

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème arithmétique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 4 (1859), p. 271-272.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4_271_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

THÉORÈME ARITHMÉTIQUE ;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ des nombres entiers indéterminés, mais positifs, qui doivent vérifier une ou plusieurs équations

$$(1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_\mu) = 0, \dots, \quad F(x_1, x_2, \dots, x_\mu) = 0,$$

auxquelles peuvent être jointes des conditions limitatives, afin que le système (1) n'ait qu'un nombre fini de solutions. Considérons l'ensemble des solutions de ce système, et pour chacune d'elles décomposons $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ en deux facteurs, de manière à avoir de toutes les manières possibles

$$x_1 = d_1 \delta_1, \quad x_2 = d_2 \delta_2, \dots, \quad x_\mu = d_\mu \delta_\mu,$$

puis formons les produits

$$d_1 d_2 \dots d_\mu.$$

Enfin, pour chaque produit ainsi obtenu, cherchons si le nombre n des facteurs premiers (égaux ou inégaux) qui le composent est pair ou impair, en observant que ce nombre n est nul, et par conséquent pair, quand

$$d_1 d_2 \dots d_\mu = 1 \text{ [*]}.$$

Cela posé, écrivons $+ 1$ toutes les fois que n est pair, $- 1$ quand n est impair, et faisons la somme algébrique des unités ainsi inscrites. Nous aurons au sujet de cette somme σ (l'excès du nombre des cas où n est pair sur le nombre des cas où n est impair) un théorème que je vais énoncer :

1°. La somme σ peut se réduire à zéro, mais elle n'est jamais négative.

[*] Si l'on pose $d_1 d_2 \dots d_\mu = m$, on verra qu'il s'agit ici de la fonction numérique que nous désignons par $\chi(m)$. Voir le cahier de juillet 1857, page 246.

2°. Elle a pour valeur précise le nombre de manières dont on peut poser

$$(2) \quad f(y_1^2, y_2^2, \dots, y_\mu^2) = 0, \dots, \quad F(y_1^2, y_2^2, \dots, y_\mu^2) = 0,$$

$y_1, y_2, \dots, y_\mu$ étant des entiers positifs dont les carrés vérifient les conditions limitatives imposées à $x_1, x_2, \dots, x_\mu$: en d'autres termes σ est le nombre des solutions du système (1) où $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ sont des carrés.

Je pourrais joindre à ce théorème (dont la démonstration est du reste extrêmement simple) d'autres théorèmes analogues. Je m'en tiendrai à ce qui précède, en ajoutant seulement un exemple. Je prendrai trois inconnues x_1, x_2, x_3 et une seule équation

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 8.$$

On aura ce tableau des solutions de l'équation proposée :

$$\begin{aligned} x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2; & \quad x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 1; \\ x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1; & \quad x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1; \\ x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 1; & \end{aligned}$$

le groupe

$$x_1 = 1.1, \quad x_2 = 1.1, \quad x_3 = 1.2 = 2.1$$

fournit les deux produits

$$d_1 d_2 d_3 = 1, \quad d_1 d_2 d_3 = 2,$$

dont le premier donne $+1$ et le second -1 qui se compensent : le groupe $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 1$ fournit à son tour les trois produits $1, 2, 4$, d'où $+1, -1, +1$, ce qui donne au total une unité positive; le calcul se fait de même pour les autres groupes, et il en résulte finalement $\sigma = 2$. Or l'équation

$$y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 = 8$$

a en effet deux solutions en nombres entiers positifs, savoir

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 1$$

et

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 1.$$
