

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAINVIN

Sur un certain système d'équations linéaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 3 (1858), p. 41-46.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3_41_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3_41_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

PAR M. PAINVIN.

Docteur ès Sciences.

[illegible]

Soit le déterminant

$$D_{\mu+1} = \begin{vmatrix} a_1 & m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & a_2 & m_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & a_3 & m_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{\mu-2} & m_{\mu-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n_{\mu-2} & a_{\mu-1} & m_{\mu+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n_{\mu-1} & a_{\mu} & m_{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n^{\mu} & a_{\mu+1} \end{vmatrix}$$

Tome III (2^e série). — FÉVRIER 1858.

Or, si l'on ajoute toutes les lignes horizontales à la première, on obtient une ligne dont tous les termes sont égaux à $r + \mu(\alpha - 1)$; par suite, le déterminant (I) s'annule pour $r = \mu(1 - \alpha)$.

Divisons, maintenant, tous les termes de la première ligne par $r + \mu(\alpha - 1)$, puis retranchons la deuxième colonne, à gauche, de la première; la troisième de la deuxième, etc.; la dernière de l'avant-dernière; le déterminant (I) se réduira à la forme suivante:

$$\begin{array}{cccccccc}
 -r + \mu(\alpha - 1) + 1 & r - 2\alpha - 1 & 2\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 -(\mu - 1)(\alpha - 1) - r + (\mu - 1)(\alpha - 1) + 2 & r - 3\alpha - 2 & 3\alpha & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -(\mu - 2)(\alpha - 1) & -r + (\mu - 2)(\alpha - 1) & r - 4\alpha - 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -(\mu - 3)(\alpha - 1) - r + (\mu - 3)(\alpha - 1) + 4 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -(\mu - 4)(\alpha - 1) & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (\mu - 2)\alpha & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r - (\mu - 1)\alpha - \mu + 2 & (\mu - 1)\alpha & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -r + 2(\alpha - 1) + \mu - 1 & r - \mu\alpha - \mu + 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(\alpha - 1) & -r + (\alpha - 1) + \mu & 0
 \end{array}$$

Ajoutons alors à la première ligne toutes les lignes horizontales inférieures; à la deuxième, toutes les lignes horizontales inférieures, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière ligne; changeons ensuite le signe de tous les termes du déterminant ainsi formé, et posons

$$r - \alpha = r_1,$$

on obtient le déterminant

$$\begin{array}{cccccccc}
 r_1 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 (\mu - 1)(\alpha - 1) & r_1 - 1 & 2\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & (\mu - 2)(\alpha - 1) & r_1 - 2 & 3\alpha & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (\mu - 3)(\alpha - 1) & r_1 - 3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r_1 - \mu + 4 & (\mu - 3)\alpha & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3(\alpha - 1) & r_1 - \mu + 3 & (\mu - 2)\alpha & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2(\alpha - 1) & r_1 - \mu + 2 & (\mu - 1)\alpha \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (\alpha - 1) & r_1 - \mu + 1
 \end{array}$$

6..

On voit que ce déterminant ne diffère du déterminant (I) que par le changement de r en r_1 et de μ en $(\mu - 1)$; donc ce dernier déterminant s'annulera pour

$$r_1 = (\mu - 1)(1 - \alpha);$$

et, par suite, le déterminant (I) s'annulera pour

$$r = \alpha + (\mu - 1)(1 - \alpha).$$

Si maintenant on fait subir au déterminant (II) les mêmes transformations que celles qu'on a fait subir au déterminant (I), et qu'on pose

$$r_2 = r_1 - \alpha,$$

on obtiendra nécessairement un troisième déterminant qui ne différera du déterminant (II) que par le changement de r_1 en r_2 et de $(\mu - 1)$ en $(\mu - 2)$; donc ce troisième déterminant s'annulera pour

$$r_2 = (\mu - 2)(1 - \alpha),$$

et, par suite, le déterminant (I) s'annulera pour

$$r = 2\alpha + (\mu - 2)(1 - \alpha).$$

Après la $(\mu - 2)^{\text{ième}}$ transformation, on arrivera au déterminant

$$(\mu - 1) \begin{vmatrix} r_{\mu-2} & \alpha & 0 \\ 2(\alpha - 1) & r_{\mu-2} - 1 & 2\alpha \\ 0 & (\alpha - 1) & r_{\mu-2} - 2 \end{vmatrix}$$

qui s'annule pour

$$r_{\mu-2} = 2(1 - \alpha);$$

d'où

$$r = (\mu - 2)\alpha + 2(1 - \alpha).$$

Le déterminant $(\mu - 1)$, soumis au même calcul que le précédent, conduira au déterminant

$$(\mu) \begin{vmatrix} r_{\mu-1} & \alpha \\ (\alpha - 1) & r_{\mu-1} - 1 \end{vmatrix}$$

qui s'annule pour

$$r_{\mu-1} = (1 - \alpha);$$

d'où

$$r = (\mu - 1) \alpha + (1 - \alpha).$$

Enfin le déterminant (μ) donnera successivement

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (\alpha - 1) & r_{\mu-1} - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \alpha - r_{\mu-1} & r_{\mu-1} - 1 \end{vmatrix} = r_{\mu-1} - \alpha;$$

par suite,

$$r_{\mu-1} = \alpha;$$

d'où

$$r = \mu \alpha.$$

On voit donc que les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant (I) sont

$$\mu \alpha; (\mu - 1) \alpha + (1 - \alpha); (\mu - 2) \alpha + 2(1 - \alpha); \dots; (\mu - i) \alpha + i(1 - \alpha), \dots, \\ \alpha + (\mu - 1)(1 - \alpha); \mu(1 - \alpha);$$

ou bien, en posant $\delta = 1 - 2\alpha$,

$$\mu \alpha, \mu \alpha + \delta, \mu \alpha + 2\delta, \dots, \mu \alpha + i\delta, \dots, \mu \alpha + (\mu - 1)\delta, \mu \alpha + \mu\delta;$$

ces racines forment une progression arithmétique dont le premier terme est $\mu \alpha$, et la raison $\delta = 1 - 2\alpha$.

Ainsi, lorsque des quantités $h_1, h_2, \dots, h_\mu, h_{\mu+1}$ sont définies par des équations telles que les équations (1), la quantité $h_{\mu+1}$ ou le déterminant (I) a pour expression

$$(r - \mu \alpha)(r - \mu \alpha - \delta) \dots (r - \mu \alpha - i\delta) \dots [r - \mu \alpha - (\mu - 1)\delta] (r - \mu \alpha - \mu \delta),$$

la constante α étant donnée par l'équation du second degré

$$\alpha(\alpha - 1) = a.$$

Il est facile de voir que l'on obtient toujours les mêmes racines pour l'équation

$$h_{\mu+1} = 0,$$

quelle que soit la valeur qu'on adopte pour α ; je supposerai donc

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4a};$$

d'où

$$\delta = -\sqrt{1+4a}.$$

Si l'on fait

$$a = -\frac{1}{4},$$

d'où il résulte

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha - 1 = -\frac{1}{2}, \quad \delta = 0,$$

on est conduit à l'identité remarquable

$$\begin{vmatrix} r & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & r-1 & \frac{2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu-1}{2} & r-2 & \frac{3}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu-2}{2} & r-3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r-\mu+2 & \frac{\mu-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{2}{2} & r-\mu+1 & \frac{\mu}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & r-\mu \end{vmatrix} = \left(r - \frac{\mu}{2}\right)^{\mu+1}$$