

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans
la théorie des nombres (neuvième article)**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 4 (1859), p. 111-120.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__111_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR
QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES.
DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

NEUVIÈME ARTICLE.

Le mode de partition que nous avons appliqué, dans nos deux derniers articles, au nombre fondamental m (pair ou impair) que nos formules concernent, consiste à poser

$$m = m'^2 + m'' = m'^2 + 2^{\alpha''} d'' \delta'',$$

où m' est un entier quelconque, pair ou impair, positif ou négatif, ou même zéro, tandis que m'' est essentiellement positif, aussi bien que d'' et δ'' , lesquels, de plus, sont impairs : quant à l'exposant α'' , il peut se réduire à zéro, ou être plus grand que zéro, suivant les cas. C'est à l'ensemble des groupes m' , m'' et aux diverses valeurs des diviseurs $2^{\alpha''} d''$, δ'' que se rapportent les sommes doubles que nous avons considérées dans les articles cités. Il en sera de même, dans l'article actuel, pour la somme nouvelle

$$\sum \sum (-1)^{m''-1} \delta'' f(2^{\alpha''} d'' + m'),$$

dont nous voulons nous occuper, et où $f(x)$ désigne une fonction algébrique ou numérique paire, je veux dire telle, que

$$f(-x) = f(x),$$

pour toutes les valeurs de x dont on aura à faire usage : ces valeurs sont des entiers de même espèce que m , constamment pairs ou constamment impairs, suivant que m est pair ou impair.

Mais à côté de cette somme double figurera une somme simple

$$\sum \zeta_1(m_2) f(m_1),$$

où la fonction f sera la même, mais qui proviendra d'un mode de partition un peu différent et plus limité, en ce que pour compléter la valeur de m , en ajoutant un entier à un carré moindre que m , nous exigerons que cet entier soit pair. En d'autres termes, nous faisons

$$m = m_1^2 + 2m_2,$$

m_1 étant un entier positif, nul ou négatif, et m_2 un entier positif. C'est aux groupes m_1, m_2 , ainsi définis, que se rapporte la somme simple

$$\sum \zeta_1(m_2) f(m_1),$$

dans laquelle $\zeta_1(m_2)$ représente à l'ordinaire la somme des diviseurs de m_2 . On voit que les valeurs de m_1 ne peuvent être que paires quand m est pair, et qu'impaires quand m est impair : au contraire m_2 est indifféremment pair ou impair.

Cela posé, je trouve que les deux sommes indiquées sont généralement égales entre elles : il n'y a exception que quand m est un carré ; et alors l'excès de la première sur la seconde a pour valeur $mf(\sqrt{m})$. En d'autres termes, on a

$$(\S) \sum (-1)^{m''-1} d'' f(2^{m''} d'' + m') - \sum \zeta_1(m_2) f(m_1) = mf(\sqrt{m}), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

Pour $m = 1$, on ne peut prendre que $m' = 0, m'' = 1$, et il n'y a aucun groupe m_1, m_2 qui soit admissible. La première somme se réduit donc au seul terme $f(1)$ et l'autre à zéro : la valeur du second membre est en effet $f(1)$, l'unité étant un carré.

Pour $m = 2$, on a d'une part les trois systèmes

$$m' = 0, \quad m'' = 2; \quad m' = 1, \quad m'' = 1; \quad m' = -1, \quad m'' = 1;$$

et d'autre part celui-ci

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1.$$

Les deux quantités à retrancher ont donc la même valeur $f(0)$.

Il en est de même pour $m = 3$. Alors on doit prendre successivement

$$m' = 0, \quad m'' = 3; \quad m' = 1, \quad m'' = 2; \quad m' = -1, \quad m'' = 2,$$

et

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1; \quad m_1 = -1, \quad m_2 = 1.$$

La valeur commune des deux sommes est $2f(1)$.

Enfin pour $m = 4$, on a $4f(2)$ au second membre; et c'est bien là ce qui résulte des groupes à employer, savoir

$$m' = 0, \quad m'' = 4; \quad m' = 1, \quad m'' = 3; \quad m' = -1, \quad m'' = 3;$$

et

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 2.$$

Prenons, comme nous en avons le droit,

$$f(x) = x \sin(xt),$$

t désignant une constante quelconque; et la formule (ζ) nous donnera la valeur de la différence des deux sommes

$$\sum \sum (-1)^{m''-1} \partial'' (2^{z''} d'' + m') \sin(2^{z''} d'' + m') t$$

et

$$\sum m_1 \zeta_1(m_2) \sin(m_1 t),$$

dont la première peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} & \sum \sum (-1)^{m''-1} m'' \sin(2^{z''} d'' t) \cos m' t \\ & + \sum \sum (-1)^{m''-1} \partial'' m' \cos(2^{z''} d'' t) \sin m' t, \end{aligned}$$

en développant le sinus qu'elle contient et en supprimant les termes qui se détruisent deux à deux à cause des valeurs égales et de signes contraires que m' doit prendre. La différence dont il s'agit est généralement nulle: il n'y a exception que quand m est un carré, et alors elle est égale à

$$m \sqrt{m} \sin(t \sqrt{m});$$

mais ce cas ne se présentera jamais si nous supposons m impair et de la forme $8\nu + 5$. Développons les calculs dans cette hypothèse de

$m = 8\nu + 5$, en faisant de plus $t = \frac{\pi}{2}$: nous obtiendrons un résultat intéressant.

Nous avons trois sommes à considérer, savoir

$$\sum \sum (-1)^{m''-1} m'' \sin \left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(m' \frac{\pi}{2} \right)$$

et

$$\sum \sum (-1)^{m''-1} d'' m' \cos \left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(m' \frac{\pi}{2} \right),$$

puis

$$\sum m_1 \zeta_1(m_2) \sin \left(m_1 \frac{\pi}{2} \right) :$$

le total des deux premières équivaut à la troisième.

On n'aura égard, dans

$$\sum \sum (-1)^{m''-1} m'' \sin \left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(m' \frac{\pi}{2} \right),$$

qu'aux valeurs paires de m' , vu que pour les autres $\cos \left(m' \frac{\pi}{2} \right) = 0$.

Ainsi on fera successivement $m' = 0, m'' = \pm 2, \dots, m' = \pm 2\mu$, en désignant par $4\mu^2$ le plus grand carré pair contenu dans m . A ces valeurs de m' répondront les valeurs de m'' que voici : $m'' = m, m'' = m - 4, \dots, m'' = m - 4\mu^2$. Elles sont toutes impaires, en sorte que toujours

$$(-1)^{m''-1} = 1, \quad \alpha'' = 0, \quad \sin \left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(d'' \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^{\frac{d''-1}{2}}.$$

Cela étant, posons à l'ordinaire, pour tout nombre impair $m = d\delta$,

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} = \rho(m);$$

et nous trouverons que la somme dont nous nous occupons revient à

$$m\rho(m) - 2(m-4)\rho(m-4) + 2(m-16)\rho(m-16) + \dots \\ \pm 2(m-4\mu^2)\rho(m-4\mu^2).$$

On la simplifie d'ailleurs, en se rappelant l'équation

$$\rho(m) - 2\rho(m-4) + 2\rho(m-16) - \dots \pm 2\rho(m-4\mu^2) = 0,$$

que nous avons donnée dans notre huitième article. Il reste simplement

$$8\rho(m-4) - 32\rho(m-16) + \dots \mp 8\mu^2\rho(m-4\mu^2).$$

Dans la somme

$$\sum \sum (-1)^{m''-1} \delta'' m' \cos \left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(m' \frac{\pi}{2} \right),$$

ce sont les valeurs paires de m' que l'on doit négliger comme donnant

$$\sin \left(m' \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Les valeurs de m' à employer sont donc $m' = \pm 1, m' = \pm 3, \dots, m' = \pm \omega$, en désignant par ω^2 le plus grand carré impair contenu dans m . Comme m est de la forme $8\nu + 5$ et m'^2 de la forme $8\nu + 1$, l'équation

$$m'' = m - m'^2$$

nous montre que m'' est ici le quadruple d'un nombre impair i , en sorte que

$$m'' = 2^{\alpha''} d'' \delta'' = 4i, \quad \alpha'' = 2, \quad \cos \left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2} \right) = 1, \quad (-1)^{m''-1} = -1 :$$

de plus δ'' représente un quelconque des diviseurs de i . Nous voyons donc que

$$\sum \sum (-1)^{m''-1} \delta'' m' \cos \left(2^{\alpha''} d'' \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(m' \frac{\pi}{2} \right)$$

s'exprime finalement par

$$-2\zeta_1 \left(\frac{m-1}{4} \right) + 6\zeta_1 \left(\frac{m-9}{4} \right) - 10\zeta_1 \left(\frac{m-25}{4} \right) + \dots \pm 2\omega\zeta_1 \left(\frac{m-\omega^2}{4} \right).$$

Nous ferons passer cette quantité, changée de signe, dans le second membre de l'équation que nous venons de former, afin de l'ajouter à

$$\sum m_1 \zeta_1(m_2) \sin \left(m_1 \frac{\pi}{2} \right),$$

qui dépend des mêmes fonctions ζ_1 . On doit faire successivement

$$m_1 = \pm 1, \quad m_1 = \pm 3, \quad m_1 = \pm 5, \dots, \quad m_1 = \pm \omega,$$

avec

$$m_2 = \frac{m - m_1^2}{2}.$$

Or m_2 se trouve être ainsi le double d'un impair (dans notre hypothèse de $m = 8\nu + 5$). Par suite

$$\zeta_1(m_2) = 3\zeta_1\left(\frac{m_2}{2}\right) = 3\zeta_1\left(\frac{m-m_1}{4}\right).$$

La somme

$$\sum m_1 \zeta_1(m_2) \sin\left(m_1 \frac{\pi}{2}\right)$$

est donc égale à

$$6\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right) - 18\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right) + 30\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right) - \dots \pm 6\omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right).$$

Cela nous conduit, après la suppression du facteur 8 dans les deux membres, à conclure définitivement que les deux quantités suivantes

$$\rho(m-4) - 4\rho(m-16) + 9\rho(m-36) - \dots \pm \mu^2\rho(m-4\mu^2)$$

et

$$\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right) - 3\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right) + 5\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right) - \dots \pm \omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right),$$

ont la même valeur, pour tout entier m de la forme $8\nu + 5$. Pour $m = 37$, par exemple, on doit avoir

$$\rho(33) - 4\rho(21) + 9\rho(1) = \zeta_1(9) - 3\zeta_1(7) + 5\zeta_1(3),$$

chose aisée à vérifier en observant que

$$\rho(33) = 0, \quad \rho(21) = 0, \quad \rho(1) = 1, \quad \zeta_1(9) = 13, \quad \zeta_1(7) = 8, \quad \zeta_1(3) = 4:$$

la valeur commune des deux membres est 9.

L'égalité que nous venons d'obtenir entraîne des corollaires dont il est bon de dire un mot.

Posons, de toutes les manières possibles,

$$m = 4s^2 + s_1^2 + s_2^2,$$

s étant un entier positif, tandis que s_1 et s_2 sont des entiers indifféremment positifs ou négatifs, ou même zéro. La somme

$$\sum (-1)^{s-1} s^2,$$

étendue à toutes les valeurs de s , dont plusieurs peuvent être égales

entre elles, s'exprime aisément à l'aide du signe ρ , dès qu'on se rappelle que $4\rho(m)$ est le nombre des représentations de m par une somme de deux carrés. Dès lors, en effet, on voit que les diverses valeurs possibles de s qui sont contenues dans la suite $1, 2, 3, \dots, \mu$ (en continuant à désigner par $4\mu^2$ le plus grand carré pair inférieur à m) répondent aux représentations de $m - 4s^2$ par une somme de deux carrés $s_1^2 + s_2^2$, et dès lors chacune d'elles figure dans l'ensemble des équations

$$m = 4s^2 + s_1^2 + s_2^2$$

un nombre de fois marqué par

$$4\rho(m - 4s^2).$$

La somme

$$\sum (-1)^{s-1} s^2$$

est donc égale à quatre fois celle-ci :

$$\rho(m - 4) - 4\rho(m - 16) + 9\rho(m - 36) - \dots \pm \mu^2 \rho(m - 4\mu^2).$$

Posons, en second lieu,

$$m = n^2 + 4(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2),$$

n étant un entier positif et impair, tandis que n_1, n_2, n_3, n_4 sont des entiers à volonté pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs. Nous trouverons semblablement (dans notre hypothèse de $m = 8\nu + 5$) que la somme

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

est égale à huit fois celle-ci :

$$\zeta_1\left(\frac{m-1}{4}\right) - 3\zeta_1\left(\frac{m-9}{4}\right) + 5\zeta_1\left(\frac{m-25}{4}\right) - \dots \pm \omega\zeta_1\left(\frac{m-\omega^2}{4}\right),$$

ω^2 étant toujours le plus grand carré impair contenu dans m . Il suffit de se rappeler que $8\zeta_1(m)$ est le nombre des représentations de l'entier impair m par une somme de quatre carrés, et d'appliquer ce théorème à $\frac{m-n^2}{4}$, en donnant à n les valeurs successives $1, 3, 5, \dots, \omega$.

Le résultat obtenu plus haut concernant les fonctions ρ et ζ_1 nous

apprend donc que

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 2 \sum (-1)^{s-1} s^2,$$

ce qui est assez curieux.

Soit, par exemple, $m = 5$. Les équations

$$\begin{aligned} 5 &= 4 \cdot 1^2 + 1^2 + 0^2, & 5 &= 4 \cdot 1^2 + 0^2 + 1^2, \\ 5 &= 4 \cdot 1^2 + (-1)^2 + 0^2, & 5 &= 4 \cdot 1^2 + 0^2 + (-1)^2, \end{aligned}$$

nous donnent

$$\sum (-1)^{s-1} s^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

tandis que les équations

$$\begin{aligned} 5 &= 1^2 + 4(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2) = 1^2 + 4[(-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2], \\ 5 &= 1^2 + 4(0^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2) = 1^2 + 4[0^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2], \\ 5 &= 1^2 + 4(0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2) = 1^2 + 4[0^2 + 0^2 + (-1)^2 + 0^2], \\ 5 &= 1^2 + 4(0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2) = 1^2 + 4[0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2], \end{aligned}$$

prouvent que

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 8,$$

ce qui est bien le double de 4.

Au lieu de décomposer m sous la forme

$$n^2 + 4(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2),$$

on aurait pu décomposer ce nombre ($m = 8\nu + 5$) en une somme de cinq carrés à racines impaires et positives, de manière à avoir

$$m = r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2,$$

les entiers r, r_1, r_2, r_3, r_4 étant tous positifs impairs, tandis que tout à l'heure n seul était soumis à cette condition. Il faudra donc prendre successivement pour r , comme on le faisait pour n , les valeurs 1, 3, 5, ..., ω , puis décomposer en quatre carrés impairs, à racines positives, l'entier $m - r^2$, qui est le quadruple du nombre impair

$$\frac{m - r^2}{4}.$$

Pour chaque valeur de r le nombre des décompositions dont il s'agit est, comme on le sait,

$$\zeta_4 \left(\frac{m-r^2}{4} \right).$$

La somme

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

étendue à toutes les valeurs de r égales ou inégales dans l'ensemble des décompositions, s'exprime donc par

$$\zeta_4 \left(\frac{m-1}{4} \right) - 3\zeta_4 \left(\frac{m-9}{4} \right) + 5\zeta_4 \left(\frac{m-25}{4} \right) - \dots \pm \omega \zeta_4 \left(\frac{m-\omega^2}{4} \right).$$

Il s'ensuit que l'égalité

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 2 \sum (-1)^{s-1} s^2$$

peut être remplacée par celle-ci :

$$\sum (-1)^{s-1} s^2 = 4 \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

Pour $m = 5$, le premier membre est égal à 4. Il faut donc qu'on ait alors

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r = 1.$$

Or cela est vrai ; car 5 ne peut se décomposer en cinq carrés à racines positives impaires que d'une seule manière, où $r = 1$:

$$5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2.$$

Pour le nombre 13, qui est aussi de la forme $8\nu + 5$, on trouvera (quoique le nombre des décompositions soit beaucoup plus grand) les mêmes valeurs pour nos sommes, savoir

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r = 1, \quad \sum (-1)^{s-1} s^2 = 4, \quad \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 8.$$

Mais pour $m = 21$, il vient

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r = -6, \quad \sum (-1)^{s-1} s^2 = -24, \quad \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = -24.$$

Toujours on a

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = 2 \sum (-1)^{s-1} s^2 = 8 \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

Revenons à l'équation générale (ζ) afin d'indiquer au moins la formule importante qu'elle fournit quand on y pose

$$f(x) = \cos(xt),$$

t étant une constante quelconque. On voit d'abord que la différence des deux sommes

$$\sum \sum (-1)^{m''-1} \delta'' \cos(2^{z''} d'' + m') t$$

et

$$\sum \zeta_1(m_2) \cos m_1 t$$

est généralement nulle : il n'y a exception que quand m est un carré, auquel cas elle devient

$$m \cos(t\sqrt{m}).$$

Mais en développant $\cos(2^{z''} d'' + m') t$, et en supprimant les termes égaux et de signes contraires qui naissent du double signe que m' peut prendre, on a un résultat plus élégant, savoir

$$\sum \sum (-1)^{m''-1} \delta'' \cos(2^{z''} d'' t) \cos m' t - \sum \zeta_1(m_2) \cos m_1 t = m \cos(t\sqrt{m}), \text{ ou } = 0,$$

suivant que m est ou n'est pas un carré.

