JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; premier article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 143-152.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__143_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

PREMIER ARTICLE.

J'avais entrepris avec une extrême ardeur dans le courant de l'année dernière des recherches sur divers points de la théorie des nombres que des occupations nouvelles et impérieuses m'ont, à mon grand regret, obligé trop tôt d'abandonner. Ne pouvant espérer d'avoir de longtemps la liberté d'y revenir, surtout de les reprendre dans leur ensemble et dans leur tendance vers un même but, je me décide à publier morceau par morceau, et à mesure que je disposerai de quelques minutes, ceux des résultats auxquels j'étais déjà parvenu qui peuvent encore offrir de l'intérêt quand on les considère isolément. Je réclame pour ce travail ingrat et décousu l'indulgence du lecteur.

La première formule que je donnerai contient une fonction $f(x)$ qui doit être paire, ou plutôt qui doit être telle que l'on ait

$$f(-x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs de x qu'on a à employer : ces valeurs seront ici des nombres entiers pairs, en sorte que l'on pourrait poser, par exemple,

$$f(x) = (-1)^{\frac{x}{2}}.$$

J'admets aussi que pour chacune de ces valeurs de x, la valeur de $f(x)$ est bien déterminée. La fonction $f(x)$ est du reste une fonction quelconque, algébrique ou numérique.

Soit m un nombre impair donné à volonté. Décomposons $2m$ en deux parties impaires m', m'', de manière que l'on ait

$$2m = m' + m'',$$

m' prenant successivement les valeurs

$$1,\ 3,\ 5,\ldots,\ 2m-3,\ 2m-1,$$

tandis que m'' prend les valeurs complémentaires ou correspondantes

$$2m-1,\ 2m-3,\ldots,\ 5,\ 3,\ 1.$$

Désignons généralement par d' un quelconque des diviseurs de m', et par d'' un quelconque des diviseurs du nombre correspondant m'', puis formons la somme triple

$$S=\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\}.$$

Les deux premières sommations se rapportent aux diviseurs d', d'' de chacun des groupes m', m'', et le troisième $\sum$ indique que l'on doit faire le total des sommes partielles ainsi obtenues pour les groupes successifs

$$1,\ 2m-1;\quad 3,\ 2m-3;\ldots;\quad 2m-1,\ 1.$$

La valeur de la somme complète S peut toujours être exprimée simplement au moyen des diviseurs d de l'entier impair donné m. Je trouve en effet que

$$S=\sum d[f(0)-f(2d)].$$

Ainsi l'on a

$$(\text{A})\qquad \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'')-f(d'+d'')]\right\}=\sum d[f(0)-f(2d)].$$

Soit, par exemple, $m=3$, les décompositions de $2m$ seront

$$1+5,\quad 3+3,\quad 5+1.$$

Pour chacun des deux groupes extrêmes les valeurs absolues de $d'-d''$ et de $d'+d''$ (on n'a besoin que des valeurs absolues puisque $f(-x)=f(x)$ par hypothèse) sont respectivement 0 et 4 pour $d'-d''$, 2 et 6 pour $d'+d''$: pour le groupe du milieu 3,3, elles sont 2, 4, 4, 6 et 0, 0, 2, 2. Le premier membre de la formule (A) s'exprime donc par

$$2[f(0)+f(4)-f(2)-f(6)]+2f(0)+2f(2)-f(2)-2f(4)-f(6),$$

ce qui se réduit à

$$4f(0)-f(2)-3f(6).$$

Or au second membre, où d doit prendre les deux valeurs 1 et 3, on trouve

$$f(0)-f(2)+3[f(0)-f(6)];$$

c'est bien la même valeur qu'au premier membre.

La formule (A) peut être établie par différents moyens. Je réserve la démonstration pour un autre moment, me bornant aujourd'hui à indiquer quelques applications des plus simples.

Posons

$$f(x)=x^2,$$

d'où

$$f(d'-d'')-f(d'+d'')=-4d'd'',$$

et

$$f(0)-f(2d)=-4d^2.$$

En changeant donc les signes des deux membres et divisant par 4, la formule (A) nous donnera

$$\sum\left(\sum\sum d'd''\right)=\sum(d^3).$$

La double somme

$$\sum\sum d'd''$$

n'est autre chose que le produit de $\sum d'$ par $\sum d''$, c'est-à-dire le produit de la somme des diviseurs de m' par la somme des diviseurs de m''. En désignant donc à notre ordinaire par $\zeta_\mu(m)$ la somme des puissances de degré μ des diviseurs de tout nombre m, nous aurons

$$\sum\left(\sum\sum d'd''\right)=\sum\zeta_1(m')\zeta_1(m''),$$

ou si l'on veut,

$$\sum\left(\sum\sum d' d''\right) = \sum \zeta_1(n)\,\zeta_1(2m-n),$$

là sommation au second membre portant actuellement sur n dont les valeurs successives sont $1, 3, 5, \ldots, 2m-1$.

Quant à $\sum(d^3)$, c'est la somme des cubes des diviseurs d de m, ou autrement dit, c'est $\zeta_3(m)$. On a donc, pour tout nombre impair m,

$$\zeta_3(m) = \sum \zeta_1(n)\,\zeta_1(2m-n),$$

ou bien, sans signe sommatoire,

$$\zeta_3(m) = \zeta_1(1)\zeta_1(2m-1) + \zeta_1(3)\zeta_1(2m-3) + \ldots + \zeta_1(2m-1)\zeta_1(1).$$

Nous avons fait usage de cette formule dans le cahier précédent (page 85). Ce n'est, comme on voit, qu'un cas très-particulier de la formule (A).

Soit à présent

$$f(x) = x^4,$$

et la formule (A) nous donnera

$$\sum\left[\sum\sum(d'^3 d'' + d''^3 d')\right] = 2\sum(d^5).$$

Le second membre s'exprime immédiatement par $2\zeta_5(m)$. Quant au premier membre, j'observe que la somme

$$\sum\sum(d'^3 d'' + d''^3 d')$$

est formée de deux parties

$$\sum\sum(d'^3 d''), \quad \sum\sum(d''^3 d'),$$

évidemment égales entre elles, parce que les valeurs de m'' sont dans l'ordre inverse les mêmes que celles de m'. Cette somme se réduit donc à

$$2\sum\sum(d'd''^3),$$

c'est-à-dire au double du produit

$$\sum d' \cdot \sum d''^3,$$

ou enfin au double de

$$\zeta_1(m')\,\zeta_3(m'').$$

On a donc finalement, pour tout nombre impair m,

$$\zeta_5(m) = \sum \zeta_1(m')\,\zeta_3(m''),$$

ou, si l'on veut,

$$\zeta_5(m) = \sum \zeta_1(n)\,\zeta_3(2m-n),$$

le signe sommatoire portant sur les valeurs $1, 3, 5, \ldots, 2m-1$ de n.

Comme $\zeta_1(m)$ exprime le nombre des décompositions du quadruple de l'entier impair m en une somme de quatre carrés impairs, la formule

$$\sum \zeta_1(m')\,\zeta_1(m'') = \zeta_3(m)$$

montre que $\zeta_3(m)$ est le nombre des décompositions de $8m$ en une somme de huit carrés impairs; et, cela étant, la formule

$$\sum \zeta_1(m')\,\zeta_3(m'') = \zeta_5(m)$$

indique à son tour que $\zeta_5(m)$ est le nombre des décompositions de $16m$ en une somme de huit carrés impairs faisant un total dont le quotient par 8 soit impair, plus le double d'une autre somme de quatre carrés impairs. En effet, pour opérer sur $16m$ toutes les décompositions dont il s'agit, il faut prendre de toutes les manières possibles

$$16m = 8m'' + 2.4m',$$

m' et m'' étant les mêmes entiers impairs que dans notre équation

$$2m = m' + m'',$$

puis décomposer $8m''$ en huit carrés impairs et $4m'$ en quatre carrés impairs, et enfin combiner entre elles de toutes les manières possibles ces décompositions, ce qui donne pour chaque groupe un nombre d'expressions marqué par

$$\zeta_3(m'')\zeta_1(m').$$

De là pour les groupes réunis ce nombre complet

$$\sum \zeta_1(m')\zeta_3(m'')$$

que nous voyons être égal à $\zeta_5(m)$. C'est donc bien par $\zeta_5(m)$ que s'exprime, pour tout nombre impair m, le nombre des décompositions de $16m$ en une somme de huit carrés impairs faisant un total dont le quotient par 8 soit impair, plus le double d'une autre somme de quatre carrés impairs.

En prenant pour $f(x)$ une puissance paire de x de degré de plus en plus élevé, on arrive ainsi à trouver pour $\zeta_7(m)$, $\zeta_9(m)$, $\zeta_{11}(m)$, etc., une interprétation qui porte toujours sur la décomposition des nombres en sommes de carrés. Mais les résultats ne sont plus si nets et les énoncés se compliquent beaucoup. C'est ce que l'on verra déjà pour

$$f(x) = x^6.$$

On arrive alors à la formule

$$8\zeta_7(m) = 3\sum \zeta_1(m')\zeta_5(m'') + 5\sum \zeta_3(m')\zeta_3(m''),$$

qui conduit au théorème suivant : m étant un nombre impair donné à volonté, désignons par P le nombre des décompositions de $16m$ en une somme de seize carrés impairs dont les huit premiers et les huit derniers séparément fassent des multiples impairs de 8, et par Q le nombre des décompositions de $32m$ en une somme de huit carrés impairs donnant un total dont le quotient par 8 soit impair, plus le double d'une somme de quatre carrés impairs, plus enfin le quadruple d'une dernière somme de quatre carrés impairs aussi. Nous aurons

$$8\zeta_7(m) = 5\mathrm{P} + 3\mathrm{Q}.$$

Nous nous contenterons d'indiquer le résultat pour

$$f(x) = x^{2\mu},$$

savoir

$$\begin{aligned}2^{2\mu-1}\cdot\zeta_{2\mu+1}(m) = {} & \frac{2\mu}{1}\sum\zeta_1(m')\,\zeta_{2\mu-1}(m'') \\ & + \frac{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)}{1.2.3}\sum\zeta_3(m')\,\zeta_{2\mu+3}(m'') + \ldots \\ & + \frac{2\mu}{1}\sum\zeta_{2\mu-1}(m')\,\zeta_1(m'').\end{aligned}$$

Les coefficients sont ceux de rang pair dans la formule du binôme : les termes à égale distance des extrêmes dans le second membre sont égaux. La formule est curieuse et pourra être utile.

Comme dernière application de la formule (A), soit

$$f(x) = \cos xt,$$

t désignant une constante quelconque. Nous trouverons

$$\sum\left(\sum\sin d't\,.\sum\sin d''t\right) = \sum(d\sin^2 dt).$$

En donnant à t des valeurs particulières, on déduit de là diverses formules qui ont de l'intérêt.

Faisons, par exemple, $t = \frac{\pi}{2}$, et l'équation

$$\sum\left(\sum\sin\frac{d'\pi}{2}\cdot\sum\sin\frac{d''\pi}{2}\right) = \sum d,$$

qu'on obtiendra, et qui peut s'écrire

$$\sum\left(\sum(-1)^{\frac{d'-1}{2}}\cdot\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\right) = \zeta_1(m),$$

nous ramènera au théorème si connu de Jacobi concernant la décomposition de $4m$ en une somme de quatre carrés impairs. On serait arrivé au même résultat en prenant

$$f(x) = (-1)^{\frac{x}{2}}.$$

Faisons encore $t = \frac{\pi}{3}$, et il nous viendra

$$\sum\left(\sum \sin\frac{d'\pi}{3} \cdot \sum \sin\frac{d''\pi}{3}\right) = \sum\left(d \sin^2\frac{d\pi}{3}\right),$$

formule de laquelle il nous serait aisé de conclure le nombre des décompositions de $2m$ sous la forme

$$x^2 + 3x'^2 + y^2 + 3y'^2,$$

ou, ce qui revient au même, sous la forme

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2).$$

Mais nous aimons mieux consacrer une Note spéciale à la proposition dont nous parlons et à d'autres propositions analogues. Notre objet pour le moment est d'indiquer des formules générales et non de développer dans leurs détails les applications particulières. Nous ne présentons des exemples qu'autant qu'il en faut pour bien montrer le sens précis de nos formules.

Nous en avons donc assez dit sur la formule (A). Plus tard nous la compléterons à divers points de vue, en remplaçant, par exemple, le nombre impair m par un nombre pair ou impair à volonté, ou bien le nombre pair $2m$ par un nombre impair m ou plutôt par un nombre quelconque. Mais dès aujourd'hui je veux donner à nos résultats une extension considérable, sans changer la nature du nombre m que je regarde toujours comme impair, ainsi que les deux nombres m', m'' dont la somme fait $2m$.

Continuons à désigner par d un quelconque des diviseurs de m, et par d' ou d'' un quelconque des diviseurs de m' ou m''; mais de plus représentons par δ, δ', δ'' les diviseurs complémentaires, en sorte que l'on ait

$$m = d\delta, \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'';$$

puis formons la somme triple

$$\sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'',\ \delta'+\delta'')-f(\delta'+\delta'',\ d'-d'')]\right\}$$

où les deux premiers $\sum$ portent sur les diviseurs d', δ', d'', δ'' des deux nombres m' et $m''=2m-m'$, et où le troisième $\sum$ indique qu'on doit faire le total des sommes partielles prises d'abord pour chaque groupe m', m''. La fonction $f(x,\ y)$ est supposée telle que, pour chaque valeur de x ou de y employée, on ait

$$f(-x,\ y)=f(x,\ y),\quad f(x,\ -y)=f(x,\ y).$$

Cela posé, je dis que la somme triple obtenue comme on vient de le marquer, est égale à la somme très-simple

$$\sum d[f(0,\ 2d)-f(2d,\ 0)].$$

Ainsi on a

$$(\mathrm{B})\ \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'',\delta'+\delta'')-f(\delta'+\delta'',d'-d'')]\right\}=\sum d[f(0,2d)-f(2d,0)].$$

La formule (B) se réduit à la formule (A) quand on remplace la fonction $f(x,\ y)$, qui est à deux variables, par une fonction $f(x)$ d'une seule variable.

On pourra, si l'on veut, remplacer la formule (B) par celle-ci :

$$(\mathrm{C})\ \sum\left\{\sum\sum[f(d'-d'',\ \delta'+\delta'')-f(d'+d'',\ \delta'-\delta'')]\right\}=\sum d[f(0,\ 2d)-f(2d,0)],$$

qui lui est tout à fait équivalente

En prenant

$$f(x,\ y)=\cos xt\cos yz,$$

où t et z sont deux constantes à volonté, et en posant, pour abréger, et relativement à tout entier impair $m=d\delta$,

$$\sum\sin dt\cos\delta z=\psi(m),\quad \sum\cos dt\sin\delta z=\varpi(m),$$

la formule (C) fournit ce résultat remarquable

$$\sum \psi(m')\psi(m'') - \sum \varpi(m')\varpi(m'') = \sum d(\sin^2 dt - \sin^2 dz),$$

qui donne lieu à beaucoup de conséquences intéressantes.

Je terminerai ce premier article en donnant une formule qu'on pourra rapprocher de la formule (A), dans laquelle du reste elle rentre au fond. Pour l'obtenir, je pose dans la formule (C) :

$$f(x, y) = (-1)^{\frac{y}{2}} f(x),$$

ce qui est permis, parce que y est un nombre pair : on suppose, bien entendu, que $f(-x) = f(x)$. En observant que l'on a

$$(-1)^d = -1,$$

que de plus

$$(-1)^{\frac{\delta'-\delta''}{2}} = -(-1)^{\frac{\delta'+\delta''}{2}} = (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}$$

et

$$(-1)^{\frac{\delta'+\delta''}{2}} = -(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}},$$

on obtient

$$\sum \left\{ \sum\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} [f(d'-d'') + f(d'+d'')] \right\} = \sum d[f(0) + f(2d)].$$

Cette formule m'a paru bonne à transcrire; mais, je le répète, on pourrait la déduire de la formule (A) : elle n'en diffère pas essentiellement.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.