JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOURDAIN

Méthode pour la résolution des équations littérales du troisième et du quatrième degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 205-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__205_0>

MÉTHODE

POUR LA

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LITTÉRALES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. JOURDAIN,
Professeur à Poitiers.

Troisième degré.

Soit proposée l'équation suivante

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^3 = m, \tag{1}$$

d'où

$$x = \frac{b\sqrt[3]{m} - a}{1 - \sqrt[3]{m}}. \tag{2}$$

En développant les calculs indiqués dans l'équation (1) et en portant tout dans le même membre, il vient

$$(1 - m)x^3 + 3(a - mb)x^2 + 3(a^2 - mb^2)x + a^3 - mb^3 = 0.$$

Si dans cette équation nous posons $m = \frac{a}{b}$, le deuxième terme disparaît et l'équation prend la forme suivante, après avoir divisé partout par le coefficient de x^3,

$$x^3 - 3abx - ab(a + b) = 0.$$

Pour identifier cette équation à l'équation générale du troisième degré privée de son second terme $x^3 + px + q = 0$, il faut poser

$$-3ab = p, \quad -ab(a + b) = q,$$

d'où

$$ab = -\frac{p}{3}, \quad a + b = \frac{3q}{p}.$$

a et b sont donc les racines de l'équation suivante

$$y^2 - \frac{3q}{p}y - \frac{p}{3} = 0,$$

d'où

$$y = \frac{3q}{2p} \pm \frac{1}{6p}\sqrt{3(27q^2 + 4p^3)},$$

et, en séparant les racines

$$a = \frac{3q}{2p} + \frac{1}{6p}\sqrt{3(27q^2 + 4p^3)}, \quad b = \frac{3q}{2p} - \frac{1}{6p}\sqrt{3(27q^2 + 4p^3)}.$$

Si maintenant, nous reportant à l'expression (2), nous remplaçons m par $\frac{a}{b}$, la valeur de x deviendra

$$x = \frac{b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} - a}{1 - \sqrt[3]{\frac{a}{b}}} = b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + b\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2,$$

ou bien encore

$$x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Cette dernière transformation s'obtient en observant que

$$b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{ab^2} \quad \text{et} \quad b\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2 = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Pour obtenir la valeur de x en fonction de p et de q, il n'y a plus qu'à remplacer a et b par leurs valeurs en p et q, en remarquant, pour simplifier les calculs, que ab est égal à $-\frac{p}{3}$, et il viendra

$$(3)\ x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{3(27q^2 + 4p^3)}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{3(27q^2 + 4p^3)}}.$$

Cette valeur de x est précisément celle qu'on obtient par les méthodes ordinaires.

Parmi les neuf valeurs de cette expression, trois seulement sont les racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0;$$

il est tout aussi facile dans notre méthode que dans celles habituellement en usage, de déterminer ces trois valeurs.

Elles sont d'abord données sans ambiguïté par la formule

$$x = \frac{b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} - a}{1 - \sqrt[3]{\frac{a}{b}}} = b\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + b\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2,$$

où il n'y a qu'un seul radical cubique. De là on a déduit la formule à deux radicaux

$$x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2 b};$$

mais le calcul même par lequel les deux nouveaux radicaux s'introduisent montre que leurs valeurs doivent être groupées de telle sorte que toujours le second radical soit égal au carré du premier divisé par b.

Si donc une des racines x est spécialement représentée par

$$x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2 b},$$

les deux autres seront

$$x' = \alpha\sqrt[3]{ab^2} + \alpha^2\sqrt[3]{a^2 b}$$

et

$$x'' = \alpha^2\sqrt[3]{ab^2} + \alpha\sqrt[3]{a^2 b},$$

α et α^2 étant les valeurs imaginaires de $\sqrt[3]{1}$.

Quand a et b sont des quantités réelles, la première racine est naturellement fournie par la valeur arithmétique des radicaux.

Quatrième degré.

L'équation générale du quatrième degré privée de son second terme peut être résolue d'une manière analogue.

Posons

$$\text{(I)} \qquad \left(\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + a'x + b'}\right)^2 = \frac{a}{a'}.$$

De cette équation il est facile de tirer la valeur de x en fonction des indéterminées a, b, a', b', valeur dont la recherche ne dépend que de la résolution d'une équation du deuxième degré.

En effectuant les calculs indiqués et en portant tout dans le même membre, il vient

$$x^4 + \frac{aa'(a'-a) + 2(ab'-ba')}{a-a'}x^2 + \frac{2aa'(b'-b)}{a-a'}x + \frac{ab'^2 - a'b^2}{a-a'} = 0.$$

Si nous identifions cette équation à celle du quatrième degré privée de son second terme

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

nous aurons, en prenant $b' = 0$, les trois relations suivantes:

$$\begin{aligned} aa'(a'-a) - 2ba' &= p(a-a'), \\ 2aa'b &= q(a'-a), \\ a'b^2 &= r(a'-a). \end{aligned}$$

En traitant ces trois équations, on arrive à la réduite suivante du troisième degré en b,

$$b^3 + \frac{8r^2}{q^2-4pr}b^2 + \frac{4pr^2}{q^2-4pr}b - \frac{8r^2}{q^2-4pr} = 0$$

et aux deux relations suivantes qui la complètent:

$$a = \frac{bq}{2r}, \quad a' = \frac{bq}{2(r-b^2)}.$$

Ces trois relations sont suffisantes pour la détermination des quantités a, a', b en fonction des coefficients p, q, r de l'équation du quatrième degré privée de son second terme, et par conséquent pour la détermination complète de x, qui, comme nous l'avons dit plus haut, peut être facilement tirée de l'équation (1), où l'on devra, bien entendu, faire aussi $b' = 0$.