

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BRETON

**Deuxième supplément aux recherches nouvelles sur les Porismes
d'Euclide. Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M.
Vincent des textes de Pappus et de Proclus relatifs aux Porismes**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 3 (1858), p. 89-142.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3_89_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

DEUXIÈME SUPPLÉMENT

AUX

RECHERCHES NOUVELLES SUR LES PORISMES D'EUCLIDE.

*Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M. Vincent
des textes de Pappus et de Proclus relatifs aux Porismes ;*

PAR M. BRETON (DE CHAMP),

Ingenieur des Ponts et Chaussées.

Dans le *Post-scriptum* placé à la suite du *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* [*], j'ai annoncé que je répondrais à la *Notice* publiée sur le même sujet par M. Vincent. L'éminent helléniste a publié depuis une *seconde Notice sur les Porismes*. Je me propose de traiter ici avec détail les diverses questions soulevées par ces deux écrits [**].

La partie essentielle du travail de M. Vincent est sa traduction nouvelle des textes de Pappus et de Proclus relatifs aux Porismes, qu'il oppose à la mienne et qui en diffère en une foule d'endroits, tant pour la forme que pour le fond. Il n'est pas difficile de voir, en les compa-

[*] Je rappelle que les *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* ont été insérées dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. XX. Le *Supplément* a paru dans le même recueil, 2^e série, t. II, sous ce titre : *Observations sur le Mémoire de M. Housel intitulé : les Porismes d'Euclide*. Le titre principal : *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide*, a été omis. Il n'existe que sur les exemplaires tirés à part.

[**] La *première Notice* de M. Vincent a été publiée dans le n° 10 du journal *la Science*, année 1857, 1^{er} février; mes *Objections* ont été insérées les 2, 5, et 9 avril suivant dans les n°s 27, 28 et 29 du même journal; enfin la *seconde Notice* de M. Vincent a paru les 17 et 21 mai, même année, dans les n°s 40 et 41.

rant l'une à l'autre, qu'il ne s'agit de rien moins qu'une *cinquantaine de contre-sens* (pour ne pas parler d'autres défauts), qui se trouveraient dans ma traduction, si celle de M. Vincent était exacte. Aussi a-t-il d'abord déclaré tout net que j'avais fait fausse route. Mais il me sembla que je pouvais sans trop de témérité ne point souscrire à cette condamnation si formelle de mes idées. En effet, les traductions que M. Vincent donnait des définitions du *théorème* et du *problème*, qu'on trouve dans Pappus immédiatement avant la première définition du *Porisme*, et sur le sens desquelles il est impossible de se tromper, étaient évidemment inadmissibles. Celle qu'il donnait ensuite de la première définition du *Porisme* n'avait rien de commun avec le texte, ni pour le sens, ni même pour les termes. Et s'il traduisait la seconde *mot à mot*, il y ajoutait une *interprétation* qui ne pouvait en aucune façon satisfaire le sentiment des choses géométriques. D'après ces remarques et d'autres encore, il me parut certain que M. Vincent devait s'être laissé entraîner par quelque idée préconçue, et je crus convenable, avant de publier ce que j'avais à dire pour la justification de mon travail, d'appeler l'attention sur plusieurs parties du sien, desquelles il me semblait résulter que c'était lui-même qui se trompait. C'est pour répondre aux *Objections* que je présentai alors, qu'il a publié sa *seconde Notice*. Le savant helléniste avoue qu'il s'est trompé sur quelques points, mais il maintient *l'ensemble* de son interprétation, voulant bien reconnaître toutefois que j'ai donné une première approximation, au lieu de m'être complètement fourvoyé, comme il le disait d'abord; et il croit avoir fourni une seconde approximation d'après la mienne, ou, en d'autres termes, s'être approché du but plus que moi. Or il ne m'est pas possible de m'en tenir à cette concession : avec des manières de voir aussi opposées, si l'un de nous s'est approché du but, l'autre a dû nécessairement s'en écarter tout à fait. C'est ce dont on jugera par la discussion qui va suivre.

Au surplus, le présent article n'est pas seulement une justification de ce que j'ai avancé dans le Mémoire attaqué par M. Vincent, mais encore un appel à M. Vincent *mieux informé*. On verra en effet, par diverses remarques, qu'il avait condamné ce travail avant d'en avoir pris une entière connaissance. Croyant ma traduction tout à fait défectueuse, il a cru sans doute pouvoir se dispenser de lire le com-

mentaire dans lequel je m'étais efforcé de l'éclaircir et de la rendre plausible.

Pour mettre le lecteur à même de suivre plus facilement la discussion, je donne ci-dessous, l'une à côté de l'autre, la traduction de M. Vincent et la mienne, en faisant toutefois profiter celle-ci des rectifications que j'ai proposées dans le § IV du *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, et en y apportant diverses améliorations de détail, dont quelques-unes ont pour objet de faire droit à celles des observations de mon savant adversaire dont j'ai reconnu la justesse. On les trouvera indiquées dans les annotations qui font suite à ces deux traductions. Je suppose, bien entendu, que le lecteur a sous les yeux ma première traduction et les textes grecs dont elle est accompagnée.

Notice de Pappus sur les Porismes.

TRADUCTION DE M. BRETON.

« Après les *Contacts*, viennent les *Porismes* d'Euclide, en trois livres, recueil disposé avec l'art le plus ingénieux (*a*), tant pour la résolution des problèmes difficiles que pour la découverte des conséquences des hypothèses (*b*), et présentant, à cet effet, beaucoup de choses qui de leur nature s'offrent en abondance illimitée (*c*). Il n'en a toutefois été ajoutée aucune à celles qu'Euclide le premier a formulées, si ce n'est par certains [géomètres] qui, avant nous, ont mal à propos opposé de secondes formules à celles d'un petit nombre de ces choses, chacune [de ces choses] étant à la vérité présentée un certain nombre de fois, comme nous l'expliquons (*d*), mais Euclide ne donnant de chacune d'elles qu'une seule formule qui en est l'expression la plus claire (*e*). La théorie en est fine et naturelle, et nécessaire et très-générale, et elle fait les délices de ceux qui savent voir et trouver (*f*). Leurs diverses espèces ne sont, quant à l'apparence, ni des théorèmes ni des problèmes, mais tiennent en quelque sorte le milieu entre les deux; de telle façon qu'il est facultatif (*g*) d'en mettre les énoncés sous la forme qui con-

TRADUCTION DE M. VINCENT.

« Après les *Contacts*, il y a les *Porismes* d'Euclide, en trois livres, recueil très-riche en artifices variés (*a*), tout préparés pour la solution des problèmes les plus difficiles ainsi que pour les constructions (*b*), toutes choses qui, de leur nature, se présentent en foule innombrable (*c*). On n'a rien ajouté aux écrits primitifs qui sont dus à Euclide, si ce n'est que plusieurs de nos devanciers se montrant en cela peu judicieux, ont appliqué de nouvelles rédactions sur quelques-unes des siennes; mais chaque porisme étant susceptible d'un certain nombre de démonstrations, comme nous l'avons fait voir (*d*), Euclide avait choisi, pour chacun d'eux, la plus simple et la plus lumineuse (*e*). Quoi qu'il en soit, les porismes présentent une théorie subtile, naturelle cependant, nécessaire même, du reste très-générale, et bien faite pour plaire à ceux qui savent apercevoir et déduire des conséquences (*f*). Les diverses espèces de porismes ne sont entièrement ni des théorèmes ni des problèmes; ils ont plutôt une forme intermédiaire, mais de telle sorte que leurs énoncés peuvent être présentés (*g*) comme appartenant, soit à des

TRADUCTION DE M. BRETON.

vient aux théorèmes aussi bien que sous celle qui convient aux problèmes; d'où il est résulté que, de beaucoup de géomètres, les uns estiment qu'elles appartiennent au genre des théorèmes, tandis que d'autres, ne tenant compte que de la forme des énoncés (h), les considèrent comme appartenant au genre des problèmes.

» Mais les différences entre ces trois choses ont été mieux connues des Anciens, ainsi qu'on le voit par leurs définitions; car ils disaient que le théorème est une vérité que l'on énonce et qu'il faut rendre évidente par une démonstration (i), tandis que le problème est un but que l'on propose et qu'il s'agit d'atteindre par une construction (j); mais que le Porisme est une chose dont la découverte est proposée (k). Cette définition du Porisme a été changée (l) par les modernes (m), lesquels, hors d'état de trouver tout [ce qui est proposé] (n), mais se prévalant de ce qu'ils voyaient dans ces éléments [des Porismes] (o) et se bornant à y montrer l'une quelconque des choses cherchées (p) sans la trouver [par eux-mêmes] (q), ont, par suite, sans tenir compte de la définition [précitée] (r) et de ce qui est enseigné (s), écrit ceci d'après ce qui arrive [en effet aux Porismes] (t): « Le Porisme est ce qu'il » faut ajouter à l'hypothèse [pour que celle- » ci devienne l'énoncé] d'un théorème local » (u). » Dans ce genre de Porismes (v), les Lieux sont compris comme espèce, et ils abondent (x) dans les résultats des recherches (y). Ceux des Porismes [qui ne sont pas des lieux] étant mis à part (z), cette espèce est réunie sous un titre particulier et donnée séparément (a'), à cause qu'elle est beaucoup plus nombreuse que les autres. En effet, parmi les lieux, les uns sont *plans*, d'autres *solides*, d'autres *linéaires*, et il y a en outre ceux *aux moyennes* (b').

» Il arrive encore aux Porismes ceci, de présenter des énoncés très-peu explicites, où plusieurs choses sont ordinairement sous-en-

TRADUCTION DE M. VINCENT.

théorèmes, soit à des problèmes. Par suite, il arrive aussi que beaucoup de géomètres, n'ayant égard qu'à la forme des énoncés (h), supposent, les uns, que ces sortes de propositions sont des théorèmes, les autres, que ce sont des problèmes.

» La différence de ces trois choses était mieux connue des Anciens, comme le prouvent les définitions qu'ils en donnent. Ils disaient, en effet, que le théorème est un raisonnement fait pour démontrer une proposition énoncée (i), que le problème est une opération faite pour exécuter une construction proposée (j), et qu'enfin le Porisme est ce qu'on ajoute pour mettre à profit un résultat obtenu (k). Cette définition du Porisme a été modifiée (l) par certains géomètres modernes (m), peu capables de tirer parti des connaissances acquises (n) et de s'élever au-dessus des simples éléments (o), obligés ainsi de se renfermer dans l'évidence des seuls points mis en question (p), mais sans pouvoir en faire aucune application (q): de sorte que, s'appuyant d'ailleurs sur la définition (r) et sur la théorie (s), ils ont avancé, d'après les circonstances signalées ci-dessus (t), que « le Porisme est ce qui » manque à l'hypothèse d'un théorème local (u). » En effet, dans le genre des Porismes (v), il y a ce que l'on nomme les *Lieux*. Aussi les porismes abondent-ils (x) dans le livre intitulé: *Lieux communs de l'analyse* (y); mais en les mettant à part (z), on a pu en former un recueil auquel on a donné un titre particulier et qui a reçu une plus grande publicité, vu l'abondance relative de cette espèce de questions comparativement aux autres. Quant aux Lieux en général, ils se rapportent les uns aux plans, les autres au solides, d'autres encore aux lignes, et d'autres enfin aux moyennes (b').

» Ce n'est pas tout, et il arrive encore ceci aux porismes: c'est de présenter des énoncés tronqués, à cause de la diversité, de la va-

TRADUCTION DE M. BRETON.

tendues, ce qui est une cause d'incertitude (c'); de sorte que beaucoup de géomètres ne saisissent qu'en partie ce dont il s'agit, et que ce qu'il y a de plus essentiel leur échappe (d').

» Quant à réunir un grand nombre de propositions dans un seul énoncé (e'), cela n'est guère possible dans les Porismes (f'), parce qu'Euclide lui-même n'en donne pas beaucoup de chaque espèce (g'), mais seulement un ou peu comme échantillons pris dans le grand nombre (h'). Cependant (i') on trouve au commencement du premier livre plusieurs propositions analogues entre elles, appartenant à cette espèce des *lieux* plus abondamment répandue que les autres; leur nombre s'élève à dix (j'). C'est pourquoi, trouvant possible de les comprendre dans un seul énoncé, nous écrivons celui-ci comme il suit :

« Si dans un système de quatre droites » tel, que, deux d'entre elles formant un » angle, les deux autres se coupent dans » l'intérieur de cet angle ou à l'extérieur ou » bien soient parallèles (k'), trois de leurs » points d'intersection sont rendus fixes sur » l'une d'elles ou deux seulement sur l'une des » droites parallèles dans le dernier cas, et » que les points restants, un seul excepté, » soient assujettis à demeurer chacun sur » une droite fixe (l'), le dernier point de- » meurera pareillement sur une droite fixe » (m'). »

» Il ne s'agit ici que de quatre droites (n') telles, que pas plus de deux ne se coupent en un seul point; mais ce que l'on ne sait pas, c'est que la même chose est vraie pour un nombre quelconque de droites, de cette manière : « Tant de droites qu'on voudra se » coupant les unes les autres, mais pas plus » de deux en un même point, si tous les » points où l'une d'elles est rencontrée par » les autres sont fixes, et que chacun des

TRADUCTION DE M. VINCENT.

riété inhérentes au grand nombre des choses qui y sont communément sous-entendues (c'), d'où il suit que beaucoup de géomètres, ne les considérant que sous une partie de leurs faces, laissent de côté des points très-essentiels de leur constitution (d').

» En effet, d'un énoncé unique faire ressortir de nombreuses propriétés (e'), c'est une chose absolument impossible en ces matières (f'), et c'est pourquoi Euclide lui-même n'a pas multiplié les développements dans chaque groupe (g'), mais s'est contenté de présenter, à titre d'exemple, un seul cas ou tout au plus quelques-uns choisis sur la totalité (h'). C'est ainsi que (i'), pour base des données de son premier livre, il prend des propositions analogues entre elles, tirées de cette espèce de lieux si abondante qui lui en fournit une dizaine (j'), et dont nous-même, ayant trouvé qu'il était possible de comprendre tous ces énoncés dans un seul, nous avons rédigé la formule comme il suit :

« Etant données quatre droites se coupant » deux à deux, de manière que l'une étant » couchée dans un sens, l'autre soit couchée en sens contraire, ou lui soit parallèle (k') : si trois points sont donnés sur » l'une d'elles, ou deux seulement dans le » cas du parallélisme, et que les autres, » moins un, soient situés chacun sur une » droite donnée (l'), le dernier sera également situé sur une droite donnée (m'). »

» Il ne s'agit ici que de quatre droites (n') telles, que pas plus de deux ne se coupent en un seul point; mais ce que l'on ne sait pas, c'est que la même chose est vraie pour un nombre quelconque de droites, de cette manière : « Tant de droites que l'on voudra » se coupant les unes les autres, mais pas » de deux en un même point : si tous les » points où l'une d'elles est rencontrée par » les autres sont donnés, chacun des points

TRADUCTION DE M. BRETON.

» points où l'une de ces dernières est coupée par l'une des droites restantes soit assujetti à demeurer sur une droite fixe (o'); ou plus généralement: tant de droites qu'on voudra se coupant les unes les autres, mais pas plus de deux en un même point, si tous les points où l'une d'elles est rencontrée par les autres sont fixes, et que parmi les points d'intersection de ces dernières, lesquels forment un nombre triangulaire, il s'en trouve autant d'assujettis à demeurer chacun sur une droite fixe (p') qu'il y a d'unités dans le côté de ce nombre, de telle sorte que trois de ces points ne puissent être les sommets de l'un des triangles [formés par les droites mobiles] (q'), chacun des points d'intersection restants sera pareillement assujetti à demeurer sur une droite fixe (r'). »

» Il est vraisemblable que l'auteur des *Éléments* n'ignorait pas cette extension, mais n'a fait qu'en poser le point de départ. Et il paraît avoir répandu dans tous ses Porismes les principes et les germes seulement (s') de nombreuses et grandes foules [de propositions] (t'). Il faut distinguer chacune [de ces foules] non pas par les différences des hypothèses, mais par celles des choses qui arrivent ou sont cherchées (u'). Car les hypothèses diffèrent toutes les unes des autres, étant très-particulières, mais chacune des choses qui arrivent ou qui sont cherchées se présente unique et la même dans plusieurs hypothèses différentes (v').

» Voici en conséquence, pour le premier livre, le genre des choses cherchées dans les propositions (x') (la figure est au commencement du n° 7) (y'):

« Si de deux points fixes on mène deux droites se coupant sur une droite fixe, et que l'une d'elles retranche d'une droite fixe un segment à partir d'un point donné sur cette dernière, la seconde retranchera

TRADUCTION DE M. VINCENT.

» où l'une de ces dernières est rencontrée par les droites restantes se trouve en même temps sur une droite donnée (o'). Ou, plus généralement: Tant de droites que l'on voudra se coupant les unes les autres, mais pas plus de deux en un même point: si tous les points où l'une d'elles est rencontrée par les autres sont donnés, et que parmi les points d'intersection de ces dernières, lesquels forment un nombre triangulaire, on en considère autant qu'il y a d'unités dans le côté de ce nombre triangulaire: Si ces derniers points sont situés chacun sur une des droites restantes (p') [de telle manière que trois d'entre elles ne puissent passer par un seul point (q')], chacun des points d'intersection restants sera situé aussi sur une droite donnée (r'). »

» Il n'est cependant pas vraisemblable que l'auteur des *Éléments* ignorât cette extension; mais il aura voulu se borner à établir une base. Et en effet (c'est une remarque générale qui ressort de tous ses porismes), il n'a évidemment cherché qu'à poser les principes et à répandre la semence d'une foule de belles propositions (t'), lesquelles d'ailleurs doivent être soigneusement distinguées, non pas d'après la diversité des hypothèses, mais d'après celle des résultats obtenus, soit que ceux-ci se présentent d'eux-mêmes, soit qu'ils proviennent de recherches expresses (u'). Or, toutes les hypothèses diffèrent entre elles par des aspects très-divers, tandis que chacun des résultats trouvés ou recherchés se présente unique et identique pour plusieurs hypothèses différentes (v').

» Voici donc, pour le premier livre, les genres des choses que l'on cherche à déduire des propositions (x'') (voir la figure au commencement du lemme 7) (y'):

« Si de deux points donnés on mène deux droites qui se coupent sur une droite donnée de position, et que l'une d'elles intercepte sur une droite donnée de position un segment mesuré à partir d'un point

TRADUCTION DE M. BRETON.

- » aussi sur une autre [droite fixe à partir
- » d'un point donné sur cette droite] (z') un
- » segment qui sera au premier dans un rap-
- » port constant. »
- » Et ensuite :
- » « Que tel point décrit une droite donnée
- » de position (a'').
- » Que le rapport de telle droite à telle
- » autre est constant (b'').
- » Que le rapport de telle droite à une ab-
- » scisse qu'elle détermine est constant (c'').
- » Que telle droite est donnée de direc-
- » tion (d'').
- » Que telle droite passe par un point fixe.
- » Que telle droite a un rapport constant
- » avec le segment compris entre tel point et
- » un point fixe (e'').
- » Que telle droite a un rapport constant
- » avec une autre droite menée de tel point
- » variable.
- » Que tel espace a un rapport constant
- » avec le rectangle qui a pour côtés une
- » certaine droite variable et une droite don-
- » née (f'').
- » Qu'une portion de tel espace [variable]
- » est donnée, tandis que l'autre varie propor-
- » tionnellement à une certaine abscisse (g'').
- » Que tel espace variable, pris seul ou avec
- » un espace donné.... a un rapport constant
- » avec une certaine abscisse.
- » Que telle droite variable, plus une autre
- » droite proportionnelle à une seconde droite
- » variable, est dans un rapport constant avec
- » le segment compris entre tel point et un
- » point fixe.
- » Que le triangle qui a pour sommet un
- » point fixe et pour base telle droite varia-
- » ble, est équivalent au triangle qui a pour
- » sommet un autre point fixe et pour base
- » le segment compris entre tel point et un
- » point fixe.
- » Que la somme de deux droites variables

TRADUCTION DE M. VINCENT.

- » donné sur sa direction, l'autre droite in-
- » terceptera aussi sur la précédente (z') un
- » segment qui sera au premier dans un rap-
- » port donné. »
- » Puis ensuite :
- » « 1°. Que tel point est situé sur une droite
- » donnée de position (a'').
- » 2°. Que le rapport de telle droite à telle
- » autre est donné (b'').
- » 3°. Que telle droite est partagée suivant
- » la section de raison (c'').
- » 4°. Que telle droite est donnée de posi-
- » tion (d'').
- » 5°. Que telle droite passe par un point
- » donné.
- » 6°. Qu'il y a rapport commensurable
- » entre telle droite et un segment compris
- » entre tel point et un point donné (e'').
- » 7°. Qu'il y a rapport commensurable
- » entre telle droite et un certain segment
- » abaissé de tel point.
- » 8°. Qu'il y a rapport commensurable
- » entre tel espace et le rectangle qui a pour
- » côtés une droite donnée et telle autre
- » droite (f'').
- » 9°. Que tel espace [est décomposable
- » en deux parties dont] l'une est donnée et
- » dont l'autre est suivant la section d'es-
- » pace (g'').
- » 10°. Que tel espace, pris seul ou avec
- » un certain espace, est [décomposable en
- » deux parties dont l'une est donnée et dont]
- » l'autre est suivant la section d'espace.
- » 11°. Que telle droite, plus une autre
- » droite avec laquelle telle autre droite est
- » dans un rapport donné, est elle-même dans
- » un rapport commensurable avec un cer-
- » tain segment compris entre tel point et
- » un point donné.
- » 12°. Que le triangle qui a pour sommet
- » un point donné et pour base telle droite,
- » est équivalent au triangle qui a pour som-
- » met un point donné et pour base le seg-
- » ment compris entre tel point et un point
- » donné.
- » 13°. Qu'il y a rapport commensurable

TRADUCTION DE M. BRETON.

» a un rapport constant avec le segment
» compris entre tel point et un point donné.

» Que telle droite détermine sur des droi-
» tes données des segments dont le produit
» est constant. »

» Dans le second livre, les hypothèses sont
autres que dans le premier, mais le plus grand
nombre des choses cherchées sont les mêmes,
et, en outre, il y a celles-ci :

« Que tel espace variable ou la somme de
» cet espace et d'un espace donné est en
» raison constante avec une certaine ab-
» scisse.

Que le rectangle qui a pour côtés telle
» droite variable et telle autre droite va-
» riable est en raison constante avec une
» certaine abscisse.

» Que le rectangle qui a pour côtés la
» somme de deux droites variables et la
» somme de deux autres droites variables
» est en raison constante avec une certaine
» abscisse.

» Que la somme du rectangle qui a pour
» côtés telle droite variable et la même
» droite augmentée d'une autre droite pro-
» portionnelle à une droite variable, et le
» rectangle qui a pour côtés telle droite et
» telle autre, cette dernière étant propor-
» tionnelle à une droite variable, est en rai-
» son constante avec une certaine abscisse.

» Que la somme de ces deux rectangles
» est en raison constante avec une certaine
» droite comprise entre tel point et un point
» donné.

» Que le rectangle de telle droite variable
» et de telle autre droite variable est con-
» stant. »

» Dans le troisième livre, le plus grand
nombre des hypothèses ont pour objet le
demi-cercle, et quelques-unes le cercle en-
tier et les segments. Des choses cherchées,
beaucoup sont à peu près semblables à celles
indiquées ci-dessus. Il y a en outre celles-ci :

« Que le rectangle de deux droites va-

TRADUCTION DE M. VINCENT.

» entre la somme de telle droite ajoutée à
» telle autre droite, et un certain segment
» compris entre tel point et un point donné.

» 14°. Que telle droite détermine, sur des
» droites données de position, des segments
» qui comprennent un espace donné. »

» Dans le second livre, ce sont d'autres
hypothèses. Quant aux choses cherchées, la
plupart sont les mêmes que dans le premier
livre; mais il y a de plus les suivantes :

« 1°. Que tel espace, ou la somme de cet
» espace et d'un espace donné, est suivant
» la section d'espace.

» 2°. Que le rectangle qui a pour côtés
» telle droite et telle autre droite est suivant
» la section d'espace.

» 3°. Que le rectangle qui a pour côtés
» la somme de deux droites et la somme de
» deux autres droites est suivant la section
» d'espace.

» 4°. Que deux rectangles, dont le pre-
» mier est construit sur telle droite et telle
» droite augmentée d'une troisième droite
» qui est avec une quatrième dans un rap-
» port donné, et dont le second est construit
» sur telle droite et celle qui est dans un
» rapport donné avec la précédente, forment
» une somme qui est suivant la section d'es-
» pace.

» 5°. Qu'il y a rapport commensurable
» entre la somme de ces deux rectangles et
» une certaine droite comprise entre tel point
» et un point donné.

» 6°. Que le rectangle de telle droite et de
» telle autre droite est donné. »

» Dans le troisième livre, le plus grand
nombre des hypothèses sont relatives au
cercle; quelques-unes regardent le cercle et
les segments. Pour les choses cherchées, la
plupart ressemblent aux précédentes; mais
il y a celles-ci en plus :

« 1°. Qu'il y a rapport commensurable

TRADUCTION DE M. BRETON.

» riables est au rectangle de deux autres
» droites variables dans un rapport constant.

» Que le carré construit sur telle droite
» est en rapport constant avec une certaine
» abscisse.

» Que le rectangle de deux droites varia-
» bles est dans un rapport constant avec le
» rectangle qui a pour côtés une droite don-
» née et le segment compris entre tel point
» variable et un point donné.

» Que le carré construit sur telle droite
» est dans un rapport constant avec le rec-
» tangle qui a pour côtés une droite donnée
» et le segment déterminé sur une droite
» fixe, à partir d'un point donné, par la
» perpendiculaire abaissée sur cette droite.

» Que le rectangle qui a pour côtés la
» somme de deux droites variables et une
» droite proportionnelle à une autre droite
» variable est dans un rapport constant avec
» une certaine abscisse.

» Qu'il existe un point tel, que les droites
» menées de ce point à deux points varia-
» bles comprennent un triangle donné d'es-
» pèce (k'').

» Qu'il existe un point tel, que les droites
» menées de ce point à deux points varia-
» bles interceptent des arcs égaux (i'').

» Que telle droite est parallèle à une autre
» droite passant par un point fixe, ou fait avec
» cette dernière un angle constant (k''). »

TRADUCTION DE M. VINCENT.

» entre le rectangle construit sur telle et
» telle droite et le rectangle construit sur
» telles autres droites.

» 2°. Que le carré construit sur telle droite
» est suivant la section d'espace.

» 3°. Que le rectangle de telle droite avec
» une autre droite [est égal] au rectangle
» qui a pour côtés une droite donnée et le
» segment compris entre tel point et un point
» donné.

» 4°. Que le carré construit sur telle droite
» [est égal] au rectangle qui a pour côtés
» une droite donnée et le segment déter-
» miné, à partir d'un point donné, par une
» [certaine] perpendiculaire.

» 5°. Que le rectangle construit sur la
» somme de deux droites, d'une part, et,
» d'autre part, telle droite qui a un rapport
» donné avec telle autre droite, est lui-même
» suivant la section d'espace.

» 6°. Qu'il existe un point donné tel, que
» les droites menées de ce point à deux points
» donnés comprennent un triangle donné
» d'espèce (k'').

» 7°. Qu'il existe un point donné tel, que
» les droites menées de ce point à deux points
» donnés interceptent des arcs égaux (j'').

» 8°. Que telle droite est parallèle à une
» certaine droite passant par un point donné
» ou fait avec elle un angle donné (k'').

Passages extraits de Proclus.

« ... *Porisme* se dit de certains proble-
mes, tels que les Porismes d'Euclide; mais il
se dit plus particulièrement lorsque, de choses
que nous avons démontrées, il en surgit
quelque autre qui est un théorème que nous
n'avions pas énoncé et que pour cela on a
appelé *porisme* (l''), lequel est comme un
gain fait dans la démonstration pour laquelle
nous avons établi l'évidence de ces choses. »

« ... *Porisme* est un terme de géométrie.

Tome III (2^e série). — MARS 1858.

« ... Quant au mot *porisme*, il se dit [en
général] de certains problèmes, comme le
Traité des porismes, composé par Euclide.
Mais il se dit plus particulièrement lorsque,
des choses démontrées précédemment, il sur-
git quelque théorème qui n'avait point été
proposé, et que, pour cela même, on nomme
porisme (l''), comme étant assimilé à un gain,
à un bénéfice accessoire de la démonstration
régulière et scientifique.... »

« ... Le mot *porisme* est un des termes

TRADUCTION DE M. BRETON.

Il a une double acception : car on appelle Porismes et ces théorèmes qui se présentent dans la démonstration d'autres théorèmes comme une heureuse trouvaille et un gain dont on profite chemin faisant (m''), et ces choses que l'on recherche (n''), et dont la découverte exige de l'invention (o'') et non pas seulement déduction (p'') et raisonnement facile (q'').

» L'égalité des angles à la base d'un triangle isocèle est l'objet d'un théorème (r''), et telle est la connaissance que nous avons des choses qui *sont* (s''). Partager un triangle en deux parties égales ou construire un triangle, retrancher une droite d'une autre ou l'ajouter, toutes ces choses se réduisent à quelque opération. Mais, un cercle étant donné, en trouver le centre, ou bien, deux grandeurs commensurables étant données, en trouver la plus grande commune mesure, ces choses et une infinité d'autres, tiennent en quelque sorte le milieu entre les problèmes et les théorèmes; car ces questions se résolvent non par simple déduction (t''), mais par invention (u'') et non par un raisonnement exempt de difficulté (v''). Il faut découvrir la chose demandée et la rendre évidente par une construction (x''). Tels sont les Porismes qu'Euclide a donnés dans les livres de problèmes qu'il a composés (y''). Mais ne nous arrêtons pas à parler de ces Porismes-là (z'').

TRADUCTION DE M. VINCENT.

qu'emploie la géométrie; il a une double signification. On nomme *porismes*, d'abord, des théorèmes qui se trouvent implicitement préparés par la démonstration de quelques autres, et qui sont, pour ainsi dire, des gains éventuels et des bénéfices dont on profite en passant (m''); en second lieu, des notions comprises implicitement dans l'objet d'une question (n''), mais où il y a cependant quelque chose de particulier à inventer (o''): de sorte qu'il ne s'agit dans ce cas ni d'une construction proprement dite (p'') ni d'une simple théorie (q'').

« Par exemple que *dans les triangles isocèles les angles à la base soient égaux*, c'est là simplement une affaire de théorie (r'') et dont il ne s'agit que d'acquérir la connaissance comme de toutes les choses qui sont (s''). D'un autre côté, la bissection d'un angle, la construction d'un triangle, une addition ou une soustraction, tout cela n'exige qu'une opération dont le but est déterminé. Mais, au contraire, « Un cercle étant donné, en » trouver le centre, » ou bien : « Deux grandeurs commensurables étant données, en » trouver la plus grande commune mesure: » toutes les questions de ce genre tiennent, en quelque sorte, le milieu entre les problèmes et les théorèmes. En effet, ce ne sont pas ici des créations (t''), quoiqu'il y ait quelque chose à trouver (u''); et ce ne sont pas non plus des théorèmes abstraits (v'') puisqu'il faut offrir à la vue, représenter devant les yeux l'objet de la question (x''). Or tel est le genre des propositions nommées *porismes* et traitées par Euclide dans les livres de Problèmes qu'il a composés (y''); mais il n'y a pas lieu de parler ici de cette espèce de *porismes*.

OBSERVATIONS SUR LES DEUX TRADUCTIONS QUI PRÉCÈDENT.

1°. Notice de Pappus sur les Porismes.

(a) M. Vincent traduit πολλοῖς ἀθροισμα φιλοτεχνότατον par *recueil*

très-riche en artifices variés. Il ne me semble pas que ce soit là le véritable sens. On trouve en effet, un peu plus loin, que la théorie mise en usage dans ce recueil offrait un caractère de *généralité* qui ne paraît guère compatible avec cette supposition que le *Traité des Porismes* était un recueil *d'artifices variés*. Le terme $\sigma\iota\lambda\omicron\tau\epsilon\chi\nu\acute{o}\tau\alpha\tau\omicron\nu$ indique plutôt l'art ingénieux avec lequel Euclide l'avait composé. C'est ce que j'ai essayé de rendre dans ma nouvelle traduction.

(b) J'ai remplacé $\gamma\epsilon\nu\acute{\omega}\nu$ par $\gamma\epsilon\nu\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\omega\nu$, parce que le premier de ces mots n'offre aucun sens géométrique. M. Vincent ne croit pas devoir suivre cette correction, et il traduit $\gamma\epsilon\nu\acute{\omega}\nu$ par *constructions*. Il fait observer à ce sujet que ce mot est employé en plusieurs endroits de la *Notice* de Pappus sur les *Porismes*, « où il indique évidemment les diverses variations que peut subir l'énoncé d'une question, les genres divers des choses demandées et dépendant soit de la solution du même problème, soit des différentes propriétés d'une même figure. » La vérité est que ces endroits sont au nombre de trois. On trouve d'abord $\gamma\acute{\epsilon}\nu\epsilon\iota$ dans le sens de *genre*; il s'agit de la question qui s'était élevée, de savoir si les propositions de l'ouvrage d'Euclide appartenaient au genre des théorèmes ou à celui des problèmes. On rencontre ensuite $\gamma\acute{\epsilon}\nu\omicron\upsilon\varsigma$, employé pour désigner le genre de Porismes auquel s'appliquait la seconde définition du Porisme. Enfin Pappus se sert de $\gamma\acute{\epsilon}\nu\eta$ pour indiquer les genres divers des choses cherchées. Or dans aucun de ces trois cas il ne s'agit de *constructions*. C'est donc tout à fait arbitrairement que M. Vincent traduit $\gamma\epsilon\nu\acute{\omega}\nu$ par *constructions*.

Je persiste à proposer de lire $\gamma\epsilon\nu\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\omega\nu$, qui est un terme à l'usage de Pappus. Voyez sur ce point le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 2°.

(c) La fin de la première phrase, $\acute{\alpha}\pi\epsilon\acute{\rho}\iota\lambda\eta\pi\tau\omicron\nu\ \tau\acute{\eta}\varsigma\ \phi\acute{\upsilon}\sigma\epsilon\omega\varsigma\ \pi\alpha\rho\epsilon\chi\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\eta\varsigma\ \pi\lambda\acute{\eta}\theta\omicron\varsigma$, se rapporte non point, comme M. Vincent le suppose, aux questions dont le *Traité des Porismes* était destiné à procurer ou à faciliter la solution, mais à la matière même des Porismes, qui, de sa nature, est inépuisable. Les problèmes de la *section de raison*, de la *section de l'espace*, de la *section déterminée* et des *contacts*, sur lesquels roulent autant de notices données par Pappus avant de parler des Porismes, sont des sujets essentiellement *circonscrits*, et dont la ma-

tière a été, pour ainsi dire, épuisée par Apollonius. Or, il n'en est pas de même pour les *Porismes*, et c'est ce que Pappus fait remarquer naturellement. M. Vincent lui fait remplacer cela par un lieu commun et dire une chose qui n'apprendrait rien à personne. La pensée de Pappus est au surplus mise en évidence par le commencement de la phrase suivante : *οὐδὲν προστεθείκασι*, etc., où le mot *οὐδὲν* est pour *οὐ δὲ ἐν*, *mais pas une*, etc. ; on voit qu'il insiste sur cette circonstance que, malgré l'abondance illimitée de la matière des *Porismes*, on n'avait ajouté aucun *Porisme* à ceux que renfermait l'ouvrage d'Euclide. Les géomètres avaient toutefois donné divers lemmes pour les *Porismes*.

(d) M. Vincent fait observer avec raison que les manuscrits donnent l'aoriste *ἐδείξαμεν*. Mais ce temps s'emploie souvent au lieu du présent, j'ai substitué en conséquence le présent au futur dans ma traduction, ce qui d'ailleurs ne change pas le sens.

(e) Pour la signification des termes *γραφὴ* et *ἀπόδειξις* employés dans cette phrase, voyez le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 3°. M. Vincent suppose que *μίαν* se rapporte à *ἀπόδειξιν*. Or *μίαν* est évidemment opposé à *δευτέρας*, et conséquemment se rapporte à *γραφὴν*. J'avais déjà fait cette remarque dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes*. Voyez, dans le *Commentaire*, la note du § I.

(f) Ces expressions *apercevoir et déduire des conséquences* s'éloignent de la signification des termes *ὁρᾶν καὶ πορίζειν*, lesquels marquent la double aptitude dont il fallait être pourvu pour comprendre ces méthodes d'Euclide, dont Pappus fait un si remarquable éloge. Le *Traité des Porismes* s'adressait aux géomètres sachant voir et trouver, et non pas seulement *apercevoir et déduire des conséquences*, comme dans le cas où il s'agit simplement de *corollaires*. Il s'agissait au contraire de questions *directement* posées, que l'on devait résoudre *pour elles-mêmes*, ainsi que cela ressort et de l'ancienne définition du *Porisme* donnée par Pappus, et des exemples que présente Proclus.

(g) M. Vincent ne donne pas le sens de l'expression *δύνασθαι σχηματίζεισθαι*, laquelle prouve que dans la discussion soulevée par les géomètres sur la question de savoir si les propositions d'Euclide étaient

des *théorèmes* ou des *problèmes*, on opposait aux énoncés *tout faits* présentés par Euclide lui-même, ceux dans lesquels on *pouvait* les transformer. Voyez ci-dessous l'annotation (q).

(h) ἀποβλέποντας τῷ σχήματι μόνον τῆς προτάσεως ne peut, ce me semble, se rapporter qu'aux géomètres qui s'appuyaient seulement sur la forme des énoncés *existant dans le Traité des Porismes*. Cette forme était celle des énoncés de *problèmes*, ainsi que cela résulte de divers détails répandus çà et là dans la Notice de Pappus, et du témoignage explicite de Proclus qui appelle des *problèmes*, et cela *par deux fois*, les propositions dont ce traité se composait.

(i) J'appelle l'attention sur la manière dont M. Vincent traduit cette définition du *théorème*, ainsi que les définitions suivantes du *problème* et du *Porisme*. C'est ici en effet qu'on voit avec évidence que le savant helléniste s'est laissé entraîner par une idée préconçue. Il veut bien reconnaître dans sa seconde Notice qu'il s'est trompé, « en disant que le théorème est une démonstration, » mais, après avoir fait cet aveu, il ajoute : « Je vais m'efforcer de donner une vraie traduction mot à mot... Ce ne sera pas ma faute si ce mot à mot, aussi consciencieux » que je puis le faire, tourne contre celui qui l'aura réclamé, » annonçant par là que ma traduction et mon propre mot à mot font dire à Pappus tout autre chose que ce que le texte signifie. Ce mot à mot de M. Vincent est ainsi conçu : « Le *théorème* est une chose proposée » en vue de la *démonstration* de ce qui est proposé. » Comme j'avais donné dans mes *Objections* cet autre mot à mot : « Un *théorème* est » ce qui est proposé pour la démonstration de cela même qui est » proposé, » on voit que la différence consiste presque uniquement en ce que je traduis l'adjectif démonstratif αὐτοῦ, tandis que M. Vincent traduit comme s'il n'existait pas. Or cet adjectif est ici très-important. Il prouve que les deux choses dont il est question dans le mot à mot de M. Vincent, savoir *une chose proposée* et *ce qui est proposé* ne font qu'une seule et même chose ; mais lui veut au contraire, dans son interprétation, que ces deux choses soient *différentes*. En d'autres termes, s'il renonce à prétendre que *le théorème est un raisonnement fait pour démontrer une proposition énoncée*, il persiste à soutenir que *le théorème* est non point *l'objet d'une démonstration à faire*, comme

je l'ai exprimé dans ma traduction et dans mon mot à mot, mais *une chose que l'on propose pour démontrer une proposition énoncée*, ce qui évidemment n'est pas vrai, ainsi qu'on peut le reconnaître en prenant un exemple quelconque de théorème. Mon interprétation est conforme à la fois au texte de Pappus et à la notion que nous avons tous du *théorème*, et si M. Vincent en propose une autre, manifestement inadmissible, c'est afin de ne pas être obligé de renoncer à l'interprétation qu'il donne bientôt après de la première définition du *Porisme*. Voyez ci-dessous l'annotation (k).

(j) La définition du *problème* telle que M. Vincent la présente, soit dans sa traduction, soit dans son mot à mot, donne lieu aux mêmes observations que la définition du *théorème*. L'adjectif *αὐτοῦ* n'est pas davantage rendu dans le mot à mot, ce qui dénature entièrement le sens, comme pour le *théorème*. Pour moi, de même que pour tout le monde, le *problème* est l'objet d'une construction à faire, et c'est bien là ce que Pappus exprime. Pour M. Vincent, le *problème* est *une chose servant à effectuer une construction*. Au surplus, ce n'est pas seulement dans sa Notice sur les Porismes que Pappus définit le *problème* et le *théorème*. Il rapporte au commencement de son troisième livre les définitions que donnaient les géomètres qui se piquaient d'exactitude dans leur langage. Voyez mes *Recherches nouvelles sur les Porismes*, (Commentaire, § V). Remarquons enfin que la manière dont M. Vincent interprète Pappus en ce qui concerne ces notions si élémentaires du *théorème* et du *problème*, n'offre, jusqu'à présent, aucun sens géométrique, quoiqu'il y soit revenu dans sa *seconde Notice*, par suite de mes *Objections*.

(k) Pour comprendre la définition du *Porisme*, il faut la rapprocher de celles du *théorème* et du *problème*, comme il suit :

Θεώρημα [ἐστὶ] τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου.

Πρόβλημα [ἐστὶ] τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου.

Πόρισμα [ἐστὶ] τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου.

On voit que ces trois définitions sont jetées pour ainsi dire dans un même moule et se correspondent mot pour mot. Il doit donc en être

de même de leur interprétation. Or les deux premières ont un sens bien déterminé, sur lequel il est impossible de se méprendre. On a donc là deux termes de comparaison, dont il faut nécessairement tenir compte en traduisant la définition du *Porisme*. C'est ainsi que j'ai traduit mot à mot, *le Porisme est ce qui est proposé pour la découverte de cela même qui est proposé*; de sorte que, selon moi, *le Porisme est une chose à découvrir*, et que *la découverte ou l'invention* de cette chose est ce que l'on propose de faire, de même que le *théorème* est une chose à démontrer et que la *démonstration* de cette chose est ce que l'on propose de faire, de même encore que le *problème* est une chose que l'on propose de construire et que la *construction* de cette chose est ce que l'on propose de faire. Il y a, on le voit, analogie complète dans ma traduction entre la définition du *Porisme* et celles du *théorème* et du *problème*.

M. Vincent déclare, sans entrer dans aucune explication, qu'il est évident que ce ne peut être là le sens. Suivant lui, *le Porisme est ce qu'on ajoute pour mettre à profit un résultat obtenu*, et, mot à mot, *le Porisme est une chose proposée en vue de l'acquisition de ce qui est proposé*. Suivant moi, ni cette traduction, ni ce mot à mot ne sont admissibles. Car, en ce qui concerne le mot à mot, d'abord l'adjectif démonstratif αὐτοῦ n'y est pas rendu, ce qui change entièrement le sens, comme dans les définitions du *théorème* et du *problème*. En traduisant cet adjectif, on trouve un mot à mot qui ne diffère plus guère du mien que par la signification attribuée au terme πορισμόν, que M. Vincent traduit par *acquisition*, tandis que je le traduis par *découverte*. Or Proclus nous apprend que les Porismes sont *des choses que l'on recherche expressément et qui exigent de l'invention*, ὅσα ζητεῖται μὲν εὐρέσεως δὲ χρήζει, et comme *acquérir*, dans de telles conditions, c'est *découvrir*, on voit que la signification que j'attribue à πορισμόν est bien celle qui convient dans la circonstance. Quant à la traduction qu'il donne, non-seulement on n'y retrouve en aucune façon le mot à mot, mais encore elle n'a aucun rapport avec le texte, ni pour le sens, qu'on ne peut admettre sans dénaturer les définitions du *théorème* et du *problème*, ni pour les termes, car si πορισμός peut signifier *acquisition* ou *profit*, en aucun cas il ne peut signifier *mise à profit*. De plus προτεινόμενον et προτεινομένου ne veulent dire ni *ajouté* ni *obtenu*.

(l) Μετεγράφη indique un *changement complet* et non une simple *modification*, ainsi qu'on le reconnaît par la seconde définition elle-même. M. Vincent a eu égard à cette observation dans son mot à mot.

(m) M. Vincent et moi nous avons supposé que ὑπὸ τῶν νεωτέρων voulait dire *par certains géomètres modernes*; mais traduire ainsi, c'était restreindre mal à propos la généralité de ce fait si curieux d'une nouvelle définition du *Porisme*, qui avait pris la place de la première, et qui en est entièrement différente. Le mot à mot de M. Vincent, *par les géomètres plus récents*, est plus exact. Cependant je crois plus exact encore de dire *par les modernes*, car ces expressions ὑπὸ τῶν νεωτέρων sont ici opposées à οἱ ἀρχαῖοι, les *anciens*, qu'on trouve un peu plus haut.

(n) ἀπαντα πορίζειν ne peut pas signifier *tirer parti des connaissances acquises*. M. Vincent répond à cette objection en présentant ce mot à mot : *déduire tous les corollaires* [des propositions], ce qui, certes, n'a aucun rapport avec sa traduction. Or il ne s'agit ici ni de *corollaires* ni de choses à déduire des propositions, comme les *corollaires*, mais bien *de choses que l'on recherche expressément*, ὅσα ζητεῖται. Ainsi donc, d'une part ce mot à mot prouve que M. Vincent abandonne sa traduction, et on voit d'autre part qu'il ne donne point encore le sens du texte.

Quant à l'emploi du terme *corollaire* dans ce passage, M. Vincent lui-même le considère comme *abusif*. Je suis en cela parfaitement de son avis, mais alors pourquoi faire un mot à mot que l'on déclare soi-même inadmissible comme mot à mot? ce n'est certainement pas là le moyen de se justifier d'avoir donné une traduction entièrement fautive.

(o) Rien dans le texte ne peut signifier *de s'élever au-dessus des simples éléments*. Les mots τοῖς στοιχείοις τούτοις ne désignent pas les *simples éléments de géométrie*, comme M. Vincent le suppose en remplaçant τούτοις par αὐτοῖς, et prenant ensuite αὐτοῖς dans le sens de *uóvoις*, mais bien les *trois livres* d'Euclide sur les *Porismes*, car l'adjectif démonstratif τούτοις prouve qu'il s'agit de l'ouvrage même dont Pappus parle. Cet ouvrage, qui était unique dans son genre au temps

de Pappus, est sans aucun doute considéré ici comme contenant les *éléments des Porismes*. Ce géomètre appelle de même des *éléments*, στοιχεῖα, les deux livres d'Apollonius sur les *lieux plans*.

M. Vincent donne, dans sa *seconde Notice*, ce mot à mot : *usant avec abus de ces éléments*. Mais en cela il ne fait pas attention qu'en traduisant τοῖς στοιχείοις τούτοις par *de ces éléments*, ces mots *avec abus* sont de trop, puisqu'ils n'ont été introduits d'abord qu'en changeant τούτοις en αὐτοῖς, et que ce changement n'a plus lieu maintenant. Quoi qu'il en soit, ce mot à mot est loin de justifier la traduction de M. Vincent.

(p) Rien dans le texte ne peut signifier *obligés de se renfermer dans l'évidence des seuls points mis en question*. Le mot à mot de M. Vincent, *et γ montrant seulement cela même qui est demandé*, prouve bien que ce n'était pas là le sens. L'adjectif démonstratif αὐτό n'est pas oublié ici comme dans les définitions du *théorème*, du *problème* et du *Porisme*. Quant à ce mot à mot considéré en lui-même, je ferai observer qu'il ne rend pas suffisamment l'adjectif indéterminé ὅ τι, qui équivaut au latin *quodcumque* ou *quodlibet*, et non pas seulement à *quod*. Car la seconde définition, à laquelle ce passage se rapporte, devait nécessairement s'appliquer à *toutes les propositions de l'ouvrage d'Euclide*. Il fallait qu'en en prenant une au hasard, cette définition se trouvât vérifiée, autrement elle n'aurait pas eu de raison d'être, et on ne comprendrait pas qu'elle eût été adoptée aussi généralement que le supposent ces termes ὑπὸ τῶν νεωτέρων.

(q) Rien dans le texte ne peut signifier *mais sans pouvoir en faire aucune application*. Le mot à mot de M. Vincent, *mais sans en déduire de corollaires*, ne justifie en aucune manière cette traduction. D'un autre côté, il y a dans ce prétendu mot à mot une inadvertance nouvelle du savant helléniste. Le véritable mot à mot de μὴ πορίζοντων δε τοῦτο est *mais ne découvrant pas cela*, et non point *mais sans en déduire de corollaires*; τοῦτο est ici le régime de πορίζοντων. M. Vincent perd de vue sans cesse ces expressions de Proclus, ὅσα ζητεῖται, qui indiquent, de même que la première définition du *Porisme*, *des choses que l'on recherche expressément pour elles-mêmes*. Le véritable sens, que j'ai tâché de rendre après quelques hésitations [voyez dans mes

Recherches nouvelles sur les Porismes l'annotation (c) de ma traduction, et dans le *Supplément* le § IV, 6° et 7°], est que l'on se contentait, pour justifier la nouvelle définition, d'ouvrir le *Traité des Porismes* et de poser le doigt sur n'importe laquelle des *solutions* données par Euclide, sans s'inquiéter en aucune façon des raisonnements placés entre la *question* et la *réponse*. En rapprochant cette *réponse* de la *question*, on mettait en évidence le fait matériel dans lequel la nouvelle définition avait sa raison d'être.

(r) Au lieu de *s'appuyant sur la définition*, il faut, mot à mot, *réfutés par la définition*, ce qui est le sens que j'ai adopté. M. Vincent le rejette dans ces termes : « Il y a évidemment ici une distraction de » l'honorable auteur, qui dit tout le contraire de ce que signifie le » texte. » Si quelqu'un a une distraction à se reprocher en ceci, ce n'est pas moi; car en traduisant *ἐλεγχόμενοι* par *réfutés*, je n'ai fait que prendre une des acceptions *données par le Dictionnaire*. Il est bien vrai que ce mot peut être traduit aussi par *convaincus*, mais il ne s'ensuit pas que ce soit là le sens. Pappus, après avoir signalé l'incompétence des auteurs de la seconde définition du *Porisme* ou de ceux qui l'adoptent, exprime évidemment un *blâme* à leur adresse.

Ce qui prouve au surplus que l'acception que j'ai choisie est en effet celle qui convient dans le cas actuel, c'est que la nouvelle définition ne s'applique point à ces questions : *un cercle étant donné, en trouver le centre; deux grandeurs commensurables étant données, en trouver la plus grande commune mesure*, citées par Proclus comme pouvant donner une idée de ce que c'est qu'un *Porisme*. Ce sont là *des choses que l'on propose expressément de découvrir* conformément à la première définition, mais en quoi chacune de ces deux choses pourrait-elle être, suivant la seconde définition mot à mot, *ce qui manque à l'hypothèse d'un théorème local*? Cette seconde définition s'appliquait aux *Porismes* d'Euclide seulement, parce qu'elle avait été faite sur ces *Porismes* mêmes; mais il y avait, comme on le voit par ces exemples, d'autres *Porismes* pour lesquels elle était en défaut, tandis que la première n'était en défaut pour aucun. C'était donc *contrairement* à celle-ci, et non *en s'appuyant sur elle*, qu'on adoptait la seconde définition.

(s) Il ne me semble pas possible que τῶν διδασκομένων puisse être

traduit, comme le propose M. Vincent, par *la théorie*. Du reste il adopte dans son mot à mot le sens que j'ai donné. Je fais remarquer à ce sujet que cette expression *la théorie des Porismes*, dont M. Vincent s'est servi dans le titre de sa *première Notice* et qu'il a reproduite dans le titre de la *seconde*, est tout à fait impropre. L'objet d'un texte grec n'est pas une *théorie* par cela seul que ce texte se rapporte à un ouvrage de géométrie.

(t) Ἀπὸ συμβεβηκότος ne veut pas dire *d'après les circonstances signalées ci-dessus*. Συμβεβηκότος non précédé de l'article indique une chose dont il n'a pas encore été question, ou dont on parle pour la première fois. Il s'agit manifestement de la circonstance qui a donné lieu à la seconde définition du Porisme. On voit, du reste, combien le mot à mot de M. Vincent, *d'après ce qui est arrivé*, ressemble peu à sa traduction.

Ici, pas plus que dans ce qui précède, je ne vois se vérifier cette menace de M. Vincent, « ce ne sera pas ma faute si ce mot à mot, aussi » consciencieux que je puis le faire, tourne contre celui qui l'aura » réclamé. » C'est justement le contraire qui a lieu.

(u) La traduction et le mot à mot de la seconde définition présentés par M. Vincent, savoir : *le Porisme est ce qui manque à l'hypothèse d'un théorème local*, ne diffèrent point du mot à mot que j'avais indiqué moi-même, mais que j'ai complété pour le rendre plus clair. C'est ainsi que j'ai traduit : *le Porisme est ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse (pour que celle-ci devienne l'énoncé) d'un théorème local* : ce qui d'ailleurs est très-naturel, car l'énoncé d'un *théorème local* se composant essentiellement d'une *hypothèse* et d'une *affirmation*, il paraît tout simple d'admettre que ce qui manquait dans l'énoncé était l'*affirmation*, d'autant plus que les questions étaient présentées sous forme de *problèmes*. Or M. Vincent repousse l'interprétation que cette traduction exprime. Il n'élève d'ailleurs, qu'on le remarque bien, aucune objection contre cette interprétation même; je dois donc me borner ici à montrer que celle qu'il prétend être la véritable ne saurait être admise.

« Si le Porisme, dit M. Vincent dans sa *première Notice*, ajoute à » l'hypothèse d'un théorème local, par là même il introduit la déter-

» mination dans un problème qui, en soi, était indéterminé; et s'il
 » trouve à se placer dans un lieu géométrique, ce n'est, en quelque
 » sorte, qu'en éliminant celui-ci, bien loin de le constituer. » Il cite
 à ce sujet deux *théorèmes locaux* donnés par Proclus, savoir, l'espace
 compris entre deux parallèles, qui est le lieu des parallélogrammes
 équivalents construits sur la même base, et le segment capable d'un
 angle donné, qui est pareillement le lieu des angles égaux à l'angle
 donné. « Dans le cas du parallélogramme, continue M. Vincent, il
 » manque soit son sommet, soit l'inclinaison des côtés sur la base, con-
 » ditions nécessaires pour faire disparaître l'indétermination. Dans le
 » segment capable d'un angle donné, il manque de même soit le som-
 » met de cet angle, soit la direction d'un côté, etc. [*] »

La *seconde Notice* de M. Vincent fait connaître plus complètement
 sa pensée à cet égard. Il la résume ainsi : « Le caractère essentielle-
 » ment *local* du théorème ayant été bien établi, quelle en est l'hypo-
 » thèse? et que manque-t-il à cette hypothèse pour constituer un Po-
 » risme ou un problème déterminé? »

Ainsi donc, ce qui pour lui constitue l'essence du *Porisme*, c'est ce
 que l'on ajoute à l'hypothèse du théorème local pour faire de ce théo-
 rème un problème déterminé, et ce problème déterminé est un *Porisme*.

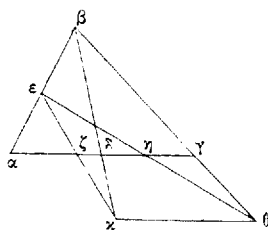
Afin d'être plus clair, je prends pour exemple le *théorème local* que
 voici : *Étant donné deux points α, θ et deux droites $\alpha\beta, \alpha\gamma$, dont
 la seconde soit parallèle à $\alpha\theta$, si l'on mène d'un point ϵ de $\alpha\beta$ les*

[*] M. Vincent ajoute : « On reconnaîtra sans peine que cette notion antique du lieu
 » géométrique, analogue à l'idée que les modernes attachent à la même expression,
 » en diffère cependant d'une manière essentielle. Or il me paraît évident que l'idée mo-
 » derne, substituée à l'idée ancienne, n'a pas peu contribué à obscurcir la véritable et
 » simple notion des *Porismes*, comme la suite de cette Notice le montrera. »

On ne trouve rien, à la suite de ce passage, soit dans la *première Notice* de M. Vin-
 cent, soit dans la *seconde*, qui fasse comprendre ce qu'il veut dire par là. Quoi qu'il en
 soit, Pappus, qui certainement possédait la vraie notion du *Porisme*, présente les
 énoncés des *lieux* conformément à l'idée moderne, et on remarque même parmi les
lieux plans d'Apollonius les deux exemples que cite M. Vincent d'après Proclus. Ils
 font, sous cette forme moderne, l'objet des troisième et quatrième énoncés du premier
 livre. Voyez le § 1^{er} de l'*Appendice* qui fait suite à mes *Recherches nouvelles sur les*
Porismes d'Euclide.

droites ϵx , $\epsilon \theta$, les segments $\alpha \zeta$, $\alpha \eta$ qu'elles détermineront sur $\alpha \gamma$ seront

FIG. 1.



entre eux dans un rapport constant, c'est-à-dire toujours le même quelle que soit la position du point ϵ sur la droite $\alpha \beta$. Cette proposition est l'une de celles que présente M. Vincent dans sa *seconde Notice*. Je la réduis ici à ses termes essentiels, mais on en retrouvera plus loin l'énoncé tel que M. Vincent le donne. Voir à ce sujet l'annotation (z').

L'hypothèse, dans ce *théorème local*, consiste en ceci : *Etant donné deux points x , θ et deux droites $\alpha \beta$, $\alpha \gamma$, dont la seconde soit parallèle à $x \theta$, si l'on mène d'un point ϵ de $\alpha \beta$ les droites ϵx , $\epsilon \theta$. L'affirmation est que les segments $\alpha \zeta$, $\alpha \eta$, que les droites ϵx , $\epsilon \theta$ détermineront sur $\alpha \gamma$, seront entre eux dans un rapport constant, c'est-à-dire toujours le même quelle que soit la position du point ϵ sur la droite $\alpha \beta$. On peut, pour fixer les idées, supposer que le rapport constant est celui de deux segments $\alpha \delta$, $\alpha \gamma$, déterminés par les deux droites βx , $\beta \theta$, menées d'un point donné β .*

Suivant M. Vincent, le *Porisme complet* correspond précisément au cas où, étant donné la droite θx et le point ϵ , on demande les points ζ , η ; « ou plutôt, ajoute-t-il, où l'on établit que les distances $\alpha \zeta$, $\alpha \eta$ sont » entre elles dans un rapport donné, celui de $\alpha \delta$ à $\alpha \gamma$. »

Ainsi donc ce qui fait l'essence du *Porisme*, ce qui manque à l'hypothèse du *théorème local*, se réduit simplement à ce que le point ϵ soit donné. De sorte que si l'on se donne la distance $\alpha \epsilon$, cette distance sera le *Porisme*; ou plutôt le *Porisme* ne serait autre chose que la mention, introduite dans l'hypothèse, que le point ϵ est donné.

Or, la question étant ainsi posée, il est facile de conclure. En effet :

1°. L'introduction de cette condition dans l'hypothèse du *théorème local*, en fait un *théorème ordinaire*, et non point un *problème*, comme

il le faudrait, puisque Proclus se sert de la dénomination de *problèmes* pour désigner les *Porismes d'Euclide*.

2°. Cette condition elle-même n'a rien de commun avec la première définition du *Porisme*, traduite comme j'ai montré qu'il faut le faire.

3°. On ne peut en aucune manière lui appliquer ces expressions caractéristiques de Proclus, *ὅσα ζητεῖται μὲν, εὕρεσσεως δὲ χρήζει, κ. τ. λ.*, car évidemment il n'y a là rien à *chercher*, rien qui exige de *l'invention*.

4°. Comment supposer qu'Euclide ait écrit un traité considérable dont une chose aussi complètement dépourvue de tout caractère saillant aurait été l'objet principal? et à quel titre ce que l'on ajoute ainsi à l'hypothèse d'un *théorème local*, pour détruire l'indétermination, pourrait-il avoir fixé l'attention au point de devenir la définition même du *Porisme*?

Telles sont les objections que soulève l'interprétation de la seconde définition du *Porisme* proposée par le savant helléniste. Je n'aurais point osé les lui adresser avant la publication de sa *seconde Notice*. Cette interprétation me semblait en effet si singulière, que je craignais de la lui attribuer à tort. J'avais même supposé que, dans sa pensée, les *Porismes* ainsi conçus devaient être incorporés aux propositions du *Traité des Porismes* et en faire partie intégrante, ce qui me semblait être indispensable dans un ouvrage dont ces *Porismes* étaient l'objet même. Et alors les seules objections que je pusse lui adresser à ce sujet étaient, en premier lieu, qu'on ne voyait pas pourquoi le *Porisme* s'ajoutait à l'*hypothèse* et non à l'*énoncé* tout entier du *théorème local*, et en second lieu que, le *Porisme* une fois introduit, les propositions devenaient *sans exception aucune exclusives de toute indétermination*, ce qui était contredit par les propositions indéterminées données par Pappus dans sa *Notice* même sur les *Porismes*.

Mais la pensée de M. Vincent est aujourd'hui mieux connue : Il se défend d'avoir jamais dit que les propositions d'Euclide dussent être, *sans exception aucune, exclusives de toute indétermination*. Il admet au contraire maintenant qu'il y avait dans le *Traité des Porismes* des propositions *indéterminées*, c'est-à-dire *séparées de leurs Porismes*, et que ces propositions y étaient en assez grand nombre pour avoir donné lieu à la seconde définition du *Porisme*. A la fin de sa *seconde*

Notice, il en présente plusieurs, obtenues par un procédé que j'avais moi-même indiqué dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes* (Commentaire, § XVI), et qui consiste à prendre les *réciproques* des lemmes de Pappus relatifs aux *Porismes*.

M. Vincent va même plus loin. Se ravissant, il se laisse aller à donner le nom de *Porismes* à quelques-unes de ces propositions, qui sont des *théorèmes locaux*, et cela avant d'y avoir introduit ce qu'il prétend être le *Porisme*, c'est-à-dire ce qui doit faire disparaître l'indétermination. Voici donc des *théorèmes locaux* qui se trouvent être des *Porismes*. Il est vrai que M. Vincent se hâte d'ajouter qu'ils deviennent des *Porismes complets*, ou, pour me servir de son autre expression, aussi très-peu justifiée, des *problèmes déterminés*, lorsqu'on particularise quelque chose dans l'hypothèse, particularisation qu'il considère comme étant le *Porisme proprement dit*. De sorte que, tout compte fait, voilà trois *Porismes différents* : 1° le *théorème local*, appelé simplement *Porisme* ; 2° le *problème déterminé*, qui est le *Porisme complet* ; 3° le *Porisme proprement dit*, celui de la *définition*, qu'il faut ajouter au *simple Porisme* pour avoir le *Porisme complet*.

Mais dans ces exemples, c'est le *simple Porisme*, le *théorème local*, qui est mis en évidence, qui appelle l'attention du lecteur ; du moins M. Vincent fait tout ce qu'il faut pour qu'on croie que telle est en effet son intention. Quant aux deux autres, le rôle qui leur est attribué ne semble en aucune façon proportionné à leur importance. On sent même que ces prétendus *Porismes* (le *Porisme complet* et le *Porisme proprement dit*) pourraient disparaître tout à fait sans aucun inconvénient, et on se demande, en lisant la *seconde Notice* de M. Vincent, jusqu'à quel point il tient à conserver ces *Porismes-là*, concurremment avec ce qu'il appelle maintenant le *simple Porisme*.

Pour achever cette démonstration, je vais appliquer à l'exemple ci-dessus l'interprétation que je donne de cette seconde définition, savoir, que le *Porisme est ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse (pour que celle-ci devienne l'énoncé) d'un théorème local*.

Voici d'abord l'hypothèse, ou la question à résoudre : *Étant donné deux points x, θ et deux droites fixes $\alpha\beta, \alpha\gamma$, dont la seconde soit parallèle à $x\theta$; si l'on mène d'un point ϵ de $\alpha\beta$ les droites $\epsilon x, \epsilon \theta$, ces droites détermineront sur $\alpha\gamma$ deux segments $\alpha\zeta, \alpha\eta$, qui varieront ensemble avec*

la position du point ϵ sur $\alpha\beta$; on propose de découvrir la relation qui existe entre ces deux segments?

Je fais remarquer en passant que la question est présentée sous forme de *problème*, comme cela est nécessaire; qu'il s'agit, conformément à la première définition, d'une chose que l'on demande de découvrir et qui est le *Porisme même*; que cette chose doit être recherchée *expressément* et exige de l'invention, suivant ce qui est exprimé par Proclus.

La réponse à cette question est que $\alpha\zeta$ est à $\alpha\eta$ dans un rapport constant. C'est le *Porisme* du premier livre d'Euclide, consistant en ce que telle droite est à telle autre dans un rapport constant.

Or en joignant cette réponse à l'hypothèse renfermée dans la question, on a ce *théorème local*: Étant donné deux points κ, θ et deux droites $\alpha\beta, \alpha\gamma$, dont la seconde soit parallèle à $\kappa\theta$, si l'on mène d'un point ϵ de $\alpha\beta$ les droites $\epsilon\kappa, \epsilon\theta$, les segments $\alpha\zeta, \alpha\eta$ qu'elles déterminent sur $\alpha\gamma$ seront entre eux dans un rapport constant, c'est-à-dire toujours le même quelle que soit la position du point ϵ sur la droite $\alpha\beta$. La seconde définition, telle que je l'interprète en la traduisant, est donc entièrement vérifiée aussi bien que la première, et cela en offrant à l'esprit un fait assez important pour donner l'idée d'une définition du *Porisme*, ce qui n'existe pas dans l'interprétation que M. Vincent prétend être la véritable.

Observons enfin que la raison du débat qui s'était élevé sur la question de savoir si les propositions d'Euclide appartenaient au genre des *théorèmes* ou à celui des *problèmes*, apparaît ici avec évidence. Pour ceux qui ne s'arrêtent qu'à la forme de l'énoncé, il s'agit d'un *problème*. Pour ceux qui font attention que la question et la réponse constituent ensemble un *théorème*, et que la solution ne consiste pas dans une opération à faire, il s'agit d'un *théorème*. La raison de ce débat n'existe plus dans la supposition de M. Vincent.

On voit par cette discussion quelles sont les conditions auxquelles il faut satisfaire pour interpréter convenablement la seconde définition du *Porisme*. Je crois avoir surabondamment démontré que M. Vincent n'en tient aucun compte, et qu'il se trompe complètement.

(v) Dans le genre des *Porismes* n'est pas ce que le texte signifie. Il

faut traduire, mot à mot, *dans ce genre de Porismes*, savoir celui auquel s'applique la seconde définition, ce qui doit s'entendre de *tous les Porismes d'Euclide*, puisque cette définition était justifiée par tous ces Porismes.

Ce genre se divisait en plusieurs espèces, dont une comprenait les *lieux*, c'est-à-dire des propositions *locales* dans lesquelles ce qu'il fallait découvrir était *la nature d'un lieu géométrique*; en effet, les *théorèmes locaux* dans lesquels l'affirmation portait sur la nature d'un *lieu géométrique*, avaient reçu la dénomination de *lieux*. Tels sont les *lieux plans* d'Apollonius, dont Pappus nous a transmis les énoncés, soit qu'on leur conserve la forme sous laquelle ils sont présentés par Pappus, soit que l'on adopte la forme sous laquelle Eutoce nous fait connaître un de ces énoncés. En les mettant sous forme de *problèmes*, on a les *lieux* du *Traité des Porismes*.

(*x*) *πλεονάζουσι* se rapporte à *τόποι*, c'est-à-dire aux *lieux*, et non point aux Porismes, comme M. Vincent le suppose arbitrairement. Ce qui vient ensuite fait voir qu'en effet c'est des lieux qu'il s'agit.

(*γ*) *ἐν τῷ ἀναλυμένῳ* se traduit parfaitement sans qu'il soit nécessaire de supposer avec M. Vincent que *τόπω* est sous-entendu. *Τὸ ἀναλυόμενον* n'est autre chose que *le résolu* ou le résultat des recherches géométriques, ou encore ces recherches elles-mêmes. Pappus exprime simplement que les lieux s'y rencontrent en grand nombre. Or ceci ne doit s'entendre évidemment que du *Traité des Porismes*, lequel renfermait des *lieux*, comme nous le verrons bientôt, et non point des autres traités dont il est fait mention dans la préface du septième livre de Pappus [*]. Ce géomètre parle ici du *Traité des Porismes*, et ce qu'il dit doit s'y rapporter.

[*] M. Vincent n'admet pas cette expression *lieu résolu* par laquelle on a traduit *τὸ πρὸς ἀναλύμενον*, qui est le nom que portait chez les Grecs l'ensemble des traités formant l'objet de la préface du septième livre de Pappus. Il considère le mot *ἀναλύμενος* comme appartenant à la *voix moyenne* et non au *passif*. Je ne vois pas comment cette manière de traduire peut donner en français *lieux (communs) de l'analyse*. Comme il s'agit d'une chose qui n'intéresse pas la *question des Porismes*, je me borne à cette simple remarque.

(z) Voyez, pour la signification de ces mots *κεχωρισμένων δε τῶν πορισμάτων*, le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 8°. Je dois reconnaître toutefois que ces mêmes mots peuvent aussi s'interpréter assez naturellement, en supposant qu'ils expriment le fait matériel de la séparation des *Porismes-lieux* d'avec les autres espèces de Porismes, auxquels se rapporterait alors le terme *πορισμάτων*. Je traduis même aujourd'hui conformément à cette interprétation; mais celle que j'avais adoptée en premier lieu constitue en elle-même une conjecture digne de quelque attention. Elle serait surtout plausible s'il était admis que le *Traité des Porismes* renfermait non-seulement des questions résolues, mais encore d'autres questions *non résolues* présentées comme exercices.

(a') Ce que M. Vincent fait dire à Pappus revient en définitive à ceci : *les Porismes sont dans le Traité des Porismes*. Si Euclide avait dû prendre ses Porismes dans les autres traités du *lieu résolu*, il n'aurait pu en trouver que dans les *lieux solides* d'Aristée l'Ancien, puisque Apollonius et Ératosthènes sont venus trop longtemps après Euclide pour que celui-ci ait pu être à même de profiter de leurs travaux. Évidemment c'est des *lieux* qu'il s'agit, et non des Porismes en général. Ce que le géomètre grec veut dire, c'est que les *lieux*, par suite de leur grand nombre, sont réunis en groupes dans les *trois livres d'Euclide*.

(b') Cette phrase ne se rapporte pas aux *lieux en général*. J'en ai dit la raison dans le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 8°. D'ailleurs γούν signifie *en effet*, et non *en général* [**].

(c) Voyez également, sur ce point, le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 8°.

[*] M. Vincent ne se trompe pas seulement sur le sens de ces divers détails relatifs aux *lieux*. Il se trompe aussi, et très-complètement, dans tout ce qu'il dit du septième livre de Pappus. Il prend les trente-huit lemmes relatifs aux *Porismes* pour « une analyse développée des trois livres de Porismes composés par Euclide; » bien plus, il croit que tout ce septième livre est rempli de *Porismes*. « Il faut remarquer, en effet, » dit-il, que les Porismes ne se trouvent point exclusivement dans les trois livres dus

(d') J'incline à croire que le terme *πορίσματα* s'applique ici aux propositions autres que les *lieux*. Car on ne comprend guère comment l'énoncé d'une question qui se résout par la découverte de la nature d'un *lieu géométrique* pourrait comporter des *sous-entendus*. Il en est autrement des questions qui correspondent aux *théorèmes locaux*, c'est-à-dire dans lesquelles la *réponse* ou la *solution* est l'énoncé d'une propriété d'un *lieu géométrique* dont la nature est connue. Il pouvait arriver alors que l'énoncé de la question ou l'*hypothèse* ne fit pas connaître certaines choses, très-essentielles cependant, par exemple certains points à partir desquels on sous-entendait que des segments variables devaient être mesurés lorsqu'il s'agissait de relations segmentaires. On sait qu'en pareille circonstance la forme de la relation dépend du choix de ces points. Or si le lecteur n'est pas prévenu que l'on raisonne dans une certaine hypothèse, il pourra se trouver dans le cas indiqué par Pappus. Je sou mets cette conjecture aux géomètres, sans me dissimuler qu'elle laisse encore beaucoup d'incertitude dans l'esprit.

» à Euclide, dont Pappus fait une mention spéciale, mais que tout le septième livre de » Pappus en est implicitement rempli. » Cette idée s'est si bien emparée de son esprit que, trouvant au commencement de la préface de ce livre, dans l'énumération des détails que Pappus se propose de donner dans ses notices sur les écrits composant le *τόπος ἀναλυόμενος*, cette mention *ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα*, il se persuade qu'il faut lire *ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα καὶ τὰ ζητούμενα*, faisant dire à Pappus une chose qui n'est pas, car chaque notice est terminée par l'indication du nombre de lemmes de ce septième livre qui se rapportent à l'ouvrage auquel la notice est consacrée. S'il fallait absolument une correction en cet endroit, je proposerais de lire *τὰ λήμματα εἰς τὰ ζητούμενα*. La préposition *εἰς* convient d'autant mieux ici que les deux premiers lemmes pour les *Porismes* sont accompagnés de ces mentions *τοῦ πρώτου εἰς τὸ πρῶτον, εἰς τὸ δεύτερον*.

Pour en revenir au contenu de ce septième livre, je ferai remarquer d'abord que ces termes du titre de sa préface *ἐξ ὧν περιέχον τὰ λήμματα τοῦ ἀνιλυομένου τόπου*, indiquent clairement que Pappus n'y donne que des *lemmes* proprement dits, et ensuite que cette conclusion est entièrement confirmée par l'examen de ceux de ces lemmes qui sont relatifs à des ouvrages parvenus jusqu'à nous, par exemple aux sept premiers livres des *Coniques* d'Apollonius. Il ne peut s'élever aucun doute sur la nature et la destination de ces propositions *auxiliaires*. Voyez au surplus ce que j'ai dit des lemmes dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes* (matériaux et historique de la question, § IV).

La nouvelle interprétation que j'ai donnée des termes $\gamma\rho\alpha\phi\acute{\eta}$, $\alpha\pi\acute{o}\delta\epsilon\iota\chi\iota\varsigma$ et $\epsilon\pi\epsilon\mu\phi\alpha\acute{\iota}\nu\omicron\upsilon\sigma\alpha$, employés par Pappus dans la seconde phrase de cette *Notice sur les Porismes*, fait d'ailleurs disparaître une difficulté que j'avais signalée dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § X).

(c') M. Vincent fait dire ici à Pappus exactement le contraire de ce que dit le texte. En effet, ces expressions, $\pi\epsilon\rho\iota\lambda\alpha\beta\epsilon\acute{\iota}\nu \delta\epsilon \pi\omicron\lambda\lambda\acute{\alpha} \mu\acute{\iota}\tilde{\alpha} \pi\rho\omicron\tau\acute{\alpha}\sigma\epsilon\iota$, ne signifient point d'un énoncé unique faire ressortir de nombreuses propriétés, mais faire entrer ou condenser dans un énoncé unique beaucoup de propositions du *Traité des Porismes*. C'est dans ce sens qu'on trouve, et que M. Vincent lui-même traduit, $\Delta\iota\omicron \kappa\alpha\iota \pi\epsilon\rho\iota\lambda\alpha\beta\epsilon\acute{\iota}\nu \tau\alpha\acute{\upsilon}\tau\alpha\varsigma \epsilon\acute{\nu} \mu\acute{\iota}\tilde{\alpha} \pi\rho\omicron\tau\acute{\alpha}\sigma\epsilon\iota$. On trouve encore dans la notice relative aux *Contacts*, $\pi\acute{\alpha}\lambda\lambda\iota\nu \mu\acute{\iota}\tilde{\alpha} \pi\epsilon\rho\iota\lambda\alpha\beta\omega\acute{\nu} \acute{\alpha}\pi\alpha\nu\tau\alpha \pi\rho\omicron\tau\acute{\alpha}\sigma\epsilon\iota$, et dans celle relative aux *Lieux plans*, $\mu\acute{\iota}\tilde{\alpha} \pi\epsilon\rho\iota\lambda\alpha\beta\omega\acute{\nu} \pi\rho\omicron\tau\acute{\alpha}\sigma\epsilon\iota$. Dans chacune de ces circonstances Pappus donne un énoncé qui en résume d'autres en nombre plus ou moins grand. De plus, la phrase où se trouvent ces expressions n'a point, avec la précédente, le rapport indiqué par les mots *en effet* qu'emploie M. Vincent. Ce que Pappus veut dire, c'est qu'il ne peut pas donner pour le *Traité des Porismes* des énoncés généraux dans le genre de ceux où il a résumé les propositions des ouvrages d'Apollo-nius, dont les notices précèdent celle des *Porismes*.

(f') *Absolument impossible* n'est pas tout à fait le sens. La chose est seulement *très-peu possible*. On pouvait réunir des propositions, mais il n'y en aurait eu en général qu'un si petit nombre dans chaque groupe, que la chose n'en valait pas la peine.

(g') « Je pense, dit M. Vincent, qu'il y a dans l'expression grecque » ce que l'on nomme *anacoluthie*, et que l'effet est ici remplacé par la » cause. On peut en juger par la suite logique des idées. » Il est évident qu'il faut, au contraire, prendre ici le mot à mot, puisque Pappus dit un peu plus loin qu'Euclide n'a mis dans son traité que *les principes et les germes seulement de nombreuses et grandes foules de propositions*.

(h') Cette expression *sur la totalité* ne rend pas le sens du texte.

Cette nouvelle erreur de M. Vincent est une conséquence de celle que je signale dans l'annotation qui précède.

(i') La phrase que M. Vincent commence par ces mots, *c'est ainsi que*, a pour objet une exception à ce fait que généralement les groupes de propositions du *Traité des Porismes* susceptibles d'être réunies dans un seul énoncé, n'en comprendraient qu'un très-petit nombre. En pareil cas, le terme convenable est *cependant*.

(j') Il est évident que Pappus dit ici qu'il y avait dans le premier livre des Porismes une suite ou un groupe de propositions appartenant à cette espèce des *lieux* plus abondamment répandus que les autres, et que ces propositions étaient toutes analogues entre elles, circonstance qui lui permet de les comprendre dans un énoncé unique.

Toutefois le texte est altéré, de sorte qu'on est privé du secours d'un mot à mot. On a, il est vrai, la ressource des restitutions conjecturales. J'en ai proposé une dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § XIII). M. Vincent entre de son côté dans cette voie, et propose une autre restitution, qui consiste à remplacer $\delta\epsilon\delta\omicron\mu\epsilon\nu\omicron\iota$ par $\delta\epsilon\delta\omicron\mu\epsilon\nu\omega\nu$, et à supposer que $\pi\rho\omicron\varsigma\ \acute{\alpha}\rho\chi\eta\nu\ \delta\epsilon\delta\omicron\mu\epsilon\nu\omega\nu$ signifie *pour base des données* [*]; de sorte qu'il s'agirait d'une

[*] Ces deux restitutions sont faites dans l'hypothèse qu'il y a un point avant les mots $\pi\rho\omicron\varsigma\ \acute{\alpha}\rho\chi\eta\nu$. Or il faut faire attention que dans le texte de Halley il y a un point après ces deux mêmes mots. Dans les manuscrits de la Bibliothèque Impériale n^{os} 2368 et 2440, il n'y a de point ni avant ni après $\pi\rho\omicron\varsigma\ \acute{\alpha}\rho\chi\eta\nu$, et M. Vincent en a conclu, un peu précipitamment, ce me semble, que j'avais affirmé une chose fausse dans mes *Recherches nouvelles* [matériaux et historique de la question, § I, note (f)]. Je m'étais mal expliqué, il est vrai, mais j'avais parlé de Halley en même temps que des manuscrits, ce qui aurait dû mettre en garde M. Vincent. J'avais d'ailleurs donné le texte d'après ces mêmes manuscrits n^{os} 2368 et 2440, c'est-à-dire sans mettre de point ni avant ni après $\pi\rho\omicron\varsigma\ \acute{\alpha}\rho\chi\eta\nu$, tandis qu'il y en a un après ces mots dans le texte de Halley, et, par suite, très-probablement aussi dans les manuscrits dont ce géomètre s'est servi. Quant à la lettre majuscule qui suit le point après $\pi\rho\omicron\varsigma\ \acute{\alpha}\rho\chi\eta\nu$ dans cette note (f), elle n'est là que par une erreur d'impression.

Si l'on voulait, d'après ces remarques, placer la coupure après $\pi\rho\omicron\varsigma\ \acute{\alpha}\rho\chi\eta\nu$, ces mots sembleraient devoir se rapporter à cet autre endroit de la Notice de Pappus où il dit

dizaine de lemmes. Or cela n'est pas admissible, aucun doute ne pouvant s'élever sur l'intention de Pappus. Il s'agit bien de dix propositions du *Traité des Porismes*, et non d'une *dizaine de lemmes*. Du reste M. Vincent se contredit lui-même sur ce point, dans sa *seconde Notice*. Voyez à ce sujet le dernier *alinéa* de l'annotation (n').

(k') Les termes *ὑπτίου*, *παρυπτίου*, *παρὰλλήλου* se rapportent non point à diverses positions d'une ligne droite, mais à *trois figures* dont chacune est à elle seule un *quadrilatère complet*. C'est ce que j'exprime dans la traduction que j'oppose ici à celle de M. Vincent, en remplaçant la périphrase que j'avais donnée dans ma première traduction. Les géomètres grecs paraissent avoir été dans l'usage de donner à certaines figures les noms des objets dont elles rappelaient l'idée. C'est ainsi que la figure du huitième lemme est appelée *βωμίσκος*, *petit autel*.

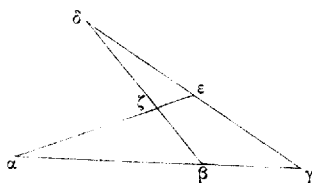
(l') Je me sers avec intention de l'expression *droite fixe*, au lieu du mot à mot *droite donnée de position*, parce qu'il y a dans la figure d'autres droites qui sont *variables de position*. De même je mets *point fixe* au lieu de *point donné*, pour mieux marquer l'opposition entre les points réellement *fixes* et ceux qui sont *variables de position*.

(m') Suivant M. Vincent, cette proposition consiste en ce que si

qu'Euclide n'a fait que répandre les *commencements et les germes de nombreuses et grandes foules* [de propositions], et on trouverait peut-être là leur explication. Mais le complément de *ἐν ἧ ὀλίγα* étant alors *πρὸς ἀρχήν*, ces expressions *δείγματος ἕνεκα τῆς πολυπληθείας* paraîtraient surcharger la phrase. Il ne serait donc pas absolument impossible qu'il y eût une transposition dans ce passage, et qu'en mettant un point après *πρὸς ἀρχήν*, la phrase suivante dût commencer par *δείγματος δ' ἕνεκα τῆς πολυπληθείας δεδομένου του πρώτου βιβλίου*, κ. τ. λ. Comme résultat, cette restitution est assez heureuse, puisque si quelque chose peut donner une idée de la grande abondance des propositions dont il s'agit, c'est bien plutôt un groupe exceptionnellement étendu de propositions susceptibles d'être comprises dans un énoncé unique, que des groupes qui n'en renferment que deux ou trois. Je ferai enfin observer qu'en mettant au lieu du pluriel *ὁμοιδῆ* le singulier *ὁμοιδής*, qui se rapporterait, ainsi que *δεδομένου*, à *πλήθος*, la phrase semble n'avoir besoin d'aucune autre correction pour offrir un sens très-plausible. Je livre ces conjectures pour ne rien omettre.

dans le quadrilatère complet $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$ les trois points α, β, γ sont donnés, et que deux des trois autres points d'intersection δ, ϵ, ζ , par

FIG. 2.



exemple δ, ϵ , soient donnés chacun sur une des droites de la figure, savoir ϵ sur $\alpha\epsilon$ et δ sur $\gamma\delta$, le dernier point ζ se trouvera à l'intersection des deux droites $\alpha\epsilon, \beta\delta$.

Cette interprétation ne résultait pas clairement de la *première Notice* du savant helléniste, et certes je n'eusse point osé la lui attribuer s'il ne l'avait développée lui-même dans sa *seconde Notice* de manière à lever tous les doutes; car elle est en contradiction manifeste avec les témoignages de Pappus et de Proclus, et rien ne la justifie dans le mot à mot. En effet :

1°. Pappus présente son énoncé comme résumant dix propositions qui appartiennent à cette espèce des *lieux* plus abondamment répandus que les autres. Cette proposition générale doit donc être un *lieu*; or la proposition de M. Vincent n'est pas un *lieu*.

2°. Cette proposition est d'une simplicité triviale. Aucun géomètre n'admettra qu'elle ait pu figurer, soit par elle-même, soit par ses cas particuliers, dans un ouvrage destiné à ceux qui sont en état de *voir* et de *trouver* [*]. Il est d'ailleurs impossible d'y reconnaître les caractères que Proclus signale dans les Porismes par ces expressions *ὅσα ζητεῖται μὲν, εὐρέσκει; δὲ χρῆζει*, car la détermination du point ζ ne peut être

[*] Il est vrai qu'on pourrait objecter à ce raisonnement que des choses qui nous paraissent aujourd'hui puériles ont pu être dans l'antiquité l'objet d'une sérieuse attention. Cet argument, que M. Vincent emploie dans sa *seconde Notice* en faisant allusion à l'admiration naïve que causait aux Anciens les propriétés les plus simples des nombres, n'est pas admissible lorsqu'il s'agit de la *géométrie* des Grecs et notamment de géomètres tels qu'Euclide et Pappus. Au reste, pour édifier le lecteur sur ce point, je ferai remarquer que la proposition de M. Vincent est un simple corollaire des propositions xxv et et xxvi du livre des *Données* d'Euclide.

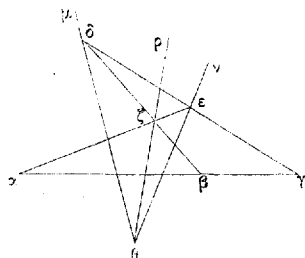
évidemment l'objet d'une *recherche expresse*, et n'exige point d'*invention*. C'est là au contraire une de ces choses que Proclus *exclut* de la catégorie des *Porismes*, par ces autres expressions *οὐτε γένεσως μόνης καὶ θεωρίας ἀπλῆς*.

3°. M. Vincent suppose que ces mots de l'énoncé *ἀπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας* se rapportent nécessairement à deux des droites $\alpha\epsilon$, $\beta\zeta$, $\gamma\delta$, lesquelles seraient ainsi *données de position*, et il veut en outre que *ἀπτηται* signifie la même chose que *δεδόμενα ἢ*. Or rien dans le texte n'autorise à supposer que les *droites données de position* dont il s'agit soient deux de celles qui forment le quadrilatère, et, si on le suppose, c'est-à-dire si l'on admet par exemple que les droites $\alpha\epsilon$ et $\gamma\delta$ soient *données de position*, on est forcé d'attribuer au terme *ἀπτηται* deux significations différentes, suivant que l'on considère le point δ ou le point ϵ . Car ce dernier se trouvant situé à l'intersection des deux droites $\alpha\epsilon$, $\gamma\delta$, *données de position* par hypothèse, est *donné*, sans que l'on ait besoin d'attribuer à *ἀπτηται* la même signification qu'à *δεδόμενον ἢ*, puisqu'il suffit que le point ϵ soit quelque part sur la droite $\alpha\epsilon$ donnée de position. La rencontre de cette droite avec $\gamma\delta$ achève de déterminer ce point. On ne peut d'ailleurs supposer que *ἀπτηται* signifie que ce point est *donné de position* sur $\alpha\epsilon$, car, en premier lieu, *ἀπτηται* n'a pas la même signification que *δεδόμενον ἢ*, et ensuite ce serait là une condition *surabondante*, puisqu'on admet que le point ϵ est sur $\gamma\delta$. Si maintenant nous passons au point δ , comme on sait seulement qu'il doit se trouver quelque part sur $\gamma\epsilon$, on est obligé alors d'interpréter *ἀπτηται* autrement qu'on ne l'a fait pour le point ϵ , et de supposer que ce terme signifie non-seulement que le point se trouve quelque part sur $\gamma\epsilon$, mais encore qu'il y est *donné de position*. Pour qu'il y eût équivalence dans les conditions qui déterminent la position de chacun des points δ , ϵ , il faudrait que la droite $\beta\delta$ fût aussi donnée de position par l'énoncé même de la proposition; mais alors chacun des trois points δ , ϵ , ζ serait déterminé de la même manière que les deux autres, et la proposition n'aurait plus de raison d'être. Ainsi donc l'interprétation de M. Vincent rend nécessaire d'attribuer à *ἀπτηται* deux significations différentes, suivant que l'on considère le point δ ou le point ϵ . Or, au contraire, il est évident que Pappus attribue à ce terme une seule et même signification pour

ces deux points, d'où il résulte que certainement M. Vincent se trompe.

L'interprétation que j'ai adoptée n'est autre chose que celle de Simpson. Elle consiste simplement à assujettir chacun des points δ , ϵ à

FIG. 3.



se trouver situé sur une droite *donnée de position*, conformément au mot à mot, sans supposer, comme M. Vincent le fait arbitrairement, que ces droites *données de position* doivent être deux de celles qui forment le quadrilatère; car cette condition n'est pas exprimée dans le texte. Ainsi le point δ devra se trouver sur une droite $\theta\mu$ *donnée de position*. De même le point ϵ devra se trouver sur une autre droite $\theta\nu$, également *donnée de position*, et la proposition ainsi comprise a pour objet le *lieu géométrique* engendré par le point ζ , en supposant que les côtés du triangle $\delta\epsilon\zeta$ pivotent autour des points *donnés* α , β , γ , sans que les sommets δ , ϵ cessent de se trouver sur les droites $\theta\mu$, $\theta\nu$. Or ce *lieu* est une ligne droite $\theta\rho$, qui passe par le point de rencontre θ des deux droites *données* $\theta\mu$, $\theta\nu$. La proposition ainsi comprise est donc un *lieu*, comme on devait du reste s'y attendre, puisque Pappus la présente comme résumant dix propositions d'Euclide *qui appartenaient à l'espèce des lieux*. On remarque qu'elle n'est pas d'une simplicité triviale comme la proposition de M. Vincent.

Je ferai observer à ce sujet que la locution $\acute{\alpha}\pi\tau\epsilon\theta\epsilon\iota$ ou $\acute{\alpha}\lambda\alpha\sigma\theta\alpha\iota$ $\theta\acute{\epsilon}\tau\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\delta\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\eta\varsigma$ $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\acute{\iota}\alpha\varsigma$ est employée un grand nombre de fois par Pappus pour exprimer qu'un point a pour *lieu géométrique* une droite *donnée de position*. On la trouve avec cette signification jusqu'à huit fois dans sa *Notice* sur les *Lieux plans*. On trouve encore très-fréquemment dans la même *Notice*, ainsi que dans celle sur les *Coniques* d'Apol-

lonius, la même locution où ces mots *θέτει δεδομένης εὐθείας* sont remplacés tantôt par *περιφέρειας κοίλης*, tantôt par *ἐπιπέδου τόπου θέτει δεδομένου*, tantôt encore par *θέτει δεδομένου στερεοῦ τόπου*, *θέτει δεδομένης κώνου τομῆς*, *θέτει δεδομένης γραμμῆς*. Ainsi donc lorsque Pappus dit, en parlant des deux points que j'ai nommés δ , ϵ , *ἀπτήται θέτει δεδομένης εὐθείας*, cela veut dire indubitablement que chacun de ces points a pour *lieu géométrique* une ligne droite *donnée de position*, sans y être *donné* lui-même de position; et lorsqu'il dit du point que j'ai nommé ζ , *καὶ τοῦθ' ἀΐεται θέτει δεδομένης εὐθείας*, cela veut dire que le point ζ *engendre un lieu géométrique*, et que *ce lieu est une ligne droite*. Soutenir que cela veut dire autre chose, c'est attribuer à Pappus deux langages différents, l'un admettant l'indétermination lorsqu'il parle des *lieux plans* et des *sections coniques*, l'autre excluant cette même indétermination lorsqu'il parle des *lieux* du *Traité des Porismes*, et cela dans trois *Notices* qui font partie de la préface de son septième livre.

(n') M. Vincent conclut, dans sa *seconde Notice*, de ce qu'il n'est question ici que de *quatre* droites, que l'interprétation que j'ai adoptée est insoutenable. Il ajoute même que cette interprétation suppose que, par la locution *droite donnée de position*, Euclide et Pappus ont voulu dire *droite variable*. Mais il est évident que le savant helléniste se trompe sur ce dernier point; je n'ai jamais soutenu et personne n'a soutenu que *droite donnée de position* veut dire *droite variable* [*]. Je n'ai donc à m'occuper ici que de son argument qui consiste à prétendre que le texte indique seulement *quatre* droites, et non pas *sept*. Or le texte est explicite, il n'y a rien de sous-entendu. Pappus commence par considérer un *quadrilatère complet*, ce qui fait d'abord *quatre* droites. Il en introduit ensuite *deux* autres, sur lesquelles deux des sommets du quadrilatère sont assujettis à se trouver situés: ces deux nouvelles droites sont ajoutées aux *quatre* premières par l'énoncé

[*] Voyez à ce sujet dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § XI) l'énoncé que je donne du théorème de Pappus. Il est évident que M. Vincent n'a pas lu cette partie de mon travail. S'il l'avait lue, il se serait abstenu de prétendre que j'ai dit qu'une *droite donnée de position* est une *droite variable*.

même. Que deux droites soient assujetties à se couper toujours sur une droite *donnée de position* (qui ne soit ni l'une ni l'autre des deux premières), c'est là une *condition* qui n'a rien de plus extraordinaire que celle qui consiste à rendre fixes les trois points où l'un des côtés du quadrilatère est rencontré par les trois autres. Quant à la *septième* droite, elle est une conséquence de l'hypothèse, c'est le *lieu engendré* par le dernier point. Tout cela est simple et parfaitement clair, il n'y a rien de sous-entendu dans l'énoncé dont il s'agit. Cet énoncé s'applique à un *système de quatre droites* que l'on assujettit à *diverses conditions*, et il faut bien que ces dernières y soient exprimées. D'ailleurs on ne voit pas comment elles pourraient l'être dans d'autres termes que ceux qu'emploie Pappus, tandis qu'au contraire il est facile de reconnaître que ces mêmes termes ne peuvent exprimer la proposition de M. Vincent.

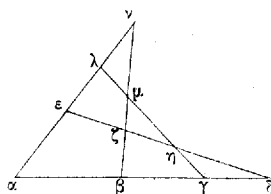
Je ferai enfin remarquer que cette proposition elle-même, telle qu'il la présente, ne s'accorde point avec ce qu'il a dit dans sa *première Notice* des propositions du *Traité des Porismes*, qui sont comprises dans son énoncé. M. Vincent supposait que ces propositions n'étaient autre chose que des *lemmes*, et il citait à ce sujet notamment la figure du septième lemme de Pappus. Or il est absolument impossible de retrouver dans aucun des trente-huit lemmes de ce géomètre la proposition de M. Vincent.

(o') Le savant helléniste a fait d'abord un énoncé complet, mais dépourvu de toute signification géométrique de ce qui n'est qu'une première hypothèse. Il est arrivé à ce résultat en substituant arbitrairement au subjonctif *ἀπτηται*, qui est dans le texte, l'indicatif *ἀπτεται* qui n'y est pas. Il reconnaît cette erreur dans sa *seconde Notice*, mais il donne à entendre que je pourrais bien en avoir commis ailleurs une autre du même genre, et que conséquemment un excès de sévérité de ma part rejallirait infailliblement sur moi. Je ne prétends certes nullement me soustraire aux conséquences des erreurs que je puis avoir commises, mais je n'accepte pas l'honneur d'être placé, quant à ce, moi simple écolier en grec, sur le même rang que le maître. Au surplus, l'accusation ou plutôt l'insinuation de M. Vincent porte ici à faux. Voir à ce sujet l'annotation (z').

Quoi qu'il en soit, voyons si sa proposition, en ne prenant que la

première hypothèse, ce qui est évidemment permis, offre davantage un sens plausible, une signification vraiment géométrique. En voici l'énoncé, tel que M. Vincent l'accepte dans sa *seconde Notice* : *Tant de droites qu'on voudra se coupant les unes les autres, mais pas plus de deux en un même point, si tous les points où l'une d'elles est rencontrée par les autres sont donnés et que chacun des points où l'une de ces dernières est coupée par les droites restantes soit (assujetti à être) situé sur une droite donnée de position, chacun des points restants sera pareillement (assujetti à être) situé sur une droite donnée de position.* Dans le cas de cinq droites, par exemple, la première partie de l'hypothèse consiste

Fig. 4.



en ce que les quatre points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, où l'une d'elles est rencontrée par les autres, sont donnés. Quant à la seconde, elle signifie que l'une des quatre autres droites, par exemple $\epsilon\delta$, est donnée de position, et que les points ϵ, ζ, η sont donnés sur cette droite même, d'où il résulte que les trois dernières $\alpha\nu, \beta\mu, \gamma\lambda$ sont aussi données de position; ou bien elle signifie que les points ϵ, ζ, η , où la droite $\epsilon\delta$ est rencontrée par les droites $\alpha\nu, \beta\mu, \gamma\lambda$, sont *donnés* sur ces dernières, ce qui suppose également que toutes les droites du système sont données de position. La proposition aurait donc uniquement pour objet ce fait, que quand plusieurs droites sont données de position, leurs points d'intersection sont situés sur ces droites. Telle est la conséquence de l'interprétation de M. Vincent, lorsqu'on l'applique dans le cas de la première hypothèse. Le sentiment des choses géométriques repousse cette interprétation.

(p') En traduisant *situés chacun sur une des droites restantes*, au lieu du mot à mot *situés chacun sur une droite donnée de position*, M. Vincent fait dire au géomètre grec une chose qu'il aurait été parfaitement inutile d'exprimer. Car à quoi bon imposer pour condition qu'un cer-

tain nombre d'intersections des droites considérées soient situées sur ces droites elles-mêmes, et comment cette condition pourrait-elle n'être pas satisfaite? Il est vrai que M. Vincent revient au mot à mot dans sa *seconde Notice*, mais son interprétation de ce mot à mot est contraire à la signification que la locution ἀπρεσθαι ou ἀψεσθαι θέσει δεδομένων εὐθείας a toujours dans Pappus, ainsi que je l'ai fait observer ci-dessus dans l'annotation (m').

(q') Il s'agit ici d'une condition qui ne saurait être celle qu'exprime la traduction de M. Vincent, puisque déjà il est dit dans l'énoncé que les droites que l'on considère se coupent les unes les autres, *mais pas plus de deux en un même point*. D'ailleurs pourquoi serait-elle exprimée une seconde fois dans cet énoncé, et cela dans des termes différents? M. Vincent s'est déterminé dans sa *seconde Notice* à suivre mon mot à mot, avec cette seule restriction que l'espace triangulaire dont il est question serait formé par des droites *données de position*, au lieu de l'être, comme je le suppose, par des droites *non données de position*. Mais ensuite il juge à propos de remplacer ces mots *de manière que trois d'entre elles ne puissent passer par un même point*, par ceux-ci : *de manière que trois d'entre elles ne puissent aboutir aux angles d'un espace triangulaire* [*]. Bien certainement M. Vincent se sert ici de termes qui expriment toute autre chose que ce qu'il veut dire, car, pour satisfaire à cette condition, il faudrait que toutes les droites données, moins une, fussent parallèles entre elles, ce qu'il ne suppose pas. Lui-même, dans sa *première Notice*, croyant que j'avais dit quelque chose de semblable, le signalait comme une absurdité dans ces termes : « En effet, il n'est pas vrai que *trois points ne puissent être les sommets d'un même triangle*, puisque la figure ne peut au contraire exister qu'à cette condition. »

Ce que j'ai voulu exprimer et que M. Vincent a commencé par

[*] M. Vincent fait ici sur l'altération du texte des conjectures dans lesquelles je ne crois pas à propos de le suivre, puisqu'il arrive à une interprétation inadmissible. Mais je fais remarquer que je n'ai pas dit, comme il l'assure, que les manuscrits portent *τρία* et non *τρίων*. Voir la note (h) de ma première traduction, où j'ai soin d'avertir que c'est le contraire qui a lieu.

prendre pour une absurdité, c'est que parmi les points, en nombre égal au nombre qui exprime le côté du nombre triangulaire, que l'on assujettit à être situés chacun sur une des droites *données de position* ou fixes, dont l'énoncé suppose l'introduction dans le système, entre autres conditions auxquelles il est soumis, il ne faut jamais qu'il y en ait trois qui soient les sommets de l'un des triangles formés par les droites *mobiles*, ce qui est un corollaire de la proposition relative au cas de *quatre* droites. Car, d'après cette proposition, dès que deux des sommets d'un tel triangle sont assujettis à demeurer chacun sur une droite fixe, le troisième sommet décrit ou engendre une ligne droite, que l'on ne peut plus conséquemment se donner à volonté. De même on ne peut assujettir à se trouver sur des droites arbitrairement choisies les quatre sommets d'un quadrilatère formé par les droites mobiles, ni les cinq sommets d'un pentagone. Ces dernières conditions ne sont pas indiquées par Pappus; c'est Simson qui les a fait connaître. n étant le nombre des droites *mobiles*, celui des points que l'on assujettit à se trouver sur des droites fixes est $n - 1$. On satisfait à toutes ces conditions à la fois, en plaçant ces $n - 1$ points aux différents sommets, moins un, de l'un quelconque des polygones qui ont pour côtés *toutes les droites mobiles* [*]. Ce polygone de n côtés que l'on choisit, change de position et de forme lorsque l'un quelconque de ses sommets se déplace sur la droite où il est assujetti à demeurer; *le dernier sommet décrit une droite, et chacun des points d'intersection qui n'appartiennent pas à ce polygone, décrit aussi une droite.*

(*r'*) Les objections par lesquelles j'ai combattu l'interprétation donnée par M. Vincent, de la proposition relative au cas des quatre droites, s'appliquent également à la proposition générale de Pappus. Je renvoie donc pour cet objet aux annotations (*m'*) et (*n'*).

Toutefois il ne sera pas inutile d'ajouter que son interprétation tombe en défaut, lorsqu'on se borne à la première *hypothèse* de Pap-

[*] Ces explications ont été déjà données dans les *Objections* que j'ai précédemment adressées à M. Vincent. Dans sa *seconde Notice*, il déclare qu'il lui est impossible d'en suivre le sens. C'est là une nouvelle preuve qu'il n'a pas lu mon travail et qu'il raisonne en m'attribuant des propositions entièrement différentes de celles que j'ai avancées.

pus, c'est-à-dire à celle où il n'est nullement question de *nombre triangulaire*. M. Vincent n'a pas fait attention que cette circonstance est particulière à la seconde hypothèse. Cette remarque suffirait à elle seule pour prouver qu'il est dans l'erreur. Elle explique pourquoi il avait fait de la première hypothèse un énoncé complet; mais cet énoncé n'offrant pas de signification géométrique, il a rendu à cette partie de la proposition son caractère d'hypothèse. Or actuellement elle n'a pas davantage de signification géométrique, ainsi que je l'ai fait voir ci-dessus dans l'annotation (o').

(s') M. Vincent fait observer avec raison que j'avais omis de rendre le terme *μόνα*. J'ai réparé cet oubli et rectifié d'après lui ma traduction du commencement de la phrase. On remarquera du reste que le sens n'est pas changé par ces corrections.

(t') Le texte signifie mot à mot *de nombreuses et grandes foules (de propositions)*. Comment M. Vincent, qui dit des *Porismes*

De loin c'est quelque chose et de près ce n'est rien,

vient-il parler ici de *belles propositions*, lorsque le texte ne dit rien de semblable?

(u') Ma traduction est rectifiée ici d'après le *Supplément aux Recherches nouvelles sur les Porismes*, § IV, 9°. Ce n'est pas par les *hypothèses* que chaque foule ou groupe de propositions se distingue des autres, car toutes les hypothèses sont différentes et d'ailleurs très-particulières, mais *par la chose demandée, qui est la même pour toutes les propositions du groupe, nonobstant la diversité de leurs hypothèses*, et cela soit qu'il s'agisse de choses que l'on découvre sans que l'énoncé de la question les fasse prévoir, ou de choses sur lesquelles cet énoncé appelle l'attention expressément.

M. Vincent n'a pas saisi le sens de cette distinction : perdant de vue ces expressions de Proclus, que j'ai déjà citées plusieurs fois, *ὅσα ζητεῖται μὲν, εὐρέσεως δὲ χρήζει, κ. τ. λ.*, il suppose que le terme *συμβεβηκός* s'applique aux choses *qui se présentent d'elles-mêmes*, c'est-à-dire à des *corollaires* dans le genre de ceux des éléments. Afin de fixer les idées à ce sujet, je prendrai un exemple. Supposons que l'on demande

de découvrir la relation qui existe entre les segments interceptés par la tangente à un cercle sur deux autres tangentes parallèles entre elles, à partir des points de contact de ces dernières. Cette relation est une chose que l'on recherche expressément, car on est certain, par la nature même de la question, qu'il existe en effet une relation entre ces deux segments, et dans ce cas elle est désignée avec beaucoup de justesse par le terme *ζητούμενον*. Tout le monde sait d'ailleurs qu'elle consiste en ce que le produit ou rectangle des deux segments est constant et égal au carré du rayon. Mais une fois qu'on l'aura trouvée, tout ne sera pas terminé, car un géomètre doué de pénétration saura apercevoir en outre qu'il existe un point d'où la partie de la tangente variable interceptée entre les deux tangentes fixes est vue sous un angle constant. Or la découverte de ce point remarquable ne paraît pas de nature à pouvoir être proposée *expressément*, comme celle de la relation segmentaire énoncée ci-dessus. Elle dépend de la sagacité du géomètre et surtout de l'intuition. Dans ce cas le terme *συμβεβηκός* caractérise parfaitement ce que l'on découvre. Ainsi donc il ne s'applique point à des choses d'une facilité vulgaire, comme M. Vincent l'imagine, mais au contraire à celles qui exigent au plus haut degré cette faculté que Pappus appelle *δύναμις εὐρετική*.

Le *Traité des Porismes* s'adressait aux géomètres sachant voir et trouver, *δυναμένοις ὁρᾶν καὶ πορίζειν*. On peut dire que ὁρᾶν et πορίζειν correspondent respectivement à ces deux termes *συμβεβηκός* et *ζητούμενα*, et qu'ils indiquent la double aptitude dont il fallait être pourvu pour pouvoir résoudre des questions dans le genre de celles qu'on trouvait dans cet ouvrage.

(v') Il résulte de cette phrase et des deux définitions du *Porisme*, que les choses que l'on découvrait, τὰ συμβεβηκότα et τὰ ζητούμενα, sont les *Porismes* mêmes. On voit ici pourquoi Pappus donne plus loin les réponses sans les questions. Celles-ci roulent sur des hypothèses qui toutes diffèrent les unes des autres, et l'objet important, le *Porisme*, consistant dans une réponse qui est unique et identique pour plusieurs questions différentes, il est tout simple que Pappus détache cette réponse pour la donner seule.

(x') Il ne s'agit pas ici de choses que l'on cherche à déduire des pro-

positions, mais bien de choses que l'on cherche dans les propositions, car c'est là ce que le texte signifie. M. Vincent oublie toujours que Proclus oppose les *Porismes* aux *corollaires*, *ὅσα ζητεῖται μὲν, κ. τ. λ.*

(*γ'*) Si l'on admet que Pappus renvoie en cet endroit aux *lemmes pour les Porismes* et non au premier livre des *Porismes*, il est naturel de supposer que ces expressions *ἐν ἀρχῇ μὲν τοῦ ζ'* désignent non point le commencement du septième lemme, mais le commencement de la partie du septième livre consacrée aux *lemmes pour les Porismes*. En effet, la proposition énoncée par Pappus s'adapte parfaitement à la figure qui accompagne le premier de ces lemmes. Cette circonstance appelle d'autant plus l'attention, que Pappus dit expressément que ce lemme se rapporte au premier Porisme du premier livre, et que, d'un autre côté, la proposition dont il s'agit semble être la première du premier livre.

Ces rapprochements, sur lesquels j'avais insisté dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide*, paraissent avoir appelé l'attention de M. Vincent. Dans sa *seconde Notice*, il ne parle plus du commencement du septième lemme, mais s'attache particulièrement au premier lemme [*].

(*ζ'*) *ἀπὸ ἑτέρας* ne veut pas dire de la précédente droite. Pour que cette signification fût admissible, il faudrait que *ἑτέρας* fût précédé de l'article, ce qui n'a pas lieu. Il faut traduire d'une autre droite, pour laquelle on sous-entend que les choses se passent comme pour la première, ce que j'indique entre crochets.

M. Vincent reconnaît dans sa *seconde Notice* que l'article manque en effet, mais il soutient qu'il a donné le sens. Pour le prouver, il a recours à la figure ci-après, qui est celle du premier lemme [**], et il

[*] M. Vincent, qui n'a pas lu mon travail, présente dans sa *seconde Notice* comme un *aveu* de ma part la relation que je signale entre la figure qui accompagne le premier lemme de Pappus et l'énoncé que ce géomètre donne au commencement de la partie de Notice où il formule les Porismes. De plus il oublie que lui-même n'avait parlé que du septième lemme dans sa *première Notice*. Voyez à ce sujet mes *Recherches nouvelles* (Commentaire, § XIII).

[**] M. Vincent : « Je reproduis cette figure dont M. Breton aurait dû expliquer la construction, s'il la croyait propre à appuyer son système. C'est à quoi je vais en-

C'est ici le lieu de m'expliquer sur l'accusation de M. Vincent, dont j'ai dit un mot dans l'annotation (o'), et qu'il formule de cette manière :
 « M. Breton... paraît avoir commis une inexactitude analogue en con-
 » fondant le subjonctif $\acute{\alpha}\pi\omicron\tau\acute{\epsilon}\mu\eta\eta$ avec le futur $\acute{\alpha}\pi\omicron\tau\epsilon\mu\acute{\epsilon}\tilde{\iota}$, dans l'énoncé
 » du premier Porisme du premier livre, celui même où la figure est
 » indiquée. Et l'erreur est ici de quelque gravité, car le membre de
 » phrase que M. Breton a supprimé, ou du moins qu'il a négligé de
 » mettre en saillie, est précisément celui qui a pour fonction d'ajouter
 » ce qui manque à l'hypothèse du théorème local [*]; celui, par con-
 » séquent, qui caractérise essentiellement le Porisme. D'ailleurs
 » M. Breton insiste beaucoup sur la nécessité d'une traduction *mot à*
 » *mot*. Or on comprend que pour obtenir une exactitude rigoureuse
 » sous ce rapport, il n'est pas du tout indifférent de confondre l'anté-
 » cédent indiqué par $\acute{\alpha}\pi\omicron\tau\acute{\epsilon}\mu\eta\eta$, avec le conséquent, déterminé par
 » $\acute{\alpha}\pi\omicron\tau\epsilon\mu\acute{\epsilon}\tilde{\iota}$. »

Si M. Vincent veut dire que ma traduction de l'énoncé dont il s'agit ne donne pas le mot à mot, il a parfaitement raison; mais il n'est pas vrai que cette inexactitude, si toutefois c'en est une, soit analogue à celle que lui-même a commise, car j'ai conservé à la proposition sa signification géométrique, et je n'ai pas négligé de mettre en saillie ce qui constitue le *Porisme*. En effet, j'ai dit dans mes *Recherches nouvelles* (Commentaire, § XIII, à la fin du premier alinéa) : « A notre point de
 » vue, le Porisme ne peut être ici que le fait de la constance du rapport
 » de ces deux segments ($\gamma\theta, \delta\kappa$). » Le reproche de M. Vincent est donc dépourvu de fondement [**]. Quant à avoir confondu un *subjonctif* avec un *futur*, je n'ai pas davantage commis cette faute. Il n'y a dans ma traduction ni *futur*, ni *subjonctif*, mais seulement le présent de l'indicatif.

[*] Ce langage suppose, ce me semble, que M. Vincent abandonne ici tout à fait son interprétation de la seconde définition du *Porisme* pour adopter la mienne. Faut-il conclure de là qu'il est, au fond, converti sur ce point, comme on pourrait être tenté de le croire d'après quelques remarques qui se sont déjà offertes dans le cours de la discussion? Voir l'annotation (u).

[**] On voit encore ici que M. Vincent n'a pas lu le travail auquel il oppose ses deux Notices.

Je fais enfin observer qu'en insistant sur la nécessité d'une interprétation *littérale*, je n'ai point prétendu exiger un mot à mot à *outrance* qui pourrait n'être pas conforme au génie de notre langue. J'ai voulu seulement une traduction *qu'on pût retrouver dans le mot à mot*. C'est ce qui n'arrive pas toujours pour celle de M. Vincent.

(a'') Ce *Porisme* est conçu dans des termes qui impliquent l'idée de *mouvement*. Voir plus haut l'annotation (m').

(b'') Je me sers ici à dessein de termes qui indiquent qu'il s'agit de figures *variables*, ainsi que cela est nécessaire si l'on veut que la seconde définition du *Porisme* ait eu sa raison d'être.

(c'') Je n'ai pas d'autres motifs de traduire ἀποτομή par *abscisse* ou *segment*, que ceux que M. Vincent donne lui-même. Quant au participe ἀποτεμνομένη, qu'il dit être employé pour rendre en grec le mot *abscisse*, je ne l'ai jamais trouvé qu'accompagné d'un *complément*. D'ailleurs πρὸς ἀποτομήν, traduit par *suivant la section de raison*, ne présente à l'esprit aucun sens géométrique.

(d'') M. Vincent dit qu'il lui est impossible de deviner la raison qui a pu m'engager à changer le texte de ce *Porisme*. Il aurait pu, sans chercher à deviner, la lire dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § XIV).

(e'') M. Vincent prétend que les mots ἕως δοθέντος ne sont point rendus dans ma version. En me lisant avec plus d'attention, il pourra reconnaître que ce reproche n'est pas fondé. Toutefois, afin de me rapprocher davantage du mot à mot, j'ai modifié ma rédaction dans ce *Porisme* et dans cinq autres, où l'on trouve ces mêmes mots ἕως δοθέντος.

L'introduction de l'idée de rapport *commensurable* est incompatible avec la variabilité des figures, que suppose essentiellement la seconde définition du *Porisme*. Même observation pour six autres *Porismes* où M. Vincent introduit cette idée.

(f'') J'ai remplacé, dans ma traduction, *rectangle* par *espace*, le terme χωρίον ne désignant pas nécessairement un rectangle comme M. Vincent le fait remarquer.

Mais il ajoute : « De même, dans la traduction du premier énoncé du deuxième livre d'Apollonius, M. Breton me paraît s'être trompé : au lieu de la *différence des carrés, etc.*, il fallait mettre simplement *l'espace compris entre les deux droites* : c'est le théorème local donné par Proclus, appliqué au triangle ; le lieu en question est celui du sommet du triangle formé par les deux droites et la distance des deux points donnés : c'est une parallèle à la droite qui joint ces deux points. » M. Vincent se trompe ici complètement. Le lieu dont il parle est l'objet du *quatrième énoncé du premier livre*, et cela *de la manière la plus explicite*. Il est donc certain que j'ai bien fait de ne pas traduire le premier énoncé du deuxième livre comme M. Vincent croit que j'aurais dû le faire [*].

(g'') Même observation que dans l'annotation (c'') ci-dessus, relativement à la manière dont je rends le terme *ἀποτομή. Πρὸς ἀποτομήν*, traduit par *suivant la section de l'espace*, ne présente à l'esprit aucune signification géométrique, pas plus que *suivant la section de raison*. Même observation pour six autres Porismes.

(h'') Rien dans le texte ne signifie que les droites dont il est question dans ce Porisme et qui sont menées d'un point donné, doivent aboutir à deux points *donnés*.

Suivant M. Vincent, ce Porisme dépend évidemment du lemme XXIX de Pappus. « Or, dit-il, ce qui manque ici à l'énoncé du théorème local, c'est la détermination du sommet du triangle. » Je rappelle que ce lemme XXIX de Pappus est ainsi conçu : *Un segment de cercle étant décrit sur $\alpha\beta$, γ inscrire un angle $\alpha\gamma\beta$ dont les côtés soient entre eux*

FIG. 6.



dans un rapport donné. M. Vincent suppose-t-il que la question à ré-

[*] Ceci répond au *post-scriptum* de la *seconde Notice* de M. Vincent où il oublie ce qu'il avait dit dans la *première*.

soudre est celle-ci : *Sur une droite donnée $\alpha\beta$ construire un triangle semblable à un triangle donné?* On pourrait alors, en effet, construire sur $\alpha\beta$ le segment capable de l'angle opposé, dans le triangle donné, au côté homologue à $\alpha\beta$, et il ne resterait plus qu'à déterminer sur l'arc $\alpha\beta$ le sommet du triangle demandé. Mais y a-t-il dans tout cela quelque chose qu'on puisse appeler *Porisme*, qui exige de l'*invention*, etc.? Les circonstances qui, selon Proclus, font le Porisme, manquent ici absolument.

(i'') Dans ce Porisme, de même que dans le précédent, M. Vincent suppose, sans y être autorisé par le texte, que les droites menées du point donné doivent aboutir à des points également *donnés*. Il fait dépendre ce Porisme du même lemme, en ce sens que la circonstance indiquée dans sa traduction se vérifie en plaçant le sommet du triangle au milieu de l'arc; ce qui revient à dire que *les cordes menées du milieu d'un arc aux extrémités de cet arc sous-tendent des arcs égaux*. Assurément si une semblable proposition se distingue par quelque côté, ce n'est pas par l'*invention*.

(k'') M. Vincent suppose encore que les deux cas de ce Porisme se rapportent à des problèmes déterminés, et que le lemme XXIX en donne également la clef. Suivant lui, il s'agit de la tangente menée par le sommet γ du triangle $\alpha\beta\gamma$, laquelle est parallèle à $\alpha\beta$, ou fait avec cette droite un angle donné, selon que le sommet γ est ou non au milieu de l'arc $\alpha\beta$. A peine est-il besoin de faire observer ici la même absence des caractères que Proclus signale dans les Porismes. Le sentiment des choses géométriques s'élève contre de semblables interprétations.

2°. Passages extraits de Proclus.

(l'') Ce *Porisme* est évidemment le *corollaire* des éléments modernes de géométrie. Proclus le considère comme un *théorème*.

(m'') C'est encore ce même *corollaire* qui est désigné ici et que Proclus considère comme un *théorème*.

(n'') Ces expressions ὅσα ζητεῖται μὲν signifient *toutes choses que*

l'on recherche expressément, et non point, comme M. Vincent le fait dire à Proclus (sans y être en rien autorisé par le texte), des notions comprises implicitement dans l'objet d'une question. Il s'agit ici de choses que l'on recherche pour elles-mêmes, et qui par là se distinguent essentiellement des corollaires.

(o") M. Vincent dénature encore le sens de ce passage en traduisant *εὐρέσεως δὲ χρῆζει* par *mais où il y a cependant quelque chose de particulier à inventer*. Le *Porisme* exige de l'invention, c'est là son caractère spécial. Pappus le définit : *une chose que l'on demande de découvrir*.

(p") M. Vincent attribue à *γένεσεως* une signification inadmissible. *γένεσις* ne peut, en aucune manière, être traduit par *exécution pratique*. Il est manifeste que ce terme correspond à *γένεσθαι* que l'on trouve très-souvent employé pour désigner la conséquence d'une hypothèse. Ces expressions *γένεσεως μόνης*, s'appliquent aux choses que l'on déduit de notions acquises, mais sans que l'invention y ait part.

(q") M. Vincent se trompe encore ici, en supposant que *θεωρίας ἀπλῆς* se rapporte à la théorie, et que le *Porisme* est ainsi intermédiaire entre la *théorie* et la *pratique*. Ces termes complètent la pensée de Proclus. Après avoir appelé l'attention sur cette circonstance que le *Porisme* demande de l'invention, il ajoute d'abord que les choses qu'on déduit sans invention de notions acquises ne sont pas des *Porismes*. Mais il y a aussi d'autres choses auxquelles on parvient par un raisonnement, une théorie à *priori*. Ces dernières ne sont point considérées comme étant des *Porismes*, si ce raisonnement ou cette théorie se présente à l'esprit sans qu'on ait besoin de chercher, et c'est là ce que signifie l'adjectif *ἀπλῆς*.

(r") Ces mots *θεωρήσαι δεῖ* signifient qu'il faut *voir* la chose. Telle est, ajoute Proclus, la connaissance que nous avons des choses qui *sont*. M. Vincent ne rend pas la pensée de l'auteur. L'intention de celui-ci est de rappeler l'idée du *théorème*, puis celle du *problème*, pour faire comprendre ensuite ce qui distingue le *Porisme* du *théorème* et du *problème*.

(s'') Rien dans le texte ne signifie qu'il ne s'agit que d'acquérir la connaissance de la chose.

(t'') M. Vincent se trompe évidemment en traduisant *ce ne sont pas des créations*. Les questions citées par Proclus sont, au contraire, de telle nature, qu'il faut, pour les résoudre, tout créer, raisonnement et construction. Voyez ci-dessus l'annotation (p'') relativement au sens de γένεσις.

(u'') Rien dans le texte ne signifie *quoiqu'il y ait quelque chose à trouver*. Ces mots ἀλλ' εὐρέσεις veulent dire simplement *mais des inventions*, et c'est là l'idée sur laquelle Proclus insiste particulièrement sans parvenir à éveiller l'attention de M. Vincent.

(v'') Ces mots θεωρία ψιλή ne veulent pas dire *des théorèmes abstraits*. Si l'on essaye de faire le mot à mot avec les significations attribuées par M. Vincent pour γένεσις et pour θεωρία ψιλή, on arrive à faire dire à Proclus une chose parfaitement fautive, savoir : qu'il n'y a, dans ces [exemples] de choses demandées, ni constructions, ni théorie abstraite.

(x'') Pour bien comprendre le sens de cette phrase et de celles qui précèdent, il faut se reporter aux deux propositions d'Euclide citées par Proclus. Voyez, à ce sujet, mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § VIII). Il est à remarquer que ces indications de Proclus sont contraires aux définitions du *Porisme* que M. Vincent prête à Pappus, savoir : 1° que le *Porisme* est ce qu'on ajoute pour mettre à profit un résultat obtenu, et 2° que le *Porisme* est ce qui manque à l'hypothèse d'un théorème local (pour détruire l'indétermination).

(y'') La mention que Proclus fait ici expressément des *Porismes* d'Euclide, en appliquant ainsi à ces Porismes ce qu'il vient de dire, est fort importante. On se demande toutefois jusqu'à quel point il a voulu établir une assimilation entre deux propositions qui appartiennent aux *éléments* et les *Porismes* proprement dits. Peut-être Proclus a-t-il seulement emprunté à Euclide, dans la préface ou dans la lettre

qui, vraisemblablement, précédait le *Traité des Porismes*, les exemples donnés par ce géomètre lui-même pour montrer qu'il existe des propositions qui se distinguent à certains égards, et surtout par l'*invention*, des *théorèmes* et des *problèmes*.

(2^o) J'ai cru devoir m'arrêter là, parce que ce qui suit dans Proclus se rapporte uniquement à ce que nous appelons les *corollaires*. Il ne s'agit plus des *Porismes*, c'est-à-dire de *ces choses que l'on recherche expressément et qui exigent de l'invention*, mais seulement de ces *théorèmes* qui se présentent comme par hasard dans certaines démonstrations, sans qu'on les ait cherchés ni proposés. M. Vincent, qui prend, ainsi qu'on l'a vu, les *Porismes* pour des *corollaires*, a jugé à propos de citer tout ce que Proclus dit de ces derniers : « Pour faire bien voir que les deux sortes de porismes ne diffèrent pas autant qu'on l'a pensé, ou plutôt, qu'il n'y a essentiellement qu'une sorte de porisme. A mon avis, continue le savant helléniste, la seule distinction que l'on puisse établir entre eux avec quelque apparence de raison, consiste en ceci : que certains porismes se présentent comme à l'aventure τὰ συμβεβηκότα : ce sont ceux que l'on rencontre dans les *Éléments*, κοινὰ ζτοιχεῖα; tandis que les autres, dépendant d'une déduction moins simple, moins directe, moins élémentaire, ne se découvrent que lorsqu'on les cherche, τὰ ζητούμενα, après s'être préalablement livré à l'étude des théories moins vulgaires, afin d'acquérir, comme le dit Pappus, la *puissance inventive*, δύναμις εὐρετική. Ce sont ces derniers porismes qui composent les livres d'Euclide sur la matière, ainsi que les autres traités compris dans le Τόπος ἀναλυόμενος; et si Proclus semble établir une division plus ou moins tranchée entre les deux classes (non entre les deux espèces), c'est uniquement parce que, devant se borner à commenter les éléments, il n'avait point à s'occuper de porismes qui ne s'y rencontrent pas : voilà tout ce qu'il a voulu dire, et dont il a cru devoir avertir ses lecteurs. »

Pour montrer combien M. Vincent se trompe en assimilant ainsi les *Porismes* aux *corollaires*, il suffit de rappeler que Proclus cite, pour donner une idée du *Porisme*, deux propositions dont l'une est ainsi conçue : *Trouver le centre d'un cercle donné*. Or quelle ressem-

blance y a-t-il entre cette proposition, qui est un *problème*, et un *corollaire*, qui, d'après Proclus, est un *théorème*?

Il est vrai que la proposition dont il s'agit a un corollaire, savoir que *la perpendiculaire élevée par le milieu d'une corde passe par le centre*. Mais Proclus n'en parle que dans le passage consacré aux *corollaires*, après avoir, en termes exprès, averti le lecteur qu'il cesse de parler des *Porismes*. M. Vincent n'est pas arrêté par cette déclaration si formelle de Proclus. Entraîné par une inexplicable préoccupation, il applique à ce corollaire et à d'autres la dénomination de *Porisme*, et confond ainsi ce que l'auteur grec a manifestement voulu séparer.

Pour la signification des termes *συμβεβηκότα* et *ζητούμενα*, voyez ci-dessus l'annotation (u').

Résumé et Conclusions.

Il résulte avec évidence des annotations qui précèdent que M. Vincent s'est trompé en un très-grand nombre d'endroits dans son interprétation des textes de Pappus et de Proclus, et notamment partout où il a cru devoir proposer un autre sens que celui que j'ai adopté. Mais ce qu'il importe de remarquer, c'est que la plupart de ces erreurs, et les plus graves, sont la conséquence de l'idée fausse que le savant helléniste s'est faite du *Porisme* et par laquelle il s'est laissé entraîner. D'après lui, le *Porisme* est une chose que l'on ne recherche pas expressément pour elle-même, mais seulement *une chose que l'on fait remarquer*; en un mot, dans sa pensée, le *Porisme* est un véritable *corollaire*, qui, comme tel, *ne fait pas partie* de la proposition à laquelle il se rapporte. La seule différence que M. Vincent admette entre les corollaires et les *Porismes* consiste en ce que ces derniers dépendent « d'une » déduction moins simple, moins directe, moins élémentaire. »

Or cette manière d'envisager le *Porisme* est en contradiction formelle avec ce que nous apprennent Pappus et Proclus, et, notamment, il n'est pas vrai que le *Porisme* doive être séparé comme il arrive pour le *corollaire*, de la proposition à laquelle il se rapporte. Il en constitue, au contraire, une partie essentielle, analogue à *l'affirmation* dans le *théorème*, à la *solution* dans le *problème*. En effet :

1°. Pappus définit le *Porisme* : *une chose qu'on demande de décou-*

vrir, et Proclus : *une chose que l'on recherche expressément et qui exige de l'invention*, confirmant ainsi la définition de Pappus. Proclus appuie ses explications de deux exemples, en ayant soin d'ailleurs de mettre en relief la différence entre le *Porisme* et le *corollaire*. Dans chacun de ces deux exemples, le *Porisme* est bien une partie essentielle de la proposition, et non point une chose que l'on fait remarquer et qui s'ajoute à une proposition complète par elle-même. Il est vrai que M. Vincent traduit tout autrement que je ne le fais les deux définitions que je viens de rappeler, mais sa traduction n'a évidemment aucun rapport avec le mot à mot, soit pour le sens, soit pour les termes, et pour la proposer, il est obligé de traduire les définitions du *théorème* et du *problème* d'une manière contraire aux notions que l'on a sur ces deux espèces de propositions.

2°. Le passage où Pappus appelle l'attention sur ce fait que dans les propositions relatives aux *Porismes*, ce qu'il faut considérer, ce n'est pas *l'hypothèse*, mais la *chose cherchée* qui se trouve être la même dans un grand nombre *d'hypothèses différentes* ; ce passage, dis-je, prouve également que la *chose cherchée*, c'est-à-dire le *Porisme*, fait partie intégrante de la proposition où il est mis en évidence.

3°. Le *Porisme*, tel que M. Vincent le conçoit, ne peut pas être mis sous forme de *problème*. Or dans les deux passages de Proclus où il est question du *Porisme* et du *corollaire*, ce commentateur applique expressément la dénomination de *théorème* aux choses qui se présentent à la manière du *Porisme* de M. Vincent, et il désigne par deux fois, sous le nom de *problèmes*, les *Porismes* d'Euclide. De plus, Pappus dit positivement que les énoncés des propositions du *Traité des Porismes* pouvaient être mis sous la forme qui convient soit aux *théorèmes*, soit aux *problèmes*, de sorte qu'il y avait discussion entre les géomètres sur la question de savoir si ces propositions étaient des *théorèmes* ou des *problèmes*. Il est bien évident que cette discussion n'aurait pas pu avoir lieu si les *Porismes* avaient été ce que suppose M. Vincent. Tout le monde les aurait considérés comme appartenant au genre des *théorèmes*.

4°. Pappus donne, comme résumant dix *lieux* du premier livre du *Traité des Porismes*, une proposition dans laquelle on ne voit rien qui ressemble à ce que M. Vincent présente comme étant le *Porisme*. Aussi

le savant helléniste suppose-t-il que ce sont simplement des *lemmes*, tandis que l'intention de Pappus est bien de donner sous un énoncé unique des *propositions* tirées de l'ouvrage même d'Euclide, et non des *lemmes*.

Ainsi donc, M. Vincent se trouve contredit formellement par les textes en ce qu'il y a de plus important dans son interprétation, à savoir la notion du *Porisme*.

Cette conception du savant helléniste est d'ailleurs contraire aux textes sous un autre rapport, je veux parler du caractère *d'invention* qui résulte de l'ancienne définition du *Porisme* citée par Pappus, et que Proclus met en relief avec une insistance et une intention bien marquées. Il oppose même en cela le *Porisme* au *corollaire* qui est un *théorème* qu'on rencontre, sans le chercher, dans la démonstration d'une proposition ayant un tout autre objet. Il appelle l'attention sur cette circonstance que le *Porisme* non-seulement est l'objet d'une *recherche expresse*, mais encore exige de *l'invention*. Pour lui, il n'y a *Porisme* que là où il y a *invention*, et il a soin de dire que les simples conséquences de propositions déjà démontrées ne remplissent pas cette condition, et qu'il en est de même des théories *a priori* qui ne demandent aucun effort d'esprit. Or le *Porisme*, tel que M. Vincent le conçoit, n'offre en aucune façon ce caractère *d'invention*, du moins dans le cas des propositions *locales*, où il faudrait admettre suivant lui que ce qui constitue essentiellement le *Porisme* n'est autre chose que le choix que l'on fait de la grandeur ou de la situation d'une partie variable de la figure pour faire disparaître l'indétermination.

L'objection devient encore plus pressante lorsqu'on voit une circonstance de cette nature présentée comme étant la définition même du *Porisme*. M. Vincent soutient en effet que la seconde définition du *Porisme*, dont Pappus nous a transmis les termes, doit être interprétée en ce sens que le *Porisme* serait *ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse d'un théorème local pour y détruire l'indétermination*, c'est-à-dire le simple choix de la grandeur et de la situation d'une partie de la figure, variable d'après l'hypothèse. Or la définition dont il s'agit est présentée en termes *généraux*, du moins rien dans Pappus ne fait supposer qu'elle ne s'appliquait pas à la totalité des propositions d'Euclide, et elle n'aurait pas eu de raison d'être si elle n'eût été applicables à toutes sans exceptions. Voilà donc le *Porisme* se réduisant à

quelque chose d'absolument dépourvu non-seulement d'invention, mais encore de tout caractère saillant. Il est évident que le sentiment des choses géométriques repousse une pareille supposition.

Remarquons que si cette définition n'est pas conforme à la vraie notion du *Porisme*, elle nous apprend, toutefois, que les propositions de l'ouvrage d'Euclide étaient des propositions *locales*. Or il a été établi ci-dessus que chacune de ces propositions devait renfermer, comme partie intégrante, le *Porisme* qui en était l'objet. Donc, il n'est pas vrai de dire que le *Porisme* avait pour effet de détruire l'indétermination; il la laissait, au contraire, subsister. Ainsi donc, de ce côté encore, les idées de M. Vincent sont inadmissibles.

Peut-être est-ce pour échapper à ces objections qu'il se laisse aller à donner le nom de *Porismes* à des propositions locales, sans y avoir détruit l'indétermination, c'est-à-dire avant d'y avoir introduit son prétendu *Porisme*; mais alors sous quel rapport distingue-t-il ces propositions des autres propositions du même genre auxquelles les anciens n'ont pas donné le nom de *Porisme*? Il ne fait que déplacer la difficulté. Pour la faire disparaître, il suffit de considérer le *Porisme* comme étant la conséquence d'une *hypothèse* et non de la *démonstration d'une proposition*. Cette solution si simple est celle que j'ai proposée, elle répond à tout.

On le voit, l'interprétation que M. Vincent oppose à la mienne est viciée dans son principe même. Il ne faut donc pas s'étonner si sa traduction est attaquable sur un si grand nombre de points; tout cela est, comme je l'ai dit, la conséquence d'une idée préconçue. C'est ainsi qu'indépendamment des définitions, des groupes importants de détails sont rendus d'une manière que le mot à mot ne peut justifier; que là où Pappus annonce une proposition résumant dans son énoncé dix *lieux* du premier livre du *Traité des Porismes*, M. Vincent donne une proposition qui n'est pas un *lieu*, etc.; qu'enfin il en vient à dire :

De loin c'est quelque chose et de près ce n'est rien,

d'un ouvrage dont Pappus fait une éminente distinction parmi d'autres écrits des géomètres grecs, traitant pour la plupart de questions qui, même de nos jours, ne sauraient être considérées comme faciles à résoudre.

Je fais remarquer en terminant que cette discussion laisse subsister les conclusions que j'ai émises dans mes *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide* (Commentaire, § XVII), et que le seul changement à y apporter consiste en ce qu'au lieu d'attribuer la seconde définition du *Porisme* au grand nombre de questions relatives aux *lieux* que renfermait le *Traité des Porismes*, il faut considérer cette seconde définition comme s'appliquant généralement à *toutes* les propositions de ce *Traité*, lesquelles étaient, sans exception, des *propositions locales*. Cette rectification rend les conclusions dont il s'agit plus nettes, sans en changer le sens.

CORRECTIONS POUR LES RECHERCHES NOUVELLES SUR LES PORISMES.

(1^{re} série, t. XX, p. 209 à 304.)

- Page 211, ligne 1 après ces mots les Porismes d'Euclide, ajoutez en trois livres.
 211, ligne 6 du texte grec en remontant, au lieu de οὕτως; , lisez οὕτως.
 213, ligne 2 du texte grec en remontant, au lieu de πορισμάτων, lisez πορισμάτων;
 214, note [f], après ces mots tel qu'on le trouve, ajoutez dans Halley.
 214, note [f], au lieu de δεδομένον, lisez δεδομένον.
 215, note [g], au lieu de περὶ πτόν, lisez περὶ πτόν.
 217, ligne 13, au lieu de point fixe, que, etc., lisez point fixe; que, etc.
 217, ligne 8 en remontant, au lieu de le rectangle, lisez du rectangle.
 217, ligne 10 en remontant, au lieu de côté, lisez côtés.
 247, ligne 1 du texte grec en remontant, au lieu de ἀπλῆς; , lisez ἀπλῆς.
 258, ligne 8 de la note, au lieu de ex, lisez ea.
 260, ligne 10, au lieu de trouver une des lignes, lisez trouver des lignes.
 268, ligne 2 en remontant, au lieu de proportions, lisez propositions.
 270, ligne 15 en remontant, au lieu de partie, lisez portée.
 282, ligne 4, au lieu de qui n'est pas, lisez qui n'est que.
 303, 2^e énoncé, au lieu de un rayon connu, lisez un rapport connu.
 303, note, après le mot Paris, ajoutez 1845.
-