

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

**Nombre de solutions d'une congruence du premier
degré à plusieurs inconnues**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 4 (1859), p. 366.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4_366_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4_366_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOMBRE DE SOLUTIONS
D'UNE CONGRUENCE DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES;

PAR M. V.-A. LE BESGUE,

Correspondant de l'Institut.

Soit $p = hm + 1$ un nombre premier impair, g une racine primitive de p et $1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1} = 0$ (1). En posant $y_i = \sum x^{g^{hm+i}}$, i étant un des nombres $0, 1, \dots, m-1$ et k prenant les h valeurs $0, 1, 2, \dots, h-1$, les m quantités $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$ seront les racines de l'équation auxiliaire de degré m pour la résolution de l'équation (1). Cette auxiliaire se simplifiera si l'on pose $1 + my = z$.

Ceci rappelé, si l'on fait, pour abréger,

$$y_a y_b \dots y_i + y_{a+1} y_{b+1} \dots y_{i+1} + \dots + y_{a+m-1} y_{b+m-1} \dots y_{i+m-1} = T(y_a y_b \dots y_i),$$

on verra par la méthode exposée pages 287 et suivantes du tome II de la 1^{re} série du *Journal de Mathématiques*, que les deux congruences à k inconnues

$$(a) g^b x_1^m + g^c x_2^m + \dots + g^i x_k^m \equiv 0, \quad (b) g^a + g^b x_1^m + \dots + g^i x_k^m \equiv 0 \pmod{p = hm + 1},$$

ont leur nombre de solutions S_k déterminé respectivement par les équations

$$(a') pS_k = p^k + \frac{p-1}{m} T(z_b z_c \dots z_i), \quad (b') pS_k = p^k + \frac{1}{m} [T(z_a z_b \dots z_i) - T(z_b z_c \dots z_i)],$$

si $x_1, x_2, \dots, x_k$, nombres positifs inférieurs à p , peuvent être supposés nuls, et par les équations

$$(a'') pS_k = (p-1)^k + \frac{p-1}{m} m^k T(y_b y_c \dots y_i), \quad (b'') pS_k = (p-1)^k + m^k T(y_a y_b \dots y_i),$$

si $x_1, x_2, \dots, x_k$ doivent tomber entre 0 et p .

Pour $m = 1$, on a $z_i = 0$, $y_i = -1$ et l'on trouve pour S_k les quatre nombres

$$p^{k-1}, p^{k-1}, \frac{1}{p}(p-1)[(p-1)^{k-1} - (-1)^{k-1}], \frac{1}{p}[(p-1)^k - (-1)^k].$$

Ces nombres sont indépendants des coefficients des congruences (a), (b), Il serait facile de donner *a priori* la raison de cette indépendance.