JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. SCHLÖMILCH

A. CAYLEY

J. LIOUVILLE

Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 47-55.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__47_0>

SUR L'INTÉGRALE

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}:$$

Extrait d'une Lettre de M. O. SCHLÖMILCH. — Extrait d'une Lettre de M. A. CAYLEY. — Remarques de M. LIOUVILLE.

J'ai reçu de M. Schlömilch, avec l'intéressant travail qui précède, une Lettre contenant quelques observations au sujet de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$$

et de l'article que j'ai inséré dans le cahier de novembre dernier. La Lettre du savant géomètre de Dresde porte la date du 5 janvier 1857. Une autre communication relative à la même intégrale m'a été faite plus tard (le 24 janvier) par M. A. Cayley, de Londres. Il m'a paru convenable de réunir sous un seul titre la Lettre de M. Schlömilch, celle de M. Cayley, et les remarques que j'ai cru devoir ajouter moi-même.

I.

Voici d'abord la Lettre de M. Schlömilch :

« ... La réduction de l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}},$$

que vous avez présentée dans le cahier de novembre 1856 de votre journal, me donne l'occasion de vous écrire quelques lignes. Je me permets de remarquer que votre réduction coïncide au fond avec celle que j'ai donnée dans mon livre *Analytische Studien* (*Etudes analytiques*), Leipzig, 1848, tome I, pages 83 et suivantes. Vous trouverez aussi la formule dans la collection des intégrales définies de M. Bierens de Han à Amsterdam. J'ai établi d'abord la formule

$$\int_0^\infty \mathrm{F}\left(\frac{\alpha}{x}+\gamma x\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_0^\infty \mathrm{F}\left(2\sqrt{\alpha\gamma}+y\right)\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

que l'on peut généraliser par différentiation suivant α ou γ, et j'en ai déduit entre autres la réduction

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{m+\frac{1}{2}}dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{m+1}} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-1}\,dy}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma}+y)^{m+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)}\frac{1}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^{m+1}},\end{aligned}$$

qui ne diffère pas de la vôtre.

» De plus, j'ai trouvé ce résultat

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}n}\int_0^\infty \frac{x^{p+n}\,dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{p+\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{\Gamma(p)}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^p}+\frac{\mathrm{N}_1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\frac{\Gamma(p-1)}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^{p-1}}\\ &\quad+\frac{\mathrm{N}_2}{(2\sqrt{\alpha\gamma})^2}\frac{\Gamma(p-2)}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^{p-2}}+\ldots\end{aligned}\right|\; p>n,$$

en désignant par N_1, N_2,... les coefficients

$$\frac{(n+1)n}{2},\quad \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4},$$
$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.6},\ \text{etc.},$$

(n un nombre entier).

» En prenant $\alpha=\gamma=1$, $\beta=0$, on en déduit un théorème sur les fonctions Γ, savoir :

$$\frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p+n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-n}{2}\right)=\Gamma(p)+N_1\Gamma(p-1)+N_2\Gamma(-2)+\ldots.$$

Je serais heureux si ces résultats avaient quelque intérêt pour vous... »

II.

Voici maintenant, et toujours au sujet de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}},$$

l'article que j'ai reçu de M. Cayley :

« Je suppose que le lecteur ait sous les yeux la Note de M. Liouville (tome I, 2e série, page 421). Cela étant, en rétablissant les valeurs de g, h et en écrivant $i-1$, au lieu de μ, la formule de M. Liouville devient

$$(1)\qquad \int_0^1 \frac{t^{i-\frac{1}{2}}(1-t)^{i-\frac{3}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^i}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{a+b-c}\,\Gamma(i)\left[2a+b+2\sqrt{a(a+b-c)}\right]^{i-\frac{1}{2}}},$$

laquelle, en y posant

$$t=\frac{x}{1+x},$$

se transforme en celle-ci :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{x^{i-1}\,dx}{[(a+b-c)x^2+(2a+b)x+a]^i}\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{a+b-c}\,\Gamma(i)\left[2a+b+2\sqrt{a(a+b-c)}\right]^{i-\frac{1}{2}}};\end{aligned}\right.$$

et en mettant le dénominateur de l'intégrale sous la forme

$$[(a+b-c)(x+\lambda)(x+\mu)]^i,$$

la formule devient

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{i-\frac{1}{2}}\,dx}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^i}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(i-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(i)}\,\frac{1}{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu})^{2i-1}};$$

formule qui se trouve dans mon Mémoire : *On certain formulæ for differentiation with applications to the evaluation of definite integrals*, Camb. and Dubl. Math. Journal, tome II, page 122; 1847. La démonstration que j'y ai donnée n'est cependant rigoureuse (à moins que l'on n'admette la théorie de la différentiation à indices quelconques) que pour le cas de $i+\frac{1}{2}$ égal à un entier positif; en effet, en écrivant

$$\mathrm{U}_{k,i} = [(x+\lambda)(x+\mu)]^{\frac{1}{2}k}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i},$$

je suis parti de la formule

$$\frac{d}{dx}\mathrm{U}_{k,i} = \frac{1}{2}k(\lambda-\mu)^2\,\mathrm{U}_{k-2,i-1}-(k+i)\,\mathrm{U}_{k-1,i},$$

pour en déduire l'expression générale de $\left(\frac{d}{dx}\right)^s \mathrm{U}_{0,i}$. Cette expression devient très-simple pour le cas $s=i+1$; on a alors

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{(-)^{i+1}}{i}\left(\frac{d}{dx}\right)^{i+1}(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu})^{2i}\\ &=\frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}(\lambda-\mu)^{2i}\frac{1}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{i+\frac{1}{2}}},\end{aligned}\right.$$

formule de différentiation assez singulière. En y écrivant $i-\frac{1}{2}$, au lieu de i, et en intégrant $i+\frac{1}{2}$ fois par la formule

$$\int_0^\infty x^{i-\frac{1}{2}} fx\,dx = \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{(-)^{i+\frac{1}{2}}}\left(\int_\infty d\alpha\right)^{i+\frac{1}{2}} f\alpha,\qquad \alpha = 0,$$

on obtient la formule intégrale ci-devant mentionnée. Il convient d'ajouter que cette formule, représentée sous la forme

$$(5)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{i-\frac{1}{2}}\,dx}{(ax^2+bx+c)^i} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(i-\frac{1}{2})}{\Gamma(i)}\frac{1}{(b+2\sqrt{ac})^{i-\frac{1}{2}}},$$

est comprise dans une formule générale donnée par M. Schlömilch : *Note sur la variation des constantes arbitraires d'une intégrale définie* (*Crelle*, tome XXXIII, page 268; 1847).

» Je remarque aussi que M. Donkin, en comparant ses résultats concernant les fonctions de Laplace avec ceux de M. Boole sur le même sujet, a trouvé une identité, laquelle m'a conduit à cette autre formule de différentiation

$$(6)\quad \begin{cases} \left\{\dfrac{[(x+\lambda)(x+\mu)]^2}{2x+\lambda+\mu}\dfrac{d}{dx}\right\}^n \dfrac{(2x+\lambda+\mu)^{n+s-1}}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{n-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu}\right)^{2n-2s}} \\ \qquad = \dfrac{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{n+1}}{(2x+\lambda+\mu)^{n-s+1}}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n \dfrac{\left(\sqrt{x+\lambda}-\sqrt{x+\mu}\right)^{2s}}{[(x+\lambda)(x+\mu)]^{\frac{1}{2}}}, \end{cases}$$

formule que j'ai démontrée au moyen d'une analyse assez compliquée. »

III.

Je ne puis que me féliciter de l'attention que des géomètres distingués ont accordée à mes recherches sur un point si simple. Cela m'encouragera à publier d'autres résultats analogues que j'ai obtenus, et qui pourront contribuer au progrès de la théorie, aujourd'hui peu avancée, des intégrales à quatre ou à plus de quatre facteurs. On a vu dans le cahier de décembre (que M. Schlömilch et même peut-être M. Cayley ne connaissaient pas quand ils m'ont écrit), que la valeur de l'intégrale

$$U = \int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}}$$

peut se déduire, par une simple différentiation à indices quelconques, de l'équation

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t}.\,dt}{[g^2t+h^2(1-t)+ct(1-t)]\sqrt{1-t}} = \frac{\pi}{g\sqrt{c+(g+h)^2}},$$

et d'autres équations semblables où l'intégration, même indéfinie, s'effectue de suite par les méthodes générales, qui appartiennent à tout le monde. Elle résulte aussi d'une formule de M. W. Thomson, et quant à moi, je l'ai trouvée, comme je l'ai déjà dit, en m'occupant, il y a douze ans, de revoir une épreuve de la Note intitulée : *Démonstration d'un théorème d'analyse*, que cet habile géomètre a insérée dans le cahier d'avril 1845 de notre Journal. Je reconnais du reste que M. Schlömilch a publié avant moi un résultat parfaitement équivalent. J'ajouterai même qu'avec un peu de bonne volonté, on pourra remonter plus haut, car la formule

$$\int_0^\infty \mathrm{F}\left(\frac{\alpha}{x}+\gamma x\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_0^\infty \mathrm{F}\left(2\sqrt{\alpha\gamma}+y\right)\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

dont M. Schlömilch tire si facilement l'intégrale qui nous occupe, revient à celle-ci :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(a\alpha^2 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\alpha^2}\right)d\alpha = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha^2)\,d\alpha,$$

que M. Cauchy a donnée, il y a près de trente-cinq ans, dans le XIX^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique ;* c'est la formule marquée (27) à la page 518 du cahier cité.

Au fond je n'ai rédigé ces deux petits articles de *novembre* et de *décembre* que pour présenter sous son vrai jour la formule de M. Thomson, et aussi pour préparer un exemple développé à des recherches étendues que je compte donner sur les intégrales à un nombre quelconque de facteurs. J'ai commencé en effet à m'occuper de ces intégrales, en même temps que des différentielles à indices quelconques (il y a longtemps, comme on voit), et depuis j'y suis souvent revenu, mais sans avoir jamais porté sur ce sujet l'attention suivie qu'il mérite. Je n'en ai donc cultivé pour ainsi dire que des parties détachées, qu'il faudrait réunir pour qu'elles prissent toute leur valeur.

C'est ainsi qu'en parcourant mes papiers, je rencontre l'intégrale

$$\mathrm{U} = \int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(a+bt-ct^2)^{\mu+1}},$$

mise sous la forme

$$\mathrm{U} = \int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{(1-\alpha t)^{\mu+1}(1-\beta t)^{\mu+1}},$$

et présentée comme un cas particulier de celle-ci :

$$V = \int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}{(1-\alpha t)^r(1-\beta t)^{p+q-r}},$$

qui se ramène toujours à la série de Gauss, c'est-à-dire aux intégrales à trois facteurs.

En considérant en effet l'intégrale générale

$$W = \int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}{(1-\alpha t)^r(1-\beta t)^s},$$

dont V se déduit en prenant $r+s=p+q$, on trouve que W peut se transformer de cette manière :

$$W = \frac{(1-\alpha)^{q-r}}{(1-\beta)^s}\int_0^1 \frac{t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\alpha t)^{p+q-r-s}(1-\gamma t)^s},$$

où

$$\gamma = \frac{\alpha-\beta}{1-\beta}.$$

L'intégrale à quatre facteurs du second membre se réduit à une intégrale trinôme, quand on fait

$$r+s=p+q, \quad s=p+q-r,$$

et l'on en conclut

$$V = \frac{(1-\alpha)^{q-r}}{(1-\beta)^{p+q-r}}\int_0^1 \frac{t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\gamma t)^{p+q-r}}.$$

La condition indiquée

$$r+s=p+q$$

se trouve vérifiée pour l'intégrale U, puisqu'alors on a

$$p=\mu+\frac{3}{2}, \quad q=\mu+\frac{1}{2}, \quad r=s=\mu+1;$$

mais elle l'est également dans une multitude d'autres cas, et fournit de nombreuses propriétés des intégrales V auxquelles on se trouve en droit de transporter tout ce que nous savons sur les intégrales trinômes. Quelquefois on pourra être conduit, comme pour l'intégrale U, à une expression finie : je vais en donner un exemple.

Posons $q = p$ et $r = p + \frac{1}{2}$, de manière que l'intégrale V devienne

$$V' = \int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\alpha t)^{p+\frac{1}{2}}(1-\beta t)^{p-\frac{1}{2}}},$$

et je dis que l'on aura

$$V' = \frac{2^{2p-1}\,\Gamma(p)^2}{\sqrt{1-\alpha}\,(\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1-\beta})^{2p-1}\,\Gamma(2p)}.$$

En effet, par la formule de réduction ci-dessus, et en continuant à poser

$$\gamma = \frac{\alpha-\beta}{1-\beta},$$

on trouve d'abord

$$V' = \frac{(1-\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{(1-\beta)^{p-\frac{1}{2}}}\int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\gamma t)^{p-\frac{1}{2}}}.$$

Mais on a

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\gamma t)^{p-\frac{1}{2}}} = 2^{2p-1}\,\frac{\Gamma(p)^2}{\Gamma(2p)}\left(\frac{1-\sqrt{1-\gamma}}{\gamma}\right)^{2p-1},$$

comme je l'ai déjà dit dans ce Journal, et comme on peut aisément le vérifier au moyen, par exemple, d'un développement en série. Substituant dans la valeur de V' et réduisant, il s'ensuit

$$V' = \frac{2^{2p-1}\,\Gamma(p)^2}{\sqrt{1-\alpha}\,(\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{1-\beta})^{2p-1}\,\Gamma(2p)},$$

conformément à ce que j'avais avancé.

J'ajouterai ici deux mots sur la transformation concernant l'intégrale générale

$$W = \int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}{(1-\alpha t)^r(1-\beta t)^s}.$$

Elle s'effectue en posant

$$t = \frac{1-x}{1-\alpha x}, \quad \gamma = \frac{\alpha - \beta}{1-\beta},$$

d'où

$$dt = -\frac{(1-\alpha)\,dx}{(1-\alpha x)^2}, \qquad 1 - t = \frac{(1-\alpha)x}{1-\alpha x},$$

et

$$1 - \alpha t = \frac{1-\alpha}{1-\alpha x}, \qquad 1 - \beta t = \frac{(1-\beta)(1-\gamma x)}{1-\alpha x}.$$

Substituez, et vous trouverez finalement, en changeant x en t dans le résultat,

$$W = \frac{(1-\alpha)^{q-r}}{(1-\beta)^s} \int_0^1 \frac{t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt}{(1-\alpha t)^{p+q-r-s}(1-\gamma t)^s}.$$

Ce mode de transformation, qui s'offre de lui-même, convient du reste aux intégrales à un nombre quelconque de facteurs.

Plus tard, et à mesure que les occasions se présenteront, je pourrai donner d'autres détails sur cette théorie des intégrales à plusieurs facteurs, que l'on doit indiquer aux jeunes géomètres comme un sujet d'étude propre à exercer leurs forces, et en même temps très-digne d'une profonde investigation.