

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. SCHLÖMILCH

Sur quelques intégrales elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 2 (1857), p. 43-46.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2_43_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2_43_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

QUELQUES INTÉGRALES ELLIPTIQUES;

PAR M. O. SCHLÖMILCH [*].

C'est par des substitutions imaginaires que Jacobi a trouvé les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin \varphi}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \cos \varphi}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \Delta(k, \varphi)}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi,$$

dans lesquelles $\Delta(k, \varphi)$ désigne $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$; mais on peut arriver aux mêmes résultats par des transformations réelles, comme je vais le faire voir.

En prenant la dérivée par rapport à p de la formule connue

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p-1} \omega d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p + \frac{1}{2})}, \quad p > 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l \sin \omega \sin^{2p-1} \omega d\omega &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p + \frac{1}{2})} \left[\frac{d\Gamma(p)}{dp} - \frac{d\Gamma(p + \frac{1}{2})}{dp} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p + \frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{x^{p-\frac{1}{2}} - x^{p-1}}{1-x} dx; \end{aligned}$$

soient de plus

$$p = n + \frac{1}{2}, \quad x = z^2,$$

et l'on aura

$$(1) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l \sin \omega \sin^{2n} \omega d\omega = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)} \int_0^1 \frac{z^{2n} dz}{1+z}, \quad n > -\frac{1}{2}.$$

[*] En insérant cet article, je crois devoir rappeler au lecteur les belles recherches que M. William Roberts nous a données sur le même sujet (1^{re} série, tome XI, page 471, et tome XII, page 455).

Cette formule donne par exemple ce résultat très-connu

$$(2) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l \sin \omega d\omega = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dz}{1+z} = -\frac{\pi}{2} l_2.$$

Si n est un nombre positif et entier, on a de plus

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l \sin \omega \sin^{2n} \omega d\omega &= -\frac{\pi}{2} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} \int_0^1 \frac{z^{2n} dz}{1+z} \\ &= -\frac{\pi}{2} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} \left(l_2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \dots + \frac{1}{2n} \right). \end{aligned} \right.$$

A l'aide des formules (2) et (3), on trouve encore

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin \omega d\omega}{1-r^2 \sin^2 \omega} = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2 z^2}} \frac{dz}{1+z}, \quad 1 > r > -1;$$

et en effectuant l'intégration indiquée dans le second membre, on en conclut

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin \omega d\omega}{1-r^2 \sin^2 \omega} = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} l(1 + \sqrt{1-r^2}),$$

ou bien

$$(4) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin \omega d\omega}{1-r^2 \sin^2 \omega} = -\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} l \left(\frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{1 - \sqrt{1-r^2}} \right) - \frac{\pi}{2} \frac{lr}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Cette formule qui n'était pas connue, ce me semble, conduit immédiatement à la première des intégrales cherchées. En effet, prenons $r = k \sin \varphi$, et multiplions par $d\varphi$ l'équation (4), puis intégrons entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; il nous viendra

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin \omega d\omega}{1-k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \omega} \\ &= -\frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(k, \varphi)} l \left[\frac{1 + \Delta(k, \varphi)}{1 - \Delta(k, \varphi)} \right] - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l(k \sin \varphi) d\varphi}{\Delta(k, \varphi)}. \end{aligned} \right.$$

L'intégrale qui forme le premier membre se transforme en

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l \sin \omega d\omega \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + (1 - k^2 \sin^2 \omega) \sin^2 \varphi} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin \omega d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}};$$

la première intégrale du second membre a pour valeur $\pi K' [^*]$, comme on sait; la seconde intégrale est égale à

$$lk \cdot K + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin \varphi}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi;$$

au moyen de ces substitutions, on parvient à l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin \omega d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}} = -\frac{\pi}{2} K' - K lk - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin \varphi}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi.$$

Les intégrales à gauche et à droite sont identiques; il s'ensuit

$$(6) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin \varphi}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi = -\frac{1}{2} K lk - \frac{1}{4} \pi K'.$$

Quant aux autres intégrales cherchées, elles se déduisent aisément de l'intégrale précédente. En faisant usage de la substitution connue $\tan \varphi = \frac{1}{k'} \cot \psi$, on trouve d'abord

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \Delta(k, \varphi)}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{lk' - l \Delta(k, \psi)}{\Delta(k, \psi)} d\psi = K lk' - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \Delta(k, \psi)}{\Delta(k, \psi)} d\psi,$$

et, par conséquent,

$$(7) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \Delta(k, \varphi)}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} K lk'.$$

[*] Nous nous servons ici et plus bas de la notation connue de Jacobi dans ses *Fundamenta nova*.

Ensuite on a, par la même substitution,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \cos \varphi}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{lk' + l \sin \psi - l \Delta(k, \psi)}{\Delta(k, \psi)} d\psi,$$

ou bien

$$(8) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \cos \varphi}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} K l \left(\frac{k'}{k} \right) - \frac{1}{4} \pi K'.$$

La formule (6) conduit directement au développement de K suivant les puissances de k' (LEGENDRE, chapitre XIV); en changeant entre eux k et k' , on a d'abord

$$K = \frac{2}{\pi} K' l \left(\frac{1}{k'} \right) - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin \varphi}{\Delta(k', \varphi)} d\varphi.$$

Maintenant il suffit de prendre

$$\frac{2}{\pi} K' = 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 k'^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 k'^6 + \dots,$$

$$\Delta(k', \varphi) = 1 + \frac{1}{2} k'^2 \sin^2 \varphi + \frac{1.3}{1.4} k'^4 \sin^4 \varphi + \dots,$$

et d'effectuer les intégrations à l'aide des formules (2) et (3), pour avoir sur-le-champ

$$\begin{aligned} K &= l \left(\frac{4}{k'} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left[l \left(\frac{4}{k'} \right) - 1 \right] k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \left[l \left(\frac{4}{k'} \right) - 1 - \frac{2}{3.4} \right] k'^4 \\ &\quad + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 \left[l \left(\frac{4}{k'} \right) - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{2}{5.6} \right] k'^6 + \dots, \end{aligned}$$

comme Legendre l'a trouvé d'une autre manière.

Dresde, 5 janvier 1857.