JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE LA GOURNERIE

Note sur la courbure de la section faite dans une surface par un plan tangent

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 73-78.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__73_0>

NOTE

SUR

LA COURBURE DE LA SECTION FAITE DANS UNE SURFACE PAR UN PLAN TANGENT;

PAR M. DE LA GOURNERIE,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

1. La section d'une surface par un plan normal en un point, et contenant une des deux asymptotes de l'indicatrice de ce point, a un rayon de courbure infini. Le théorème de Meunier montre que le rayon de courbure reste infini quand le plan s'incline sur la surface, mais il n'apprend rien pour la section par le plan tangent, parce que le cosinus de l'angle du plan avec la normale devenant nul, le produit par le rayon se présente sous une forme indéterminée.

Quelques auteurs ont cru que la section par le plan tangent avait un rayon de courbure infini, mais c'est une erreur qu'on peut constater en quelques minutes par la construction d'une courbe de ce genre. En réalité la section tangente n'a généralement qu'un contact du premier ordre avec les asymptotes de l'indicatrice; le contact peut sans doute s'élever accidentellement à un degré quelconque, mais celui des autres sections le dépasse toujours d'une unité, comme nous allons le reconnaître.

2. L'équation d'un plan passant par une asymptote de l'indicatrice est

$$(1) \qquad (p-a)(x'-x)+\left(q+\frac{a}{\alpha}\right)(y'-y)-(z'-z)=0,$$

x', y', z' sont les coordonnées variables;

x, y, z celles du point considéré sur la surface;

$p, q, r, s\ldots$ les dérivées partielles des différents ordres de la fonction z donnée par l'équation de la surface;

α est la tangente de l'angle que la projection horizontale de l'asymptote de l'indicatrice fait avec l'axe des abscisses. On a

$$t\alpha^2 + 2s\alpha + r = 0. \tag{2}$$

Enfin a est une constante qui achève de déterminer la position du plan. Quand a est nul, le plan est tangent.

L'équation (1) représentera la courbe d'intersection si nous y considérons z' comme une fonction de x' et de y' donnée par l'équation de la surface; alors en la différentiant deux fois nous aurons

$$\left(q' - q - \frac{a}{\alpha}\right)\frac{dy'}{dx'} + (p' - p + a) = 0,$$

$$\left(q' - q - \frac{a}{\alpha}\right)\frac{d^2y'}{dx'^2} + \left[t\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + 2s\left(\frac{dy'}{dx'}\right) + r\right] = 0. \tag{3}$$

En égalant x', y' et z' à x, y et z, les dérivées p', q', r'... deviennent p, q, r,...; $\frac{dx'}{dy'}$ est α, et le second terme de l'équation (3) s'anéantit en vertu de l'équation (2). Par conséquent $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est nul, et la courbe a un contact du second ordre avec l'asymptote de l'indicatrice.

3. Si cependant le plan était tangent, a serait nul et la dérivée $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ se présenterait sous une forme indéterminée. Pour avoir sa valeur, il faut différentier l'équation (3) en l'y considérant comme constante. On trouve

$$3\left(s'\frac{dy'}{dx'} + r'\right)\frac{d^2y'}{dx'^2} + \left[v'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^3 + 3w'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + 3u'\left(\frac{dy'}{dx'}\right) + u'\right] = 0. \tag{4}$$

En faisant x', y' et z' égaux à x, y et z, on aura pour la section tangente la valeur de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, et on pourra calculer le rayon de courbure de la projection horizontale de la courbe, ou de la courbe elle-même, si on a pris le plan de projection parallèle au plan tangent. Ce rayon de courbure dépend des dérivées partielles du troisième ordre, et par conséquent ne peut pas être déterminé quand on connaît seulement les rayons de courbure des sections principales.

4. Si l'on avait

$$(5) \qquad v\alpha^3 + 3w\alpha^2 + 3u\alpha + u = 0,$$

la valeur de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ donnée par l'équation (4) pour le point considéré serait nulle, et la section tangente aurait un contact du second ordre avec l'asymptote de l'indicatrice, mais alors la section quelconque représentée par l'équation (1) aurait un contact du troisième ordre. Si en effet on différentie l'équation (3), on aura le premier membre de l'équation (4), augmenté du terme que donne la différentiation de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$,

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(q' - q - \frac{a}{\alpha}\right) \frac{d^3y'}{dx'^3} + 3\left(s' \frac{dy'}{dx'} + r'\right) \frac{d^2y'}{dx'^2} \\ + \left[v' \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^3 + 3w' \left(\frac{dy'}{dx'^2}\right)^2 + 3u' \frac{dy'}{dx'} + u'\right] = 0. \end{array} \right.$$

En égalant x', y' et z' à x, y et z, le dernier terme disparaît en vertu de l'équation (5), et le second parce que $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est nul. Comme d'ailleurs il s'agit d'une section quelconque pour laquelle a n'est pas nul, on voit que $\frac{d^3y'}{dx'^3}$ l'est, et que le contact s'élève au troisième ordre.

Si le plan était tangent, la dérivée $\frac{d^3y'}{dx'^3}$ se présenterait sous une forme indéterminée, et en cherchant sa valeur on trouverait une expression qui en général n'est pas nulle, mais qui peut le devenir accidentellement, et alors on reconnaîtrait que $\frac{d^4y'}{dx^4}$ serait nul pour les autres sections. On pourrait remonter ainsi de degré en degré.

5. La manière dont les calculs se présentent montre que la loi est générale, toutefois on peut le prouver régulièrement.

En différentiant n fois l'équation (1) on obtient

$$(7) \left(q' - q - \frac{a}{\alpha}\right) \frac{d^ny'}{dx'^n} + n\left(s' \frac{dy'}{dx'} + r'\right) \frac{d^{n-1}y'}{dx'^{n-1}} + A(n-2.....2) + Z'_n = 0.$$

Nous représentons par $A(n - 2.....2)$ une série de termes qui contiennent en facteur les dérivées $\frac{d^{n-2}y'}{dx'^{n-2}}, \frac{d^{n-1}y'}{dx'^{n-1}}, \ldots$, jusqu'à $\frac{d^2y'}{dx'^2}$. L'expression de Z'_n est

$$(8)\quad Z'_n = \frac{d^n z'}{dy'^n}\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^n + n\,\frac{d^n z'}{dy'^{n-1}\,dx'}\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^n z'}{dy'^{n-2}\,dx'^2}\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^{n-2}.$$

Supposons maintenant que la loi que nous avons indiquée soit satisfaite jusqu'au degré n, c'est-à-dire que l'asymptote de l'indicatrice ait un contact du degré $n-1$ avec la section tangente et un contact du degré n avec une section quelconque. En égalant dans l'équation (7) x', y' et z' à x, y et z, toutes les dérivées depuis le second degré jusqu'au degré $n-1$ seront nulles. Celle du degré n le sera aussi quand a ne sera pas égal à zéro; Z_{n+1} sera donc nul.

Si le plan est tangent, $\frac{d^n y'}{dx'^n}$ se présente sous une forme indéterminée; pour avoir sa valeur, il faut différentier l'équation (7), en y considérant cette dérivée comme constante. On a

$$(9)\qquad (n+1)\left(s'\frac{dy'}{dx'} + r'\right)\frac{d^n y'}{dx'^n} + A_1(n-1\ldots\ldots 2) + Z'_{n+1} = 0;$$

La différentielle complète de l'équation (7) est

$$(10)\left\{\begin{aligned}&\left(q' - q - \frac{a}{\alpha}\right)\frac{d^{n+1}y'}{dx'^{n+1}} + (n+1)\left(s'\frac{dy'}{dx'} + r'\right)\frac{d^n y'}{dx'^n} + A_1(n-1\ldots\ldots 2)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + Z'_{n+1} = 0.\end{aligned}\right.$$

Faisant dans les équations (9) et (10) x', y' et z' égaux à x, y et z, on trouve pour la section tangente

$$(11)\qquad \frac{d^n y'}{dx'^n} = -\frac{Z_{n+1}}{(n+1)(s\alpha + r)},$$

et pour la section quelconque non tangente

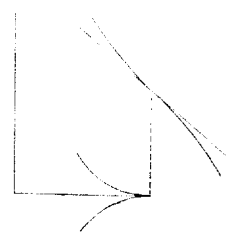
$$(12)\qquad \frac{d^{n+1}y'}{dx'^{n+1}} = \frac{\alpha}{a}Z_{n+1}.$$

On voit que la condition $Z_{n+1} = 0$, qui rendrait nul $\frac{d^n y'}{dx'^n}$ dans l'équation (11) et élèverait par conséquent au degré n le contact de l'asymptote de l'indicatrice avec la section tangente, anéantirait $\frac{d^{n+1}y'}{dx'^{n+1}}$

dans l'équation (12) et porterait au degré $n+1$ le contact de cette droite avec une section quelconque.

6. Nous avons toujours implicitement supposé que le binôme $s\alpha + r$ n'était pas nul. Dans le cas contraire, les racines de l'équation (2) seraient égales, et les deux asymptotes de l'indicatrice seraient confondues en une seule. Alors si le second terme de l'équation (4) n'était pas nul, la valeur de $\frac{d^2 y'}{dx'^2}$ pour la section tangente serait infinie, et cette section aurait un rebroussement. Cette circonstance se présente notamment quand la méridienne d'une surface de révolution a une inflexion dont la tangente n'est pas perpendiculaire à l'axe (*fig.* 1).

Fig. 1.



Mais si l'équation (5) est satisfaite, la valeur de $\frac{d^2 y'}{dx'^2}$, donnée par l'équation (4) pour la section tangente, se présentera sous une forme indéterminée. Différentiant en considérant $\frac{d^2 y'}{dx'^2}$ comme constant, on trouve

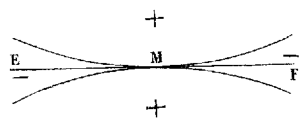
$$(13)\quad s'\left(\frac{d^2 y'}{dx'^2}\right)^2 + \left[\begin{array}{c}(v'+w')\left(\dfrac{dy'}{dx'}\right)^2 \\ + 2(w'+u')\dfrac{dy'}{dx'} + (u'+u')\end{array}\right]\frac{d^2 y'}{dx'^2} + \frac{1}{3}Z_n = 0.$$

Cette équation donnera pour $\frac{d^2 y'}{dx'^2}$ deux valeurs qui feront connaître les rayons de courbure des projections de deux arcs tangents l'un à l'autre qui dans ce cas composent la courbe.

D'ailleurs l'équation (5), qui pourrait être écrite $Z_3 = 0$, montre que les sections non tangentes ont alors un contact du troisième ordre avec l'asymptote de l'indicatrice, de sorte qu'il y a une différence de

2 degrés. Mais si l'on observe que l'asymptote EF a deux contacts du

Fig. 2.

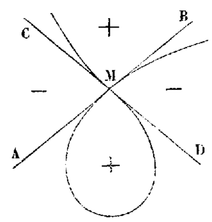


premier ordre, on reconnaîtra que la loi convenablement interprétée se vérifie encore dans ce cas-ci.

7. Quelques raisonnements géométriques très-simples aideront à comprendre ce qui précède.

Considérons la courbe à nœud, section de la surface par son plan tangent; elle divise la surface en parties qui se réunissent angulaire-

Fig. 3.



ment au point de contact M. Les unes sont au-dessus du plan tangent, les autres au-dessous : elles sont distinguées par les signes + et −. Si une asymptote AB de l'indicatrice ne traverse pas la branche de courbe qu'elle touche, elle aura avec elle un contact d'un ordre impair, et alors on voit que la section de la surface par le plan normal s'étendra d'un côté au-dessus du plan tangent, et de l'autre au-dessous, et, par suite, qu'elle aura avec elle un contact d'un ordre pair. L'inverse aurait lieu pour l'asymptote CD qui traverse la courbe.

Si la section par le plan tangent est formée de deux arcs ayant un contact du premier ordre avec une droite EF (*fig.* 2), asymptote unique de l'indicatrice, il est évident que la section normale faite par cette ligne a un contact d'un degré impair avec la surface.