JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Sur la théorie des formes cubiques à trois indéterminées

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 37-40.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__37_0>

SUR

LA THÉORIE DES FORMES CUBIQUES A TROIS INDÉTERMINÉES;

PAR M. HERMITE.

L'étude des fonctions homogènes du troisième degré et à trois indéterminées conduit à considérer avec une forme donnée de cette espèce deux systèmes différents de fonctions qui s'en déduisent, et dont je rappellerai en premier lieu les expressions. Soit pour cela U la transformée canonique de la forme proposée, de sorte que l'on ait

$$U = x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz;$$

le premier de ces systèmes sera celui des invariants et du covariant cubique, savoir :

$$\begin{aligned} S &= -l + l^4, \\ T &= 1 - 20l^3 - 8l^6, \\ HU &= l^2(x^3 + y^3 + z^3) - (1 + 2l^3)xyz. \end{aligned}$$

Le second système sera formé des deux contre-variants ou formes cubiques adjointes, savoir :

$$\begin{aligned} PU &= -l(x^3 + y^3 + z^3) + (-1 + 4l^3)xyz, \\ QU &= (1 - 10l^3)(x^3 + y^3 + z^3) - 6l^2(5 + 4l^3)xyz. \end{aligned}$$

J'omets à dessein les covariants et formes adjointes d'un degré supérieur au troisième, n'ayant pas à m'en occuper ici, et j'observe seulement que les combinaisons linéaires

$$\begin{aligned} &\alpha U + 6\beta HU, \\ 6\alpha PU + {}&\beta QU, \end{aligned}$$

où α et β sont des constantes indéterminées, représentent encore, la première un covariant et la seconde une forme adjointe de U. On en peut conclure que les invariants du quatrième et du sixième ordre de ces deux fonctions, que nous désignerons avec M. Cayley de cette manière :

$$\begin{array}{ll} S(\ \alpha U + 6\beta HU), & T(\ \alpha U + 6\beta HU), \\ S(6\alpha PU + \ \beta QU), & T(6\alpha PU + \ \beta QU), \end{array}$$

doivent reproduire des combinaisons rationnelles des invariants primitifs S et T. C'est effectivement ce que ce savant géomètre a mis en évidence en donnant dans les Tables qui terminent son troisième Mémoire sur les *quantics* les expressions complétement développées de ces quatre quantités. En cherchant à approfondir la nature de ces expressions, j'ai été conduit à un résultat intéressant, non-seulement parce qu'il en montre le véritable caractère, mais parce qu'il donne un nouvel exemple de cette étroite connexion entre les formes cubiques à trois indéterminées et les formes biquadratiques binaires, que M. Hesse et M. Arouhold ont les premiers signalés dans leurs belles recherches. Mais je dois rappeler d'abord qu'en représentant une forme binaire du quatrième degré par

$$f = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4,$$

on a pour les covariants des degrés quatrième et sixième, ces expressions

$$g = (ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2y^2 + 2(be - cd)xy^3 + (ec - d^2)y^4,$$

$$\begin{aligned} h = {} & (a^2d - 3abc + 2b^3)x^6 \\ & + (a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6bc^2)x^5y \\ & + (5abe - 15acd + 10b^2d)x^4y^2 \\ & + (-10ad^2 + 10b^2e)x^3y^3 \\ & + (-5ade + 15bce - 10bd^2)x^2y^4 \\ & + (-ae^2 - 2bde + 9c^2e - 6cd^2)xy^5 \\ & + (-be^2 + 3cde - 2d^3)y^6. \end{aligned}$$

Cela posé, je considère la forme biquadratique suivante en α et β, savoir :

$$f = \alpha^4 - 24 S \alpha^2 \beta^2 - 8 T \alpha \beta^3 - 48 S^2 \beta^4,$$

et si l'on en déduit, d'après les formules qui viennent d'être rapportées, les deux covariants g et h, on aura ces formules remarquables, savoir :

$$S(\alpha U + 6\beta HU) = -\frac{1}{24} g,$$

$$T(\alpha U + 6\beta HU) = -\frac{1}{8} h,$$

$$64 S^3 (\alpha U + 6\beta HU) - T^2 (\alpha U + 6\beta HU) = (64 S^3 - T^2) f.$$

Soit en second lieu

$$f = 48 S \alpha^4 + 8 T \alpha^3 \beta - 96 S^2 \alpha^2 \beta^2 - 24 TS \alpha \beta^3 - (T^2 + 16 S^3) \beta^4,$$

on obtiendra d'une manière toute semblable

$$S(6\alpha PU + \beta QU) = -\frac{1}{64} g,$$

$$S(6\alpha PU + \beta QU) = -\frac{1}{128} h,$$

$$64 S^3 (6\alpha PU + \beta QU) - T^2 (6\alpha PU + \beta QU) = (64 S^3 - T^2)^2 f.$$

Ces deux formes f du quatrième degré que nous avons employées successivement ont d'ailleurs entre elles cette liaison singulière, que si l'on désigne par k, k', k'', k''' les racines de l'équation

$$x^4 - 24 S x^2 - 8 T x - 48 S^2 = 0,$$

les racines de l'autre forme, c'est-à-dire de l'équation

$$48 S x^4 + 8 T x^3 - 96 S^2 x^2 - 24 TS x - (T^2 + 16 S^3) = 0,$$

seront

$$\frac{1}{4} k + \frac{S}{k}, \quad \frac{1}{4} k' + \frac{S}{k'}, \quad \frac{1}{4} k'' + \frac{S}{k''}, \quad \frac{1}{4} k''' + \frac{S}{k'''}.$$

Je reviendrai sur ce point dans un prochain travail, où je me propose d'établir entre autres choses cette proposition, qu'il existe toujours *une substitution linéaire réelle* pour réduire toute forme cubique donnée à coefficients réels à l'expression canonique

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6\,lxyz.$$

La même chose n'a pas lieu, comme on sait, ni pour les formes biquadratiques, ni pour les formes cubiques à deux indéterminées.