JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 121-152.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__121_0>

NOUVELLE THÉORIE
DES
FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

DEUXIÈME PARTIE.

DES PÉRIODES DES INTÉGRALES.

CHAPITRE III.

De la quadrature des courbes imaginaires et des périodes des intégrales simples.

21. *Quadrature de la conjuguée dont les abscisses sont réelles.* — L'aire comprise entre l'axe des x, deux ordonnées et un arc de la conjuguée qui a sa caractéristique infinie, s'obtient par la même intégration qui fournirait l'aire d'un segment analogue de la courbe réelle : la même intégrale $\sin YX \int y\,dx$ prise entre des limites réelles par rapport à x, représentera soit l'aire d'un segment de la courbe réelle, soit l'aire d'un segment de la conjuguée $C = \infty$, suivant que les valeurs de y correspondantes aux valeurs qu'aura prises la variable x, seront réelles ou imaginaires.

Dans le second cas, l'intégrale aura la forme $A + B\sqrt{-1}$: A représentera l'aire d'un segment du diamètre correspondant aux cordes parallèles à l'axe des y de la conjuguée $C = \infty$, et B l'aire comprise entre cette conjuguée et son diamètre.

22. *Quadrature d'une conjuguée quelconque.* — On pourrait évaluer l'aire d'une conjuguée quelconque de la courbe réelle, en rendant préalablement ses abscisses réelles. Après avoir donné à l'axe des y une direction convenable, on obtiendrait, comme dans le cas précédent, la mesure de l'aire comprise entre l'ancien axe des x, deux parallèles au nouvel axe des y, et un arc quelconque de la conjuguée considérée; pour avoir l'aire qu'on se proposait d'obtenir, et qui devait être comprise entre l'axe des x, deux parallèles à l'ancien axe des y et l'arc de la conjuguée, il ne resterait qu'à corriger le résultat obtenu, en y ajoutant la différence des aires des deux triangles qui auraient pour sommets les points extrêmes de l'arc de la conjuguée, pour côtés, des parallèles à l'ancien et au nouvel axe des y, et pour bases, les segments de l'axe des x interceptés par ces parallèles.

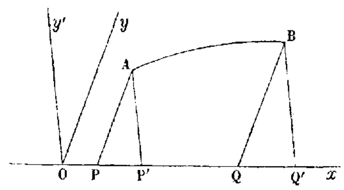
Mais alors pour chaque conjuguée on aurait à effectuer une transformation de coordonnées, la résolution par rapport à y de la nouvelle équation de la courbe, et, ce qui serait pis encore, une nouvelle intégration. Toutes ces complications peuvent être évitées, et la seule intégration qu'exige la quadrature de la courbe réelle suffira à la quadrature de toutes ses conjuguées.

La direction des ordonnées qui limitent le segment qu'on veut calculer est presque toujours indifférente par elle-même; un changement dans cette direction n'entraîne qu'une correction toujours facile à faire et qui n'affecte pas la partie intéressante, au point de vue analytique, de l'intégrale qui représente le segment considéré. Pour cette raison, et pour fixer le langage, lorsqu'il s'agira d'une conjuguée quelconque, nous ne nous occuperons que de l'aire comprise entre un arc de cette conjuguée, deux de ses cordes réelles et l'axe des x; c'est toujours d'un segment pareil que nous entendrons parler, lorsque nous nous occuperons de l'aire de la conjuguée, et c'est ce segment que nous allons nous proposer d'évaluer.

Le principe qui va nous servir à ramener à une seule toutes les intégrations, en apparence différentes, qu'il faudrait effectuer pour carrer les différentes conjuguées d'une même courbe, résulte de la remarque suivante : Une seule intégration effectuée par rapport à la courbe réelle, rapportée à certains axes, suffirait pour qu'on pût, par des transformations algébriques simples, former l'expression analytique de l'aire d'un segment de la même courbe rapportée à d'autres axes; mais on sait, d'un autre côté, que chaque expression de l'aire de la courbe réelle rapportée à des axes quelconques convient à l'aire de la conjuguée dont les abscisses sont alors réelles. Il est facile de préjuger de là qu'une seule et même intégration doit suffire pour carrer la courbe réelle et toutes ses conjuguées.

Soit AB (*fig.* 1) un arc de la courbe réelle rapportée successivement

FIG. 1.



aux axes OX, OY et OX, OY', l'aire à calculer sera PABQ ou P'ABQ', et sera représentée par

$$\sin \mathrm{YX} \int y\, dx,$$

ou par

$$\sin \mathrm{Y'X} \int y'\, dx',$$

ces intégrales étant prises entre les limites $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$ ou $[x'_0, y'_0]$, $[x'_1, y'_1]$ qui correspondent aux extrémités A et B de l'arc considéré; la différence de ces deux intégrales est celle des aires des deux triangles QBQ' et PAP', qui ont pour mesures

$$-\sin \mathrm{Y'Y} \cdot \frac{y_1 y'_1}{2} \quad \text{et} \quad -\sin \mathrm{Y'Y}\, \frac{y_0 y'_0}{2}.$$

En remplaçant y'_0 et y'_1 par leurs valeurs en fonction de (x_0, y_0), (x_1, y_1) tirées des formules de transformation

$$\begin{aligned} x \sin \mathrm{YX} &= x' \sin \mathrm{YX} + y' \sin \mathrm{Y'Y}, \\ y \sin \mathrm{YX} &= y' \sin \mathrm{Y'X}, \end{aligned}$$

on obtient, pour expression de cette différence,

$$\sin \mathrm{Y'X} \int_{x'_0 y'_0}^{x'_1, y'_1} y'\, dx' - \sin \mathrm{YX} \int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\, dx = -\frac{1}{2} \sin \mathrm{Y'Y} \frac{\sin \mathrm{YX}}{\sin \mathrm{Y'X}} (y_1^2 - y_0^2),$$

ce qui donne

$$\sin Y'X \int_{x'_0 y'_0}^{x'_1 y'_1} y' dx' = \sin YX \int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\, dx - \frac{1}{2} \sin Y'Y \frac{\sin YX}{\sin Y'X}(y_1^2 - y_0^2).$$

Cette égalité, qui subsiste toujours vraie quels que soient x_0, y_0, x_1, y_1 réels, est une identité absolue. La fonction analytique qui représente l'aire d'une conjuguée quelconque comprise entre des cordes réelles partant de deux de ses points $[x_0 y_0]$, $[x_1 y_1]$ est donc

$$\sin YX \left[\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\, dx - \frac{1}{2} \frac{\sin Y'Y}{\sin Y'X} (y_1^2 - y_0^2) \right],$$

ou, en remplaçant $\frac{\sin Y'X}{\sin Y'Y}$ par la caractéristique C,

$$\sin YX \left(-\frac{y_1^2 - y_0^2}{2C} + \int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\, dx \right).$$

La partie réelle de cette quantité représente l'aire du diamètre de la conjuguée qui divise en parties égales ses cordes réelles, et la partie imaginaire l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre.

Lorsque les limites de l'intégrale correspondent à des points où la conjuguée touche la courbe réelle, la partie $-\sin YX \frac{y_1^2 - y_0^2}{2C}$ est réelle et représente alors effectivement la différence des deux triangles, l'un ajouté, l'autre retranché au segment qui serait compris entre des parallèles au premier axe des y; de sorte que

$$\sin YX \int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\, dx,$$

dans ce cas, représente, par sa partie imaginaire, l'aire fermée comprise entre la conjuguée et le diamètre qui divise en parties égales ses cordes réelles, et par sa partie réelle l'aire comprise entre le diamètre, l'axe des x et les deux ordonnées $x = x_0$, $x = x_1$.

23. *Des intégrales prises entre des limites imaginaires.* — La définition d'une intégrale n'est pas encore complète lorsque l'on connaît la fonction explicite ou implicite placée sous le signe $\int$, et les valeurs limites de la variable et de la fonction. Il faut en outre savoir par quelles valeurs intermédiaires passent la variable et la fonction, pour aller de leurs limites inférieures à leurs limites supérieures. La valeur de l'intégrale peut changer avec le parcours.

M. Cauchy a démontré que, les limites restant d'ailleurs les mêmes, si les valeurs intermédiaires de la variable et de la fonction changent infiniment peu, en général l'intégrale conserve la même valeur. Nous admettrons ce principe, qui n'a jamais fait question, et nous nous proposerons de chercher ce que doit dans chaque cas représenter l'intégrale, complétement définie, afin de savoir quelle en doit être la valeur. Nous commencerons par assigner, pour chaque couple des limites, une des valeurs de l'intégrale, nous verrons ensuite quelles peuvent être les autres et comment l'intégrale les acquiert.

La théorie des aires des courbes imaginaires se lie d'une façon tellement intime à celle des intégrales étudiées sous le point de vue le plus général qu'elles comportent, lorsque, pour passer de la limite inférieure à la limite supérieure, on admet toutes les suites continues possibles de valeurs de la variable indépendante, que toutes les questions si ardues qu'embrasse la seconde théorie se trouvent réduites à un degré extrême de simplicité, lorsqu'on y adapte la méthode d'interprétation dont nous venons d'établir les bases.

24. *Observation.* — On se borne habituellement, dans la notation d'une intégrale définie, à indiquer les limites entre lesquelles varie la variable indépendante; nous indiquons également les limites de la variable dépendante; l'intégrale ne sera pas encore par là complétement définie, mais elle ne pourra plus changer de valeur que lorsque le chemin décrit par le point $[xy]$, entre ses positions limites, aura changé lui-même.

Nous entendons par *limites de l'intégrale* les couples de valeurs de x et de y qui figurent les deux extrémités du chemin suivi par le point $[xy]$.

Nous supposerons toujours, dans ce qui va suivre, les axes rectangulaires.

25. *Du cas où les limites sont réelles par rapport à x.* — Si les deux points limites appartiennent à la courbe réelle et qu'un arc continu de cette courbe les réunisse, une des valeurs de l'intégrale sera la mesure de l'aire correspondante à cet arc.

Si les deux limites appartiennent à la conjuguée $C = \infty$, et qu'un arc continu de cette courbe les réunisse, une des valeurs de l'intégrale sera la mesure de l'aire correspondante à cet arc; la partie réelle de cette valeur de l'intégrale sera l'aire du diamètre conjugué des cordes parallèles aux y de la conjuguée $C = \infty$, qui se trouvera comprise entre les limites de l'intégrale, par rapport à x, et la partie imaginaire sera l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre.

Si les deux limites appartiennent à la courbe réelle, mais qu'aucune branche de cette courbe ne les réunisse, les branches de la courbe réelle sur lesquelles elles se trouveront comprendront entre elles un anneau de la conjuguée $C = \infty$. Dans ce cas, entre autres valeurs, l'intégrale représentera la somme des mesures de l'aire correspondante à l'arc compris sur la courbe réelle entre la limite inférieure de l'intégrale et le point où la branche qui contient cette limite touchera la conjuguée $C = \infty$, de l'aire de la portion du diamètre conjugué des cordes parallèles aux y de la conjuguée $C = \infty$, comprise dans l'intérieur de l'anneau considéré, de l'aire correspondante à l'arc compris sur la courbe réelle entre le point où la branche, qui contient la limite supérieure, touche la conjuguée $C = \infty$ et la limite supérieure, cette somme, augmentée ou diminuée de la moitié de l'aire intérieure imaginaire de l'anneau considéré, suivant que le point $[xy]$, pour passer de l'une des limites à l'autre, aura décrit la partie supérieure ou la partie inférieure de cet anneau. Les deux limites pourraient être séparées l'une de l'autre par plusieurs anneaux de la conjuguée et de la courbe réelle : dans ce cas l'intégrale, parmi d'autres valeurs, représenterait la somme des aires correspondantes aux branches extrêmes et au diamètre commun des différents anneaux, comme dans le cas précédent, augmentée ou diminuée de la moitié de l'aire réelle ou imaginaire de chaque anneau de la courbe réelle ou de la conjuguée $C = \infty$.

Si les deux limites appartiennent à la conjuguée $C = \infty$, et qu'elles soient séparées par un ou plusieurs anneaux de la courbe réelle et de la conjuguée elle-même, ce cas s'analysera comme le précédent.

Enfin, si l'une des limites appartient à la courbe réelle et l'autre à la conjuguée $C = \infty$, l'intégrale représentera la somme des aires correspondantes aux arcs de la courbe réelle et de la conjuguée compris entre les limites et le point où les deux courbes se touchent. Dans le cas où les deux limites seraient séparées par quelques anneaux fermés de la conjuguée et de la courbe réelle, on tiendrait compte, comme dans les cas précédents, de la présence de ces anneaux.

26. *Du cas où l'une des limites appartient à la courbe réelle et l'autre à une conjuguée qui touche la courbe réelle.* — Ce cas se ramène aisément au précédent. Si l'on imagine que l'on ait rendu l'axe des y parallèle aux cordes réelles de la conjuguée à laquelle appartient la limite imaginaire, la formule

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx = \frac{y_1^2 - y_0^2}{2C} + \sin Y'X \int_{x'_0 y'_0}^{x'_1 y'_1} y'\,dx,$$

montre qu'à la différence près de la partie algébrique $\frac{y_1^2 - y_0^2}{2C}$, l'intégrale aura pour valeur la somme des aires correspondantes aux arcs de la courbe réelle et de sa conjuguée qui se trouvent compris entre les limites et le point où les deux courbes se touchent, ces aires étant, bien entendu, limitées par des parallèles aux cordes réelles de la conjuguée considérée. Si les deux limites étaient séparées l'une de l'autre par quelques anneaux fermés de la conjuguée et de la courbe réelle, on tiendrait compte de cette circonstance comme dans les cas précédents.

27. *Du cas où les deux limites appartiennent à deux conjuguées différentes qui touchent la courbe réelle.* — On formera, dans ce cas une des valeurs de l'intégrale, en imaginant que le point mobile $[xy]$ décrive successivement l'arc de la conjuguée à laquelle appartient la limite inférieure, compris entre cette limite et le point où la conjuguée qui la contient touche la courbe réelle, l'arc de la courbe réelle compris entre les points où elle touche les deux conjuguées, enfin l'arc de la seconde conjuguée compris entre le point où elle touche la courbe réelle et la limite supérieure.

$[x_0 y_0]$, $[x_1 y_1]$ désignant toujours les limites de l'intégrale, si nous appelons $[a, b]$, $[a_1\ b_1]$ les points où la courbe réelle touche les deux conjuguées : l'intégrale $\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx$ pourra se décomposer en

$$\int_{x_0 y_0}^{a\,b} y\,dx + \int_{a\,b}^{a_1 b_1} y\,dx + \int_{a_1 b_1}^{x_1 y_1} y\,dx\,;$$

cela posé, si nous rendons successivement l'axe des y parallèle aux cordes réelles des deux conjuguées, en désignant par $x'y'$, $x''y''$ les variables x et y transformées successivement dans les deux systèmes, par C_0 et C_1, les caractéristiques des deux conjuguées, l'intégrale

$\int_{x_0 y_0}^{ab} y\,dx$ pourra être remplacée par

$$\frac{b^2 - y_0^2}{2\,C_0} + \sin Y'X \int_{x'_0 y'_0}^{a' b'} y'\,dx',$$

et l'intégrale $\int_{a_1 b_1}^{x_1 y_1} y\,dx$ par

$$\frac{y_1^2 - b_1^2}{2\,C_1} + \sin Y''X \int_{a''_1 b''_1}^{x''_1 y''_1} y''\,dx''\,;$$

l'intégrale $\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\,dx$ pourra donc être égalée à

$$+\frac{y_1^2}{2\,C_1} - \frac{y_0^2}{2\,C_0} + \sin Y'X \int_{x'_0 y'_0}^{a' b'} y'\,dx' + \frac{b^2}{2\,C_0} + \int_{a\,b}^{a_1 b_1} y\,dx - \frac{b_1^2}{2\,C_1}$$
$$+ \sin Y''X \int_{a''_1 b''_1}^{x''_1 y''_1} y''\,dx''.$$

Cette expression s'interprète aisément :

$$\frac{b^2}{2\,C_0} + \int_{a\,b}^{a_1 b_1} y\,dx - \frac{b_1^2}{2\,C_1}$$

représente l'aire comprise entre l'arc de la courbe réelle qui s'étend du point $[ab]$ au point $[a_1 b_1]$, les tangentes à la courbe en ces deux points et l'axe des x; par conséquent l'expression entière, à la différence près de sa partie algébrique $\frac{y_1^2}{2\,C_1} - \frac{y_0^2}{2\,C_0}$, représente l'aire comprise entre l'axe des x, les cordes réelles des deux conjuguées menées l'une d'une des limites, l'autre de l'autre, et enfin l'arc composé qui joint ces deux limites.

28. *Du cas où les limites appartiennent à des conjuguées qui ne touchent pas la courbe réelle.* — Quand les deux limites appartiennent à une même conjuguée, et qu'un arc continu de cette courbe s'étend entre elles, l'interprétation de l'intégrale ne présente aucune difficulté.

L'identité

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\, dx = \frac{y_1^2 - y_0^2}{2\mathrm{C}} + \sin \mathrm{Y'X} \int_{x'_0 y'_0}^{x'_1 y'_1} y'\, dx'$$

montre que l'intégrale fournit toujours, à la différence près de la quantité algébrique $\frac{y_1^2 - y_0^2}{2\mathrm{C}}$, l'aire correspondante à l'arc de la conjuguée qui s'étend entre les deux limites de l'intégrale, cette aire étant comprise entre des parallèles aux cordes réelles de la conjuguée.

Lorsque les deux limites n'appartiennent pas à une même conjuguée, l'interprétation de l'intégrale devient plus difficile. On peut imaginer que le point mobile $[xy]$, pour passer d'une des limites à l'autre, ait suivi l'arc de la conjuguée, à laquelle appartient la limite inférieure, jusqu'au point où cette conjuguée touche l'enveloppe imaginaire, qu'il ait ensuite parcouru cette enveloppe, jusqu'au point où elle touche la conjuguée à laquelle appartient la limite supérieure, enfin qu'il ait suivi cette dernière conjuguée jusqu'au point correspondant à la limite supérieure de l'intégrale.

La première et la dernière partie de l'intégrale ainsi décomposée représentent des aires connues, mais la partie intermédiaire, engendrée par le déplacement du point mobile le long de l'enveloppe, présente plus de difficultés; nous n'en avons pas trouvé d'interprétation qui convienne à tous les cas; en sorte que, bien que nous croyions devoir dire ce que nous savons de cette question, cependant nous la laissons posée.

Il arrive très-fréquemment que les coordonnées des points de l'enveloppe imaginaire soient imaginaires, sans parties réelles, ou composées de parties réelles constantes et de parties imaginaires variables; ce dernier cas se ramène au premier, ou en dérive par une simple transposition des axes parallèlement à eux-mêmes.

Dans le premier cas, x et y ayant la forme

$$x = \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \beta'\sqrt{-1},$$

$y\,dx$ est exprimé par $-\beta' d\beta$, de sorte que l'intégrale

$$\int y\,dx,$$

prise le long de l'enveloppe imaginaire, en fournit encore l'aire, affectée, il est vrai, du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir en raison du sens dans lequel elle est engendrée.

Dans le second cas, si α_0, α'_0 désignent les parties réelles, constantes, des deux coordonnées de l'enveloppe imaginaire, x et y ont la forme

$$x = \alpha_0 + \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha'_0 + \beta'\sqrt{-1},$$

mais

$$\int y\,dx = \int (\alpha'_0 + \beta'\sqrt{-1})\, d\beta\sqrt{-1} = \alpha'_0(x - \alpha_0) - \int \beta' d\beta,$$

de sorte que l'intégrale $\int y\,dx$ a encore un rapport très-simple avec l'aire de l'enveloppe.

Je répète que le cas que je viens d'examiner se présente très-fréquemment; les équations

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2, \quad a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2,$$
$$y = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 \pm x^2}},$$
$$y = \pm\frac{a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$
$$y = \frac{a^3}{a^2 \pm x^2},$$
$$y^3 - a^2y + a^2x = 0, \quad y^4 + x^4 = a^4,$$

en fournissent des exemples qu'on pourrait multiplier à l'infini.

Il arrivera donc fréquemment qu'on puisse encore facilement étudier la marche de l'intégrale

$$\int y\,dx,$$

lorsque le point $[xy]$ aura passé sur les conjuguées qui ne touchent plus la courbe réelle.

Mais il est clair, d'un autre côté, qu'on pourrait former à volonté des exemples d'équations où la réalité de $\frac{dy}{dx}$ n'exigeât nullement que les parties réelles de y et de x restassent constantes.

Si $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ sont quatre fonctions constamment proportionnelles, ce qui exigera simplement que $\varphi(t).\psi_1(t)$ et $\psi(t).\varphi_1(t)$ soient identiques, en posant

$$x = \varphi(t) + \psi(t)\sqrt{-1} + \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1},$$

et

$$y = \varphi_1(t) + \psi_1(t)\sqrt{-1} + \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1},$$

et éliminant t entre ces relations, on obtiendra entre x et y une équation satisfaisant aux conditions qu'on voulait s'imposer.

Cependant si l'équation $f(x, y) = 0$ a tous ses coefficients réels et représente une courbe réelle, l'enveloppe imaginaire des conjuguées touchera habituellement la courbe réelle en un point réel, car si $C = \gamma$ est une limite, dans un sens ou dans l'autre, des caractéristiques des conjuguées qui touchent la courbe réelle, de telle sorte que, par exemple, les conjuguées dont la caractéristique serait moindre que γ touchent la courbe réelle, et que celles dont la caractéristique serait plus grande que γ ne la touchent plus, la conjuguée $C = \gamma$ touchera encore la courbe réelle, et le point où se fera ce contact appartiendra aussi à l'enveloppe imaginaire. Dans ce cas, il deviendrait plus difficile de concevoir les fonctions φ, φ_1, ψ, ψ_1. En effet, si l'on transportait l'origine des coordonnées au point $[\alpha_0, \alpha'_0]$, où l'enveloppe imaginaire touche l'enveloppe réelle, l'équation nouvelle de la courbe

$$f(x + \alpha_0, y + \alpha'_0) = 0$$

aurait encore ses coefficients réels; et comme les coordonnées y et x

de l'enveloppe imaginaire deviendraient nulles en même temps, elles ne pourraient plus être exprimées que par

$$x = \varphi\ (t) + \psi\ (t)\sqrt{-1},$$
$$y = \varphi_1(t) + \psi_1(t)\sqrt{-1},$$

équations dont on pourrait remplacer le système par

$$x = \varphi(t) + \psi(t)\sqrt{-1},$$
$$\frac{x}{y} = \frac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)},$$

puisqu'on suppose

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)} = \frac{\psi(t)}{\psi_1(t)}.$$

Or l'élimination de t entre ces deux relations ne pourrait que dans des cas exceptionnels fournir entre x et y une équation à coefficients réels, représentant une courbe réelle, parce que la réalité de x exigerait que t fût imaginaire, et qu'alors $\frac{x}{y}$ serait généralement imaginaire.

Je crois donc qu'il arrivera assez rarement, dans les cas pratiques d'équations de courbes réelles, que l'enveloppe imaginaire ait ses coordonnées composées de parties réelles et imaginaires également variables; mais il est bien loin de ma pensée d'essayer de dissimuler une difficulté véritablement embarrassante; tout au contraire, n'ayant pu résoudre seul la question, je n'en tiens que davantage à la poser.

Comme exemple d'enveloppe non carrable par l'intégrale $\int y\,dx$, je citerai celui que fournit l'équation

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

l'enveloppe imaginaire des conjuguées que représente cette équation, rapportée à des axes rectangulaires, est le cercle décrit avec un rayon égal à $r + r'$ autour du point dont les coordonnées sont $a + a'$ et $b + b'$.

Quoi qu'il en soit, on verra que la lacune que nous laissons subsister a peu d'importance relativement à la partie la plus intéressante de la théorie qui nous occupe, et qui a rapport aux périodes des intégrales.

29. *Des périodes des intégrales.* — L'expression analytique de l'aire d'une courbe fermée prise entre deux limites quelconques, ne peut être que le terme général d'une progression par différence, dont la raison serait l'aire de la surface totale comprise dans l'intérieur de cette courbe fermée; car au chemin qui conduit le plus directement d'un point de cette courbe à un autre, on peut ajouter toujours un nombre quelconque de tours entiers faits sur sa circonférence, et chaque tour fait ajoute à l'intégrale l'aire de la surface intérieure.

En effet, l'ordonnée étant $y = \varphi(x) \pm \psi(x)$, l'intégrale prise en faisant le tour de la circonférence est, si a et b sont les valeurs limites de x,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx + \int_b^a \varphi(x)\,dx + \int_b^a -\psi(x)\,dx$$

ou

$$2\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

c'est-à-dire deux fois l'aire de la surface comprise entre la courbe et son diamètre ou l'aire même de cette courbe.

Ainsi, $\int dx\sqrt{R^2 - x^2}$ doit avoir pour période l'aire du cercle $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ou πR^2, et, en effet,

$$\int dx\sqrt{R^2 - x^2} = \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2} + \frac{1}{2}R^2 \arcsin\frac{x}{R},$$

dont la période est πR^2.

L'aire indéfinie d'une courbe composée d'anneaux fermés aura de même pour périodes les aires des surfaces des différents anneaux.

Cette explication de l'existence des périodes réelles, dans les cas où la différentielle placée sous le signe $\int$ est celle de l'aire d'une courbe fermée, a dû se présenter d'elle-même et de tout temps à tous les esprits, mais sans doute on y avait renoncé, parce qu'on ne pouvait s'en servir comme de modèle pour arriver à l'interprétation des périodes imaginaires : nous allons voir que la théorie des aires des conjuguées imaginaires fournira, dans des termes analogues et aussi simples, l'explication des périodes imaginaires des intégrales.

Il suffit pour cela, en effet, de remarquer que si une courbe réelle a pour conjuguées des courbes fermées, la somme des éléments de l'intégrale $\int y\,dx$, correspondants à un chemin quelconque parcouru sur les branches réelles de cette courbe, peut s'augmenter, à un endroit quelconque du chemin, de la somme des éléments correspondants au parcours entier de la circonférence de la conjuguée tangente en ce point à la courbe réelle; et qu'un premier tour achevé, on peut le recommencer un nombre quelconque de fois avant de poursuivre sur la courbe réelle; en sorte que la somme des éléments de l'intégrale correspondants à un parcours entier de cette conjuguée, si elle n'est pas nulle, doit nécessairement former la période de l'intégrale indéfinie qui représente l'aire de la courbe considérée.

Habituellement, quand on part d'un point pour y revenir, la somme des éléments introduits dans l'intégrale est nulle d'elle-même; mais il n'en sera pas ainsi lorsque le parcours se fera sur une conjuguée fermée, la somme des éléments représentera l'aire de cette courbe.

En effet, lorsque le point $[xy]$ parcourra de gauche à droite la moitié supérieure de la conjuguée, les éléments ydx de l'intégrale formeront, en s'ajoutant, l'aire du diamètre de la conjuguée, plus l'aire imaginaire comprise entre la conjuguée et son diamètre, au-dessus de ce dernier, et lorsque le point $[xy]$ parcourra en sens contraire la moitié inférieure de la conjuguée, les éléments de l'intégrale, ajoutés, formeront l'aire imaginaire comprise entre la conjuguée et son diamètre, au-dessous de ce dernier, moins l'aire du diamètre.

Quelle que soit l'expression trouvée de l'aire de la courbe considérée, comprise entre deux limites quelconques, elle devra donc admettre comme période la mesure de l'aire d'une quelconque des conjuguées fermées de cette courbe.

On serait en droit de conclure de là que les aires des conjuguées fermées d'une même courbe doivent être toutes égales entre elles, ou du moins que ces conjuguées se rangeront en quelques catégories dans chacune desquelles toutes les conjuguées auront même aire.

En effet, si l'intégrale ne doit avoir qu'une période imaginaire, il faudra bien que toutes les conjuguées fermées qui la donnent séparément aient même aire, et la raison qui légitime cette conclusion, doit être évidemment de nature à pouvoir s'étendre au cas où il y aurait plusieurs catégories de conjuguées fermées comprises entre des branches différentes de la courbe réelle.

Avant de fournir la démonstration directe du fait que nous venons de préjuger, nous remarquerons que les conjuguées qui ne touchent pas la courbe réelle sont nécessairement illimitées, parce que la courbe réelle n'ayant pas de tangentes parallèles à leurs cordes réelles, ces cordes s'étendent à l'infini dans les deux sens; et, en effet, toute parallèle à l'une d'elles coupe toujours la conjuguée correspondante dans le même nombre de points, puisqu'elle coupe la courbe réelle elle-même dans le même nombre de points.

Il résulte de là que les conjuguées qui ne touchent pas la courbe réelle, ne peuvent jamais être fermées ou avoir une aire finie, et que, par conséquent, le déplacement du point mobile $[xy]$ sur les conjuguées de cette espèce ne peut jamais donner lieu à la formation de périodes de l'intégrale.

Nous ne nous occuperons donc plus, dans ce qui va suivre, que des conjuguées qui touchent la courbe réelle.

Nous ferons remarquer cependant que l'enveloppe imaginaire, lorsqu'elle est fermée, peut elle-même donner naissance à la période. Ainsi, l'enveloppe imaginaire des courbes représentées par l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2$$

est l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

et l'intégrale qui exprime l'aire d'une quelconque de ces conjuguées a pour période l'aire πab de cette enveloppe, parce que ses coordonnées sont imaginaires sans parties réelles.

L'équation $y^4 + x^4 = a^4$ fournit un exemple analogue, mais où les deux enveloppes coïncident et fournissent la même période réelle; les deux conjuguées $C = \infty$, $C = 0$ se confondent aussi avec la courbe réelle entre les limites $x = \pm a$, $y = \pm a$, et la période imaginaire exprime l'aire commune de ces deux conjuguées.

Quant à l'équation

$$(x - a - a'\sqrt{-1})^2 + (y - b - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

que nous avons citée plus haut, la période de l'intégrale à laquelle elle donne lieu est bien

$$\pi(r + r'\sqrt{-1})^2;$$

mais elle ne fournit plus l'aire de l'enveloppe imaginaire, qui est

$$\pi(r + r')^2;$$

cependant, comme toutes les conjuguées que représente cette équation sont illimitées dans tous les sens, la période de l'intégrale n'a de rapport qu'à l'enveloppe imaginaire.

30. *Démonstration directe de l'équivalence des aires des conjuguées fermées d'une même catégorie.* — Nous avons pu conclure l'équivalence en surface des conjuguées fermées d'une même courbe, comprises dans une même catégorie (ce seront habituellement celles qui seront tangentes aux mêmes branches de la courbe réelle), de ce que la variabilité continue de leurs aires rendrait l'intégrale $\int y\,dx$ complétement indéterminée.

Cette démonstration, suffisante pour le cas où l'intégrale déjà obtenue se trouverait n'avoir qu'une période imaginaire, serait illusoire dans la plupart des autres cas. Mais soient $[x_0 y_0]$, $[x_1 y_1]$ les points réels où l'une des conjuguées fermées touche la courbe réelle, et $[x_0 + dx_0, y_0 + dy_0]$, $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$ ceux où une conjuguée infiniment voisine touche la même courbe réelle : l'intégrale aura la même valeur, soit que le point $[xy]$ décrive l'arc de conjuguée qui s'étend du point $[x_0 y_0]$ au point $[x_1 y_1]$, ou bien l'arc de la courbe réelle qui va du point $[x_0 y_0]$ au point $[x_0 + dx_0, y_0 + dy_0]$, l'arc de conjuguée qui va du point $[x_0 + dx_0, y_0 + dy_0]$ au point $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$, et enfin l'arc de la courbe réelle qui va du point $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$ au point $[x_1 y_1]$; la partie imaginaire de l'intégrale, dans les deux cas, aura donc la même valeur ; mais nous savons (nº **22**) que dans le premier cas, la partie imaginaire de l'intégrale représentera la moitié de l'aire de la première conjuguée, et, dans le second, la moitié de l'aire de la seconde; les aires de ces deux conjuguées sont donc égales.

On tire de là une conséquence qui peut avoir de l'intérêt, c'est que la différence des aires de deux diamètres d'une même courbe dans un intervalle où les cordes sont imaginaires, est égale à la différence des aires correspondantes aux arcs de la courbe réelle, qui se terminent aux points où ces diamètres la coupent.

La démonstration précédente rend aussi raison de ce fait, qu'une intégrale, prise entre deux limites réelles appartenant à deux branches voisines de la courbe réelle, qui comprennent entre elles des conjuguées fermées, ne peut comprendre, dans sa partie imaginaire, qu'un nombre impair de fois la demi-période correspondante à l'aire de ces conjuguées, tandis que c'est le contraire lorsque les deux limites appartiennent à une même branche.

31. *Exemples.* — Avant d'aller plus loin, nous citerons quelques exemples des faits que nous venons d'établir.

Soit d'abord l'intégrale

$$\frac{b}{a}\int dx\,\sqrt{x^2-a^2},$$

qui exprime l'aire indéfinie de l'hyperbole $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, elle est égale à

$$\frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

et a pour période $\pi ab\sqrt{-1}$. Cette quantité représente bien l'aire d'une quelconque des ellipses conjuguées de l'hyperbole, car ayant toutes un système de diamètres conjugués commun avec l'hyperbole, en vertu du théorème d'Apollonius, elles ont toutes même aire que l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

Suivant que x est positif ou négatif, $\mathrm{L}\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ est égal au logarithme arithmétique de $\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ plus $2k\pi\sqrt{-1}$, ou au logarithme arithmétique de $\dfrac{-x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+(2k+1)\pi\sqrt{-1}$, on voit donc que suivant que les limites de l'intégrale

$$\frac{b}{a}\int dx\sqrt{x^2-a^2}$$

sont prises sur une même branche ou sur les deux, la partie imaginaire de l'intégrale est $2k\dfrac{\pi ab\sqrt{-1}}{2}$ ou $(2k+1)\dfrac{\pi ab}{2}\sqrt{-1}$, elle contient un nombre pair ou impair de fois la demi-période.

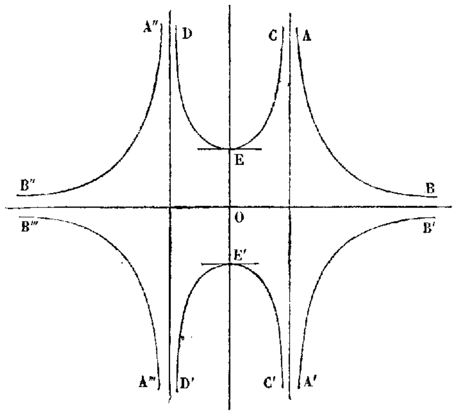
De même, $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\mathrm{L}x$ a pour période $2\pi\sqrt{-1}$, et cette quantité représente bien l'aire d'une quelconque des conjuguées de l'hyperbole équilatère $y=\dfrac{1}{x}$, car celle qui la touche aux extrémités de son axe transverse est le cercle dont le rayon est $\sqrt{2}$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\mathrm{L}(x+\sqrt{x^2-1})=\frac{1}{\sqrt{-1}}\arcsin x,$$

a aussi pour période $2\pi\sqrt{-1}$.

L'équation $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ représente en coordonnées réelles une courbe AB A'B' A''B'' A'''B''' (*fig.* 2), asymptote à l'axe des x et aux droites

Fig. 2.



$x=\pm 1$. Sa conjuguée à abscisses réelles DECD'E'C' est aussi asymptote aux droites $x = \pm 1$; les autres sont fermées, leur aire commune est $2\pi\sqrt{-1}$.

$2\pi\sqrt{-1}$ est aussi l'aire de la surface comprise entre les deux branches CED, C'E'D', de sorte que la conjuguée non fermée a, si l'on peut parler ainsi, la même aire que les conjuguées fermées.

On rencontre souvent des exemples semblables de courbes réelles ou imaginaires à branches infinies, dont l'aire finie forme période de l'intégrale qui représente leur aire indéfinie.

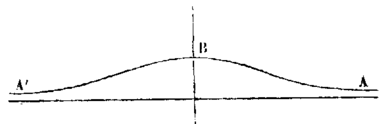
En voici quelques-uns. D'abord l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est arc sin x, dont la période est 2π.

L'équation $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ représente la courbe réelle CEDC'E'D' (*fig.* 2), la courbe imaginaire ABA'B'A''B''A'''B''', dont les abscisses sont réelles, et d'autres courbes imaginaires.

La période réelle 2π de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est l'aire de la surface comprise entre les deux branches réelles CED, C'E'D' comme la période $2\pi\sqrt{-1}$ de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ était l'aire de la surface comprise entre les deux mêmes branches imaginaires.

De même, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x$ a pour période π, qui est l'aire de la courbe ABA' (*fig.* 3), représentée par l'équation $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Fig. 3.

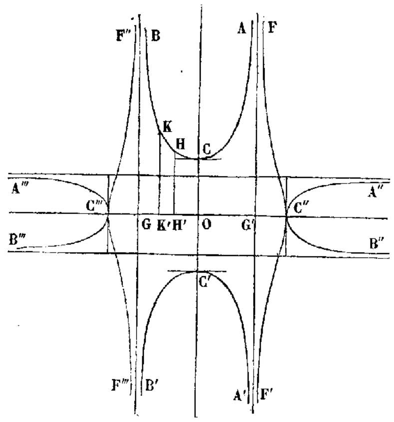


Nous terminerons par l'exemple de l'intégrale qui donne l'arc de l'ellipse,

$$\int dx \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}.$$

Cette intégrale a deux périodes, l'une réelle, l'autre imaginaire; en effet, l'équation $y = \sqrt{\frac{1 - e^2 x^2}{1 - x^2}}$ représente (*fig.* 4) la courbe réelle ACBA'C'B'A''C''B''A'''C'''B''', asymptote aux droites $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, symétrique par rapport aux deux axes, et ayant pour sommets les points C, C' situés sur l'axe des y à la distance 1 de l'origine, et les points C'', C''' situés sur l'axe des x à la distance $\frac{1}{e}$ plus grande que 1; la courbe imaginaire à abscisses réelles FC''F'F''C'''F''', et enfin d'autres courbes imaginaires fermées.

Fig. 4.



Or l'aire comprise entre la branche réelle BCA et l'axe des x est finie, car elle est moindre que l'aire fournie entre les mêmes limites -1 et $+1$ par l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, l'aire comprise entre les deux branches réelles BCA, B'C'A' est donc aussi finie : ce sera la période réelle de l'intégrale.

D'un autre côté, l'aire de la courbe imaginaire à abscisses réelles FC''F' est aussi finie, car elle est plus petite que l'aire fournie entre les mêmes limites, 1 et $\frac{1}{e}$, par l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$, qui est égale à $L\left(\frac{1}{e} + \sqrt{\frac{1}{e^2} - 1}\right)$. La somme des deux aires imaginaires FC''F' et F''C'''F''' pourra donc former la période imaginaire de l'intégrale, période qui se retrouverait dans l'aire d'une quelconque des conjuguées fermées du lieu en question.

En partant d'un point K quelconque de la courbe réelle, pour former l'aire correspondante à l'arc KH de cette courbe, on pourrait faire suivre au point mobile $[xy]$ le chemin KCAFC$''$F$'$A$'$C$'$B$'$F$'''$C$'''$F$''$BKH, et l'intégrale des éléments $y\,dx$ correspondants à ce parcours serait l'aire KK$'$H$'$H augmentée de la somme des deux périodes réelle et imaginaire [*].

32. *De la manière dont s'accroît l'intégrale.* — Le point $[xy]$ s'éloignant de sa position initiale, outre la quantité algébrique $\frac{y^2}{2C} - \frac{y_0^2}{2C_0}$, l'intégrale, à chaque instant, se compose de la portion de l'aire de la conjuguée, à laquelle appartient la limite inférieure, correspondante à l'arc de cette courbe, qui s'étend de cette limite au point de contact avec la courbe réelle; de la portion de l'aire de la courbe réelle correspondante à l'arc compris entre les points où elle touche les conjuguées qui passent par les points limites, cette aire étant d'ailleurs comprise entre les tangentes à la courbe en ces deux points; enfin de la portion de l'aire de la conjuguée, à laquelle appartient la limite supérieure, correspondante à l'arc de cette courbe, qui va du point où elle touche la courbe réelle à la limite supérieure.

Dans cette somme la première partie est fixe et les deux autres variables, la seconde est réelle, et la troisième se compose d'une partie réelle qui représente l'aire du diamètre de la conjuguée et d'une partie imaginaire qui représente l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre.

Lorsque le point $[xy]$ se déplace, la seconde partie de l'intégrale s'accroît de l'aire de la courbe réelle qui correspond à l'arc que vient de parcourir sur cette courbe le point où la touche la conjuguée qui passe au point mobile $[xy]$, et la troisième s'accroît dans ses deux par-

[*] Nous ne prétendons pas ici donner une démonstration à laquelle on pourrait objecter que de l'infini réel à l'infini imaginaire il n'y a pas continuité; les faits se passent comme si cette objection était sans force, et nous les citons; au reste, dans l'exemple dont il s'agit, comme dans tous les autres analogues, on pourrait, en transformant l'intégrale, substituer à une valeur infinie de y, une valeur nulle de cette variable, à une branche infinie, ayant une aire finie, un anneau fermé compris entre les mêmes limites, et la continuité reparaîtrait complète.

ties à mesure que le point $[xy]$ s'éloigne de la courbe réelle, sur la conjuguée où il se trouve.

Nous avons supposé, dans ce que nous venons de dire, que le point $[xy]$ restât sur les conjuguées qui touchent la courbe réelle; mais les faits se passent d'une manière analogue dans le cas contraire, seulement alors la partie intermédiaire de l'intégrale, celle qui correspond au parcours d'une portion de l'enveloppe imaginaire, ne représente plus toujours l'aire de cette enveloppe.

Les parties réelle et imaginaire de

$$\frac{y^2}{2C} - \frac{y_0^2}{2C_0}$$

varient avec la position du point $[xy]$; mais lorsque ce point revient à sa position initiale, quelque chemin qu'il ait suivi, $\frac{y^2}{2C}$ revient à sa valeur initiale $\frac{y_0^2}{2C_0}$, et la partie complémentaire s'évanouit; ce n'est donc pas cette partie complémentaire qui, dans ses variations, engendre les périodes soit réelles, soit imaginaires de l'intégrale.

33. *Détermination du nombre de chacune des périodes qu'on doit faire entrer dans la valeur de l'intégrale.* — Nous avons reconnu précédemment l'existence obligatoire des périodes dans tous les cas où la fonction sous le signe somme est l'ordonnée de courbes l'une réelle, les autres imaginaires, composées, l'une ou les autres d'anneaux fermés ou de branches infinies ayant des aires finies; nous venons de montrer que la partie complémentaire ne peut pas donner naissance à ces périodes : nous allons maintenant montrer de quelle manière elles s'engendrent, et quel nombre il faut en comprendre pour chacune d'elles dans la valeur de l'intégrale.

Supposons d'abord, pour simplifier, que la courbe, dont l'intégrale proposée exprime l'aire indéfinie, soit fermée et composée d'un seul anneau : l'intégrale n'aura qu'une seule période réelle, qui sera l'aire de la surface comprise dans l'intérieur de l'anneau.

D'après la théorie qui précède, cette période s'engendrera par le déplacement sur l'anneau réel du point où le touchera la conjuguée sur laquelle viendra se placer successivement le point $[xy]$; lorsque ce point de contact aura fait le tour entier de l'anneau, son aire intérieure aura été décrite, de telle sorte que si le point $[xy]$ reprenait sa position initiale, la somme des éléments de l'intégrale se réduirait à l'aire de l'anneau, et que si le point $[xy]$ revenait en un point différent du point de départ, mais situé sur la même conjuguée, la somme des éléments de l'intégrale représenterait l'aire intérieure de l'anneau, augmentée de l'aire correspondante à l'arc parcouru sur la conjuguée.

En d'autres termes, si le point $[xy]$ s'éloignant de la courbe réelle sur une conjuguée quelconque, la partie réelle de l'intégrale pouvait s'accroître sans limite de nouveaux éléments, cette intégrale ne comprendrait pas cependant un seul des éléments différentiels de l'aire qui forme la période; cette aire ne s'introduit dans la valeur de l'intégrale que par le déplacement sur l'anneau réel du point où le touche la conjuguée mobile, sur laquelle se trouve successivement le point $[xy]$, mais autant de tours ce point de contact fait sur l'anneau réel, autant de fois il faut ajouter la période à l'aire la plus simple que représente l'intégrale en raison de ses limites.

Ce nombre s'obtiendra en comptant le nombre de fois que la caractéristique C repassera par sa valeur initiale, l'angle dont il est la tangente ayant varié dans le même sens; et ces périodes devront être prises en plus ou en moins, suivant que la variation totale de l'angle dont il vient d'être parlé se sera faite dans un sens ou dans l'autre.

Les explications qui précèdent conviendraient évidemment au cas d'une intégrale ayant plusieurs périodes réelles, et d'une courbe ayant plusieurs anneaux fermés.

Dans les cas où la période réelle serait l'aire d'une branche infinie, pour compter le nombre de périodes qu'on devrait comprendre dans la valeur de l'intégrale, quoiqu'on pût le faire directement, ce qu'il y aurait habituellement de plus simple à faire, serait de transformer cette intégrale, de manière que la fonction sous le signe $\int$ devînt l'ordonnée d'une courbe fermée et finie.

Passons maintenant aux périodes imaginaires. La question paraît plus difficile au premier abord : rien, en effet, d'analogue à ce qui vient d'être dit, ne pourra plus en rendre compte; cependant on va voir que la réponse sera tout aussi aisée à former.

Chaque période imaginaire est l'aire de l'une quelconque des conjuguées fermées appartenant à une même catégorie, de sorte que si le point $[xy]$ se déplaçait sur une conjuguée non fermée, la partie imaginaire de l'intégrale pourrait augmenter indéfiniment, sans pour cela comprendre une seule partie d'une des périodes imaginaires.

D'un autre côté, lorsque le point $[xy]$ se déplace sur une conjuguée fermée, tant qu'il n'est pas revenu à son point de départ, la période n'est pas complète, et s'il se déplace en restant sur des conjugées fermées d'une même catégorie, la période n'est complète que lorsqu'il revient, après un tour entier en un point situé sur une nouvelle conjuguée, à une distance de la courbe réelle qui fournisse la même aire imaginaire que la distance du point de départ à la même branche de la courbe réelle. Par conséquent, tant que le point $[xy]$, s'éloignant du point de départ supposé imaginaire, n'a pas passé sur la courbe réelle, l'intégrale ne contient pas encore une moitié de la période; mais si, après avoir passé sur l'une des branches de la courbe réelle qui comprennent entre elles les conjuguées fermées dont il s'agit, le point $[xy]$ arrive à l'autre branche, l'intégrale pendant ce parcours se sera augmentée d'une demi-période positive ou négative, suivant le sens dans lequel aura marché le point mobile, et suivant aussi qu'il aura parcouru les branches supérieures ou inférieures des conjuguées sur lesquelles il aura passé; chaque fois ensuite que le chemin qu'il décrira viendra alternativement raser la courbe réelle sur ses deux branches, l'intégrale s'accroîtra d'une nouvelle demi-période.

Dans le compte à faire des périodes que doit comprendre l'intégrale, les passages des coordonnées x et y du point mobile, par des valeurs réelles, jouent donc le principal rôle; à chaque passage relevé, on devra reconnaître si le point $[xy]$ a changé ou non de côté par rapport au point de contact, avec la courbe réelle, de la conjuguée sur laquelle il est venu se placer; cela fait, on comptera autant moins deux de demi-périodes qu'on aura relevé de passages alternatifs sur l'une ou l'autre branche, sans rebroussement, en négligeant tous les retours consécutifs à la même branche qui n'auraient pas été séparés par des passages sur l'autre. Si le point $[xy]$, après avoir touché une des branches, revenait sur ses pas en restant du même côté du point de contact avec la courbe réelle de la conjuguée sur laquelle il se serait transporté, on défalquerait une demi-période lorsqu'il arriverait à l'autre branche.

En résumé, pour ce qui concerne les périodes imaginaires, le chemin suivi par le point $[xy]$ étant défini par une condition $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$ entre les parties réelles et imaginaires de ses coordonnées, il faudra chercher les points où ce chemin touche le lieu réel, c'est-à-dire chercher les points de rencontre des deux courbes $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, 0, y, 0) = 0$, voir comment se succèdent les contacts correspondants, si après quelques-uns d'entre eux le point $[xy]$ ne rebrousse pas chemin, et il sera ensuite toujours aisé de conclure.

34. La théorie que nous venons d'exposer ne suppose nullement que la fonction sous le signe *somme* soit donnée explicitement : si elle était définie, par rapport à la variable x, par une équation $f(x, y) = 0$, il suffirait toujours de construire la courbe $f(x, y) = 0$ et ses conjuguées pour connaître le nombre des périodes réelles ou imaginaires de l'intégrale $\int y\,dx$, et en obtenir la représentation par des aires définies qu'on pourrait évaluer avec toute l'approximation désirable au moyen de formules connues; enfin on pourrait encore, par les mêmes procédés généraux que nous avons indiqués plus haut, déterminer le multiple de chacune des périodes qu'on devrait comprendre dans la valeur de l'intégrale, d'après la route qu'aurait suivie le point $[xy]$ entre ses deux positions limites; on pourrait donc évaluer l'intégrale avec une approximation en quelque sorte indéfinie.

Sauf l'intégration même, cette théorie comprend donc l'étude complète des équations différentielles du premier ordre où n'entre que la variable, c'est-à-dire qui peuvent recevoir la forme $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$.

Par exemple l'intégrale générale de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - a^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + a^2 x = 0$$

n'aura pas de périodes, parce que l'équation

$$z^3 - a^2 z + a^2 x = 0$$

ne fournit aucun anneau fermé.

35. Lorsque l'équation différentielle qu'on se propose d'intégrer contient à la fois la fonction y et la variable indépendante x, les périodes de l'intégrale peuvent dépendre de la constante qu'introduit l'intégration. Dans ce cas les valeurs de y qui correspondent à une même valeur de x sont bien toujours les termes de diverses progressions par différence; mais les raisons de ces progressions ne sont plus des constantes absolues : elles dépendent, dans chacune des fonctions de x, que représente y, de la valeur de cette fonction qui correspond à une même valeur initiale de x. Ainsi, si l'on prend pour expression de y en x la fonction qui représente l'aire indéfinie d'une courbe fermée, qu'on différentie l'équation posée entre y et x, et qu'entre l'équation intégrale et sa différentielle on élimine un des paramètres de la courbe en question, il est clair que l'intégrale générale de l'équation différentielle obtenue sera toujours la fonction de x qui représente l'aire indéfinie considérée.

Mais le paramètre éliminé y sera représenté par la constante arbitraire introduite dans l'intégration, de sorte que la période de l'intégrale ne sera plus une constante absolue; elle ne restera la même que dans une même suite de valeurs de y.

Prenons par exemple l'équation

$$y = \mathrm{CL}\frac{x}{a}$$

qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{C}}{x},$$

l'élimination de C fournira

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\mathrm{L}\frac{x}{a}} = \frac{\frac{dx}{x}}{\mathrm{L}\frac{x}{a}} = \frac{d\mathrm{L}\frac{x}{a}}{\mathrm{L}\frac{x}{a}};$$

et l'intégration donnera

$$\mathrm{L}y = \mathrm{L}.\mathrm{L}\frac{x}{a} + \mathrm{K} = \mathrm{L}.\mathrm{CL}\frac{x}{a},$$

d'où

$$y = \mathrm{CL}\frac{x}{a}.$$

Ainsi l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\,\mathrm{L}\,\frac{x}{a}}$$

est simplement périodique. Mais la période de cette intégrale $\pi\,\mathrm{C}\sqrt{-1}$ dépend de la constante arbitraire.

Cette constante C est l'une des valeurs de y qui correspondent à la valeur initiale de x, $x_0 = ae$, toutes les autres sont représentées par la formule

$$y_0 + n\pi y_0\sqrt{-1}.$$

Pour déterminer les périodes de celle des fonctions y, définies par une équation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

qui, pour une valeur x_0 de x, aurait une de ses valeurs égale à y_0 il faudrait pouvoir construire et discuter la courbe qui aurait pour ordonnée $\frac{dy}{dx}$. Pour cela on pourrait différentier l'équation proposée et éliminer ensuite y afin d'obtenir une équation entre x et $\frac{dy}{dx}$; la discussion de cette équation pourrait, dans certains cas, faire reconnaître des anneaux fermés réels ou imaginaires dans la courbe qu'elle représenterait et dans ses conjuguées.

36. Quand les coefficients de l'équation $f(x, y) = 0$ sont imaginaires, habituellement la courbe réelle n'existe plus à proprement parler; quant à l'enveloppe imaginaire des conjuguées, il n'y a pas, dans l'hypothèse, de raisons pour qu'elle disparaisse.

L'enveloppe réelle se trouvant réduite à quelques points isolés, les conjuguées doivent naturellement passer par ces points; de sorte que, pour évaluer l'intégrale

$$\int y\,dx$$

entre des limites $[x_0\, y_0]$, $[x_1\, y_1]$ appartenant à des conjuguées différentes, on pourra imaginer que le point mobile $[xy]$ décrive la conjuguée à laquelle appartient le point $[x_0\, y_0]$, et parvienne en l'un des points réels représentés dans l'équation $f(x, y) = 0$, puis se rende de là au point $[x_1\, y_1]$, en suivant la conjuguée à laquelle appartient ce point $[x_1, y_1]$.

L'intégrale $\int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} y\, dx$, à la différence près de quantités algébriques, représenterait, dans ce cas, la somme des aires correspondantes aux arcs des conjuguées auxquelles appartiennent les limites, qui iraient de ces limites à un même point réel du lieu considéré.

Quoi qu'il en soit, quand on sait carrer les courbes renfermées dans une même équation littérale, on voit qu'on sait par là même, non-seulement carrer toutes les conjuguées de ces courbes, mais encore celles qui seraient fournies par la même équation, où l'on aurait attribué aux constantes des valeurs imaginaires.

Par exemple, les aires de toutes les courbes imaginaires que peut représenter l'équation

$$(A+A'\sqrt{-1})y^2 + (B+B'\sqrt{-1})xy + (C+C'\sqrt{-1})x^2 + (D+D'\sqrt{-1})y + (E+E'\sqrt{-1})x + F + F'\sqrt{-1} = 0,$$

pourront s'exprimer au moyen seulement des fonctions circulaires et logarithmiques.

Ces courbes, qui en coordonnées réelles seraient représentées par des équations du quatrième degré, sont peut-être les seules courbes de cet ordre dont les aires puissent s'exprimer sans fonctions elliptiques.

37. *Rectifications.* — La rectification des courbes imaginaires serait beaucoup plus difficile que la quadrature des mêmes courbes, nous ne l'avons pas tentée ; mais voici une remarque qui présente assez d'intérêt pour mériter d'être consignée : le long du lieu qui limite la portion du plan couverte par les points imaginaires, $\frac{dy}{dx}$ est réel et représente le coefficient angulaire de la tangente à ce lieu au point $[xy]$, $dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, abstraction faite du signe $\sqrt{-1}$, qu'on remplacerait par 1, représente donc l'élément curviligne du lieu, et

$$\int dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

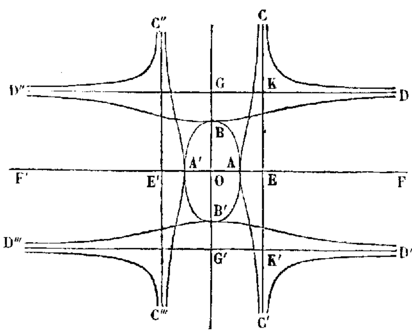
en représente un arc quelconque.

Si donc pour avoir l'arc de la courbe réelle représentée par l'équation proposée, on a posé $z = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, de sorte que l'aire de la courbe (zx) représente l'arc de la courbe (yx), l'aire de la conjuguée à ordonnées réelles de la courbe (zx), représentera proportionnellement l'arc de l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la courbe proposée.

En d'autres termes, l'arc de l'enveloppe imaginaire des conjuguées est fourni par la même intégrale qui donne l'arc de l'enveloppe réelle ou de la courbe proposée.

Prenons pour exemple celui de l'hyperbole $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$, pour laquelle $ds = dx\sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}$. Si l'on fait $z = a\sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}$, cette équation représentera la courbe réelle ABA′B′CDC′D′C″D″C‴D‴, dont la conjuguée à abscisses réelles est CAC′C″A′C‴, et la conjuguée à ordonnées réelles DBD″D′B′D‴,

Fig. 5.



le quotient par a de l'aire CDEF représentera l'arc de l'hyperbole proposée compté à partir du sommet, et le quotient par a de l'aire BODF, représentera l'arc de l'hyperbole conjuguée compté aussi à partir de son sommet.

L'intégrale $a\int dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}$ aura d'ailleurs pour période réelle l'aire fermée ABA′B′, et pour période imaginaire le quadruple de l'aire CAE ou le quadruple de l'aire DBG ou le double de l'aire d'un des deux anneaux fermés d'une conjuguée quelconque qui serait comprise entre CD et AB, C‴D‴ et A′B′ ou C′D′ et AB′, C″D″ et A′B.

La différence des arcs indéfinis des deux hyperboles conjuguées comptés à partir de leurs sommets respectifs et s'étendant jusqu'à des points indéfiniment éloignés, mais ayant leurs abscisses égales en valeur absolue, l'une réelle, l'autre imaginaire, sans partie réelle, sera représentée par

$$\left(\frac{\mathrm{CKD}+\mathrm{KEDF}}{a}\right)-\left(\frac{\mathrm{GKOE}+\mathrm{KEDF}-\mathrm{DGB}}{a}\right);$$

$\frac{\mathrm{GKOE}}{a}$ est égal à ea, $\frac{\mathrm{DGB}}{a}$ est le quart de la période imaginaire de l'intégrale

$$\int dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}},$$

période que nous désignerons par B; quant à $\frac{\mathrm{CKD}}{a}$, c'est la différence entre les longueurs infinies de l'hyperbole proposée et de son asymptote, comptées toutes deux depuis les points où $x=a$ jusqu'à des points ayant une même abscisse infinie : en effet, $\frac{\mathrm{CKD}}{a}$ est l'arc de l'hyperbole diminué de $\frac{\mathrm{KEDF}}{a}$; or $\frac{\mathrm{KEDF}}{a}$ ou $\int_a^x e\,dx$ représente bien la longueur de l'asymptote comptée depuis le point $x=a$, car cette asymptote fait avec l'axe des x un angle dont le cosinus est $\frac{1}{e}$.

La différence des arcs indéfinis d'une hyperbole et de sa conjuguée est donc égale au quart de la période imaginaire de l'intégrale qui donne l'arc de la première, plus la limite de la différence des longueurs de celle-ci et de son asymptote, comptées à partir du sommet de la courbe et du sommet du rectangle construit sur ses axes, moins la distance c du centre au foyer de la même hyperbole; ou bien en désignant par S et S′ les arcs des deux hyperboles et par l la longueur de l'asymptote,

$$S - S' = \frac{B}{4} + (S - l) - c,$$

d'où

$$\frac{B}{4} = (l - S') + c;$$

mais $l + c$ est la longueur de l'asymptote comptée à partir du centre; par conséquent, le quart de la période imaginaire de l'intégrale qui donne l'arc d'une hyperbole,

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2,$$

forme la limite de la différence entre les longueurs indéfinies de son asymptote, comptée à partir du centre et de l'hyperbole conjuguée, comptée à partir de son sommet, ces deux longueurs étant terminées en des points ayant mêmes abscisses.

Cela s'explique aisément; car le long des asymptotes considérées comme fournies par les solutions imaginaires dont la caractéristique est $\pm \frac{b}{a}$, $\frac{dy}{dx}$ est aussi réel et constamment égal à $\pm \frac{b}{a}$. En effet, si l'on pose

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' \pm \beta \frac{b}{a}\sqrt{-1},$$

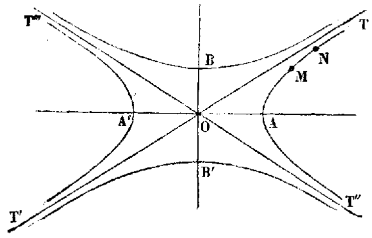
il en résulte

$$a^2 \alpha'^2 - b^2 \alpha^2 = - a^2 b^2 \quad \text{avec} \quad a\alpha' = \pm b\alpha.$$

Ce qui veut dire que α et α' doivent être infinis et conserver entre eux le rapport de a à b, $\frac{dy}{dx}$ se réduit donc à $\frac{b}{a}$.

Le long de l'asymptote, comme le long de l'hyperbole conjuguée, l'intégrale représente donc également le chemin parcouru; or, si pour avoir l'arc MN on en somme les éléments qui correspondraient au parcours MNTOT′B′T″OT‴BTN, on engendrera, en sus de l'arc MN, quatre fois la différence, imaginairement représentée, des distances

Fig. 6.



BT, OT, quantité qui doit former une période de l'intégrale, puisqu'on peut recommencer un nombre quelconque de fois le parcours des deux asymptotes et de l'hyperbole conjuguée avant de rentrer sur la courbe réelle.