

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. SCHLÖMILCH

**Sur le changement de la variable indépendante dans
les dérivées d'une fonction**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 3 (1858), p. 385-390.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__385_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LE CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE
DANS LES DÉRIVÉES D'UNE FONCTION ;

PAR M. O. SCHLÖMILCH.

On connaît suffisamment la méthode élémentaire à l'aide de laquelle on peut trouver les dérivées

$$\frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \frac{d^3u}{dz^3}, \dots$$

de la fonction $u = F(z)$, dans le cas où z cesse d'être la variable indé-

pendante et devient fonction d'une autre variable x . En posant

$$(1) \quad u = F(z), \quad z = \varphi(x), \quad F[\varphi(x)] = f(x),$$

on obtient les équations

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= F'[\varphi(x)] = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \\ \frac{d^2u}{dz^2} &= F''[\varphi(x)] = \frac{\varphi'(x)f''(x) - \varphi''(x)f'(x)}{\varphi'(x)^3}, \\ \frac{d^3u}{dz^3} &= F'''[\varphi(x)] = \frac{\varphi'(x)^2 f'''(x) - 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(x) + [3\varphi''(x)^2 - \varphi'(x)\varphi'''(x)]f'(x)}{\varphi'(x)^5}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Comme ces formules deviennent très-complicées, on se peut proposer le problème de les simplifier, en indiquant la loi de leur formation; nous ferons voir que cette loi se présente sous une forme assez élégante. Pour cela nous remarquons d'abord que l'expression $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ est ce que devient

$$\frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)} f'(x+\rho), \quad \text{pour } \rho = 0;$$

on a de plus

$$\frac{\varphi'(x)f''(x) - \varphi''(x)f'(x)}{\varphi'(x)^3} = D_\rho \left[\left(\frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)} \right)^2 f'(x+\rho) \right], \quad \text{pour } \rho = 0,$$

et on en conclura par induction que la formule générale sera

$$(2) \quad \frac{d^n u}{dz^n} = F^{(n)}[\varphi(x)] = D_\rho^{n-1} \left[\left(\frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)} \right)^n f'(x+\rho) \right]_{(0)},$$

dans laquelle l'indice (0) veut dire que l'on doit prendre $\rho = 0$ après avoir achevé les différentiations par rapport à ρ .

La démonstration de notre formule repose sur une autre formule que nous allons développer. En posant, pour abrégé,

$$\Omega = \frac{\rho}{\varphi(x+\rho) - \varphi(x)},$$

on a identiquement

$$\frac{\rho}{\Omega} D_x \Omega - \frac{\rho}{\Omega^2} D_\rho \Omega + \frac{1}{\Omega} = \varphi'(x).$$

Nous multiplions les deux membres de cette équation par Ω^{n+1} , et après cela nous différencions k fois par rapport à ρ , en faisant usage de la formule

$$D_\rho^k(\rho\varphi) = \rho D_\rho^k \varphi + k D_\rho^{k-1} \varphi;$$

de cette manière nous parvenons à l'équation

$$\begin{aligned} & \rho D_\rho^k(\Omega^{n+1} D_x \Omega) + k D_\rho^{k-1}(\Omega^{n+1} D_x \Omega) \\ & - \rho D_\rho^k(\Omega^{n+1} D_\rho \Omega) - k D_\rho^{k-1}(\Omega^{n+1} D_\rho \Omega) + D_\rho^k \Omega^n = \varphi'(x) D_\rho^k \Omega^{n+1}. \end{aligned}$$

Dans le cas de $\rho = 0$, cette équation se réduit à

$$\begin{aligned} & k [D_\rho^{k-1}(\Omega^{n+1} D_x \Omega)]_{(0)} \\ & - k [D_\rho^{k-1}(\Omega^{n+1} D_\rho \Omega)]_{(0)} + [D_\rho^k \Omega^n]_{(0)} = \varphi'(x) [D_\rho^k \Omega^{n+1}]_{(0)}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{k}{n} [D_\rho^{k-1} D_x \Omega^n]_{(0)} + \frac{n-k}{n} [D_\rho^k \Omega^n]_{(0)} = \varphi'(x) [D_\rho^k \Omega^{n+1}]_{(0)}.$$

En introduisant le facteur

$$(n)_k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k},$$

nous aurons enfin

$$(4) \quad (n-1)_{k-1} [D_\rho^{k-1} D_x \Omega^n] + (n-1)_k [D_\rho^k \Omega^n]_{(0)} = (n)_k \varphi'(x) [D_\rho^k \Omega^{n+1}]_{(0)}.$$

Maintenant la formule (2) qu'on sait être exacte pour $n=1$ peut être aisément démontrée pour n quelconque par le raisonnement si connu où l'on passe d'une valeur de n à la valeur suivante $n+1$. On a d'abord

$$\begin{aligned} F^{(n)}[\varphi(x)] &= \{D_\rho^{n-1}[\Omega^n f'(x+\rho)]\}_{(0)} \\ &= [\Omega^n]_{(0)} f^{(n)}(x) + (n-1)_1 [D_\rho \Omega^n]_{(0)} f^{(n-1)}(x) \\ &\quad + (n-1)_2 [D_\rho^2 \Omega^n]_{(0)} f^{(n-2)}(x) + \dots; \end{aligned}$$

la dérivée de cette équation, prise par rapport à x , est

$$\begin{aligned} & F^{(n+1)}[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \\ &= [\Omega^n]_{(0)} f^{(n+1)}(x) + \{[D_x \Omega^n]_{(0)} + (n-1)_1 [D_\rho \Omega^n]_{(0)}\} f^{(n)}(x) \\ & \quad + \{(n-1)_1 [D_\rho D_x \Omega^n]_{(0)} + (n-1)_2 [D_\rho^2 \Omega^n]_{(0)}\} f^{(n-1)}(x) \\ & \quad + \{(n-1)_2 [D_\rho^2 D_x \Omega^n]_{(0)} + (n-1)_3 [D_\rho^3 \Omega^n]_{(0)}\} f^{(n-2)}(x) \\ & \quad + \dots \end{aligned}$$

En remplaçant $[\Omega^n]_{(0)}$ par $\varphi'(x)[\Omega^{n+1}]_{(0)}$ et en faisant usage de la formule (4), on trouve l'équation

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}[\varphi(x)] &= [\Omega^{n+1}]_{(0)} f^{(n+1)}(x) + (n)_1 [D_\rho \Omega^{n+1}]_{(0)} f^{(n)}(x) \\ & \quad + (n)_2 [D_\rho^2 \Omega^{n+1}]_{(0)} f^{(n-1)}(x) + \dots \\ &= [D_\rho^n [\Omega^{n+1} f'(x + \rho)]]_{(0)}, \end{aligned}$$

qui est la même que si l'on avait écrit $n+1$ au lieu de n dans la formule primitive. Nous remarquerons encore que l'on peut la présenter sous la forme

$$(5) \quad F[\varphi(x)] = f(x), \quad F^{(n)}[\varphi(x)] = D_\xi^{n-1} \left\{ \left[\frac{\xi - x}{\varphi(\xi) - \varphi(x)} \right]^n f'(\xi) \right\}_{(\xi=x)}.$$

Nous ferons quelques applications de ce théorème.

L'équation

$$x = \varphi(y),$$

résolue par rapport à y , donnerait une valeur de la forme

$$y = \psi(x),$$

et toute fonction de y serait aussi une fonction de x ; donc si l'on considère la fonction

$$f(y) = F(x),$$

on a

$$\frac{d^n f(y)}{dx^n} = \frac{d^n F(x)}{dx^n} = F^{(n)}(x) = F^{(n)}[\varphi(y)].$$

On voit qu'il suffit d'écrire y au lieu de x dans la formule (5), ce qui

donne

$$(6) \quad \frac{d^n f(y)}{dx^n} = D_\xi^{n-1} \left\{ \left[\frac{\xi - y}{\varphi(\xi) - \varphi(y)} \right]^n f'(\xi) \right\}_{(\xi=y)}.$$

Le cas le plus simple est $f(y) = y$; la différentiation de la fonction inverse, déterminée par l'équation

$$x = \varphi(y),$$

se fait donc à l'aide de la formule

$$(7) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = D_\xi^{n-1} \left[\frac{\xi - y}{\varphi(\xi) - \varphi(y)} \right]_{(\xi=y)}^n.$$

La formule (5) peut aussi servir pour trouver immédiatement les théorèmes de Burmann et de Lagrange; en effet cette déduction n'est qu'une simple transformation du théorème de Maclaurin que nous présentons sous la forme

$$F(z) = F(0) + \frac{F'(0)}{1} z + \frac{F''(0)}{1.2} z^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{1.2\dots n} z^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{1.2\dots n} \int_0^z (z-t)^n F^{(n+1)}(t) dt.$$

En prenant

$$z = \varphi(x), \quad F(z) = F[\varphi(x)] = f(x),$$

on a d'abord

$$F^{(m)}(z) = D_\xi^{m-1} \left\{ \left[\frac{\xi - x}{\varphi(\xi) - \varphi(x)} \right]^m f'(\xi) \right\}_{(\xi=x)};$$

on en déduit $F^{(m)}(0)$ en prenant pour x une racine de l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$

Soit a une de ces racines, alors on trouve

$$F^{(m)}(0) = D_\xi^{m-1} \left\{ \left[\frac{\xi - a}{\varphi(\xi)} \right]^m f'(\xi) \right\}_{(\xi=a)},$$

et, par conséquent,

$$(8) \quad f(x) = f(a) + \frac{A_1}{1} \varphi(x) + \frac{A_2}{1.2} \varphi^2(x) + \dots + \frac{A_n}{1.2 \dots n} \varphi^n(x) + R_n,$$

$$(9) \quad A_m = D_x^{m-1} \left\{ \left[\frac{x-a}{\varphi(x)} \right]^m f'(x) \right\}_{(x=a)}.$$

C'est la formule de Burmann présentée à l'Institut l'an 1796. Quant au reste R_n , il est

$$R_n = \frac{1}{1.2 \dots n} \int_0^{\varphi(x)} [\varphi(x) - t]^n F^{(n+1)}(t) dt,$$

ou bien, si l'on fait la substitution $t = \varphi(u)$,

$$R_n = \frac{1}{1.2 \dots n} \int_a^x [\varphi(x) - \varphi(u)]^n F^{(n+1)}[\varphi(u)] \varphi'(u) du;$$

mais il faut remarquer que les limites $u = a$ et $u = x$ ne sont justes que sous la condition que $\varphi'(u)$ ne change pas de signe entre $u = a$ et $u = x$, parce que t est une quantité qui croît ou qui décroît de $t = 0$ à $t = \varphi(x)$. Enfin la formule (2) donne

$$(10) \quad R_n = \frac{1}{1.2 \dots n} \int_a^x [\varphi(x) - \varphi(u)]^n \varphi'(u) du D_\rho^n \left\{ \left[\frac{\rho}{\varphi(u+\rho) - \varphi(u)} \right]^{n+1} f'(u+\rho) \right\}_{(\rho=0)}.$$

Remplaçons maintenant x par y et $\varphi(x)$ par $\frac{y-a}{\psi(y)}$; nous aurons alors, en vertu des formules (8) et (9),

$$(11) \quad f(y) = f(a) + \frac{A_1}{1} \frac{y-a}{\psi(y)} + \dots + \frac{A_n}{1.2 \dots n} \left(\frac{y-a}{\psi(y)} \right)^n + R_n,$$

$$(12) \quad A_m = D_y^{m-1} \left\{ \psi(y)^m f'(y) \right\}_{(y=a)};$$

à l'aide de la substitution $\frac{y-a}{\psi(y)} = x$, on en déduit immédiatement le théorème de Lagrange.