lieu d'un petit) le mot δῆ, et s'il s'était aperçu que le point final doit être transporté avant οὗτε θεωρία ψιλή (où il n'a pas même mis une virgule), il aurait sans doute compris le passage comme moi, et se serait abstenu de parodier ma traduction comme il le fait dans sa Note (γ'').

(Y) M. Breton reconnaît, dans le § VIII de son Commentaire, qu'il n'y a point identité entre les manières de voir de Pappus et de Proclus. Dès-lors pourquoi, dans sa Note (x''), semble-t-il vouloir me rendre responsable de la discordance qui peut exister entre ces deux auteurs? Puis-je faire que Proclus dise la même chose que Pappus, et dans les mêmes termes? Pappus signale les variations d'opinion qui s'étaient déjà produites de son temps; Proclus à son tour en signale d'autres survenues depuis. Or, dans cet état de choses, que pouvons-nous faire, si ce n'est de constater ces dissentiments, de les faire ressortir, et cependant de tâcher, au milieu d'une telle diversité d'opinions, de saisir les points par lesquels elles se touchent et peuvent se ressembler?

Pour moi, voici ce que je trouve de commun dans toutes ces appréciations; et c'est ce qu'explique parfaitement le passage de Proclus entendu comme il doit l'être (*voir*, ci-dessus, Annotation V), savoir : Les deux formes principales sous lesquelles peuvent être présentées les vérités géométriques, ayant été fixées par des définitions rigoureuses, toutes les fois que l'on rencontrait une proposition qui ne satisfaisait pas complètement à l'une d'elles, une proposition à laquelle manquait quelque-une des conditions de la définition, où se manifestait quelque irrégularité, on la nommait *porisme*. D'où résultaient nécessairement des porismes de diverses sortes, qui pouvaient, chacune à son tour, attirer l'attention d'un auteur, influencer sur les travaux d'une époque.

Quant aux Porismes d'Euclide, il est clair que pour en bien connaître la nature, il faut s'en rapporter à Pappus qui en a résumé les principes fondamentaux, et surtout ne pas perdre de vue sa première définition (*parti à tirer d'un résultat*), puisqu'il semble vouloir jeter de la défaveur sur la seconde, ou du moins chercher à faire entendre que les géomètres qu'il nomme *les Modernes*, s'y restreignaient beaucoup trop, et abusaient même de la permission de s'y renfermer. C'est à ce point de vue étroit qu'il faut, suivant moi, rapporter les *cas singuliers* ou *μοναχοί*, c'est-à-dire les cas de *maximums* et de *minimums*, de *parallélisme*, etc., dont les VII^e et VIII^e porismes du III^e livre nous donnent des exemples (*voir ci-dessus*, Annot. T et U).

Toutefois, il ne faut pas oublier la « mention *fort importante* » comme la qualifie avec raison M. Breton (Note *y''*) « que Proclus fait expressément des Porismes d'Euclide, en appliquant à ces porismes ce qu'il vient de dire » de la recherche du centre d'un cercle donné, et de celle du plus grand commun diviseur de deux quantités, parce que cette assimilation prouve surabondamment, comme je l'ai dit plus haut, qu'on donnait le nom de porisme à toute proposition non susceptible d'être assimilée exactement à un théorème ou à un problème.

Et à ce propos, il n'est pas sans importance de faire observer que l'on s'accorde généralement à qualifier de problèmes les deux propositions d'Euclide citées par Proclus, en faisant porter le porisme exclusivement sur ces deux corollaires, savoir : que « La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre », et que « Toute grandeur qui en divise deux autres divise leur plus grand commun diviseur ». Si cette manière de voir était suffisamment autorisée par les manuscrits (mais malheureusement elle ne l'est pas, du moins pour la première des deux propositions citées), on aurait le droit d'en conclure que Proclus s'était trompé à l'égard de ces propositions ; et, par suite, il en résulterait une nouvelle raison d'affirmer que *tous les porismes sont des corollaires*, en employant ce dernier mot dans le sens moderne (*voir le § I*).

(Z) M. Breton arrête ici sa traduction du texte de Proclus, et il a ses raisons pour cela ; quant à moi, j'ai les miennes pour la continuer : mon but est de faire voir que les deux sortes de porismes ne diffèrent pas autant qu'on l'a pensé, ou plutôt, qu'il n'y a essentiellement qu'une sorte de porisme. A mon avis, la seule distinction qu'on puisse établir entre eux avec quelque apparence de raison, consiste en ceci : que certains porismes se présentent comme à l'aventure : ce sont ceux que l'on rencontre dans les *Éléments*, *κοινὰ στοιχεῖα* [*] ; tandis que les autres, dépendant d'une déduction moins simple, moins directe, moins élémentaire, ne se découvrent que lorsqu'on les cherche, après s'être livré préalablement à l'étude des théories moins vulgaires, afin d'acquiescer, comme le dit Pappus, la *puissance inventive*, *δύναμις ἐυρετική* (*voyez § I, n° 6*). Ce sont ces derniers porismes qui composaient les Livres d'Euclide sur la matière, ainsi que

[*] Plusieurs semblables porismes se rencontrent dans la *Géométrie* de Legendre, sous le simple titre de *scholies*.

les autres Traités compris dans le Τόπος ἀναλυόμενος; et si Proclus semble établir une division plus ou moins tranchée entre les deux classes (non entre les deux espèces), c'est uniquement parce que, devant se borner à commenter les Éléments, il n'avait point à s'occuper de porismes qui ne s'y rencontrent pas : voilà tout ce qu'il a voulu dire, et dont il a cru devoir avertir le lecteur.

§ IV.

Résumé et conclusions.

Mes conclusions étant suffisamment claires d'après tout ce qui précède, il ne me reste qu'à examiner celles de M. Breton, c'est-à-dire à faire voir comment elles s'écroulent faute de base.

Les expressions d'*erreurs graves*, d'*idées fausses*, d'*interprétations vicieuses*, etc., ne m'ont point été épargnées dans le cours du Mémoire de mon savant adversaire; elles devaient se retrouver ici, et elles s'y retrouvent en effet avec un luxe qui aurait vraiment de quoi effrayer. Voyons cependant les détails.

Le 1^o des Conclusions de M. Breton est détruit par le sens plus exact que l'on doit donner ici au mot *εὕρεσις* (ci-dessus § I, n^o 6); il l'est par les définitions précises du *théorème*, du *problème*, du *porisme* (§ II; et § III, Annot. D, H, M, Y); il l'est enfin par l'élimination définitive du mot *corollaire*, qui, n'étant pas grec, est *intrus* dans la discussion (§ I, n^o 41), à moins qu'on ne le substitue PARTOUT, comme traduction, au mot *porisme*.

Le 2^o est détruit par les Annot. B, E, G, H, et surtout par les définitions attribuées, *sur preuves*, dans l'Annot. M, aux mots *ἐπὶ ὁθέσιν, ζητούμενον, συμπελεκτός*.

De même, le 3^o est détruit par les Annot. C, D, W, Y.

Le 4^o est détruit par le § I (n^o 10); et par le § III : Annot. H, L, etc.

En résumé donc, QUE RESTE-T-IL DES CONCLUSIONS DE M. BRETON?

Quant à mon IDÉE PRÉCONÇUE, expression que M. Breton me renvoie de nouveau avec affirmation, au lieu d'un simple avertissement dont je l'avais accompagnée en la lui adressant (voir ci-dessus § I, n^{os} 3 et 4), je répète qu'en effet, en lisant le premier travail de l'estimable géomètre, j'avais *préconçu* l'idée qu'il venait de dire ou allait dire le dernier mot sur la question des porismes. Il m'est difficile main-

tenant, je l'avoue, de conserver cette illusion ou cet espoir. Cependant, je continue à regarder comme certain que le plus difficile est fait, grâce à l'explication des Lemmes de Pappus que l'on doit à M. Breton lui-même. La restitution des Porismes d'après ce précieux travail me paraît chose très-faisable, en y procédant d'après les idées que j'ai développées, et que j'aurais voulu pouvoir rendre aussi claires pour les lecteurs qu'elles sont vraies à mes yeux : c'est en ce sens que j'ai pu dire :

De loin c'est quelque chose, et de près ce n'est rien.

Au contraire, en essayant de suivre les idées de M. Breton, le succès de cette entreprise me paraît une chimère. Je souhaite pourtant bien vivement, dans l'intérêt de la Science d'abord, que ce travail soit fait par quelqu'un ; et ensuite, dans celui de mon savant adversaire, je ne désire pas moins qu'il n'ait pas à dire un jour : *sic vos non vobis* ; mais si cela arrive, à qui devra-t-il s'en prendre ?

23 septembre 1858.

