JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Généralisation d'un théorème de l'arithmétique indienne

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 2 (1857), p. 393-396.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__393_0>

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE L'ARITHMÉTIQUE INDIENNE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On trouve dans les productions arithmétiques des Indiens un grand nombre de théorèmes dont la démonstration est à la vérité bien facile aujourd'hui, mais dont l'élégance frappera toujours. Tel est celui d'après lequel la somme

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3,$$

des cubes des nombres naturels, est égale au carré de la somme des nombres eux-mêmes, c'est-à-dire est égale à

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Pour généraliser ce théorème, écrivons-le d'abord (en remplaçant n par $1 + \alpha$) sous la forme abrégée

$$\sum (1 + \alpha')^3 = \left[\sum (1 + \alpha')\right]^2,$$

les sommations étant relatives à α', qui doit prendre successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha$.

Si $\beta, \ldots, \gamma$ désignent d'autres entiers, on aura de même

$$\sum (1 + \beta')^3 = \left[\sum (1 + \beta')\right]^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum (1 + \gamma')^3 = \left[\sum (1 + \gamma')\right]^2,$$

les sommes étant prises de $\beta' = 0$ à $\beta' = \beta, \ldots$, de $\gamma' = 0$ à $\gamma' = \gamma$.

Or, en multipliant toutes ces équations membre à membre, il vient

$$\sum \cdots \sum (1 + \alpha')^3 \ldots (1 + \gamma')^3 = \left[\sum \cdots \sum (1 + \alpha') \ldots (1 + \gamma')\right]^2.$$

D'un autre côté, si l'on considère un nombre m décomposé en facteurs premiers, de manière que

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} \dots c^{\gamma},$$

on voit qu'un quelconque de ses diviseurs (1 et m compris) peut être représenté par

$$d = a^{\alpha'} b^{\beta'} \dots c^{\gamma'},$$

α' variant comme ci-dessus de 0 à α, β' de 0 à β,..., γ' de 0 à γ. De plus, en désignant par $\zeta(d)$ le nombre des diviseurs de d, on a

$$\zeta(d) = (1 + \alpha')(1 + \beta') \dots (1 + \gamma').$$

L'équation à laquelle nous sommes arrivés plus haut conduit donc à cette formule curieuse

$$\sum \zeta(d)^3 = \left[\sum \zeta(d)\right]^2,$$

où le signe $\sum$ s'applique à tous les diviseurs d, et qui se présente, on le voit, comme une simple généralisation du théorème indien.

Pour donner un exemple de l'utilité dont cette formule peut être dans la théorie des nombres, supposons que m soit un nombre impair n'ayant que des facteurs premiers de la forme $4\mu + 1$. On sait que $\zeta(m)$ exprime alors le nombre des décompositions du double de m en une somme de deux carrés impairs, c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + y^2,$$

x, y désignant des nombres impairs positifs, et deux solutions étant regardées comme différentes quand x et y n'y ont pas identiquement les mêmes valeurs.

Il est clair que d sera aussi un nombre impair n'ayant, comme m qu'il divise, que des facteurs premiers de la forme $4\mu + 1$, et que $\zeta(d)$ sera le nombre des décompositions de $2d$ en une somme de deux carrés impairs.

Cela étant, notre formule fournit le théorème que voici :

« Étant donné un entier impairement pair et qui n'ait aucun facteur » de la forme $4\mu + 3$, décomposez tous ses diviseurs pairs (dont l'en- » tier donné lui-même fait partie) en une somme de deux carrés im- » pairs, et cherchez pour chaque diviseur le nombre total des décom- » positions en deux carrés dont il est susceptible : la somme des cubes » de ces nombres sera égale au carré de la somme de ces nombres » eux-mêmes. »

Ainsi 50 ou 2.25 a les trois diviseurs pairs 50, 10 et 2. On trouve pour le premier trois décompositions :

$$50 = 7^2 + 1^2 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2;$$

pour le second, deux décompositions :

$$10 = 3^2 + 1^2 = 1^2 + 3^2;$$

enfin, pour le troisième, une seule décomposition :

$$2 = 1 + 1.$$

Et l'on a bien

$$3^3 + 2^3 + 1^3 = 6^2.$$

Ainsi encore 130, ou 2.5.13, a quatre diviseurs pairs

$$130, \quad 26, \quad 10, \quad 2,$$

pour lesquels les nombres de décompositions sont respectivement

$$4, \quad 2, \quad 2, \quad 1,$$

et l'on a, conformément à notre théorème,

$$4^3 + 2^3 + 2^3 + 1^3 = 9^2.$$

Ce théorème subsiste, au surplus, même pour un nombre impairement pair ayant des facteurs premiers de la forme $4\mu + 3$, mais sous la condition que ces facteurs soient tous inégaux.

Ainsi 70 ou 2.5.7 a les quatre diviseurs pairs 70, 14, 10 et 2 dont les deux derniers seuls sont décomposables en une somme de deux carrés,

savoir 10 de deux manières $9+1$, $1+9$, et 2 d'une seule manière $1+1$: de là les nombres 0, 0, 2 et 1 pour lesquels on a bien

$$0^3+0^3+2^3+1^3=(0+0+2+1)^2.$$

Mais le théorème ne s'applique pas aux nombres divisibles deux ou plusieurs fois par un même nombre premier de la forme $4\mu+3$. Prenons, pour fixer les idées, le nombre 98 ou 2.7^2. Il a trois diviseurs pairs 2, 14, 98 dont le premier et le dernier se décomposent d'une seule manière en une somme de deux carrés; le second se refuse à cette forme : nous avons donc ici les trois nombres 1, 0, 1, et la somme de leurs cubes est 2, tandis que le carré de leur somme est 4.

J'indiquerai, en terminant, une autre conséquence du théorème indien rappelé plus haut. Continuons à désigner par d un diviseur quelconque de m, et soit δ le quotient de m par d, en sorte que $m=d.\delta$. En représentant par $\varphi_1(m)$ la somme des nombres premiers à m que contient la suite 1, 2, 3,..., m, et par $\varphi_3(m)$ la somme de leurs cubes, on aura

$$\sum \delta^3 \varphi_3(d)=\left[\sum \delta \varphi_1(d)\right]^2:$$

le signe $\sum$ s'applique naturellement à tous les diviseurs d. L'équation que je viens d'écrire résulte immédiatement du théorème cité, combiné avec la formule générale

$$\sum \delta^s \varphi_s(d)=1^s+2^s+3^s+\ldots+m^s,$$

que j'ai donnée au tome XLIV des *Comptes rendus* (page 753), et où $\varphi_s(m)$ marque la somme des puissances $s^{ièmes}$ des nombres premiers à m contenus dans la suite 1, 2, 3,..., m.