JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}{\left(1+\sqrt{1+gx}\right)^{2p+2q}}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 279.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__279_0>

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}{(1+\sqrt{1+gx})^{2p+2q}};$$

Par M. J. LIOUVILLE.

L'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}{(1+\sqrt{1+gx})^{2p+2q}},$$

que je représenterai par A, et dont la forme est assez remarquable, se ramène toujours aux intégrales trinômes, et par conséquent à la *série générale* de Gauss.

En désignant en effet par B l'intégrale trinôme

$$\int_0^1 \frac{x^{p+q-\frac{1}{2}}(1-x)^{p+q-\frac{1}{2}}\,dx}{(1+gx)^p},$$

on a pour le rapport de A à B cette expression simple, où entrent les fonctions *gamma* de Legendre :

$$\frac{A}{B} = \frac{(p+q)\,\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(p+q+\frac{1}{2}\right)}.$$

Il est inutile d'avertir que π marque à l'ordinaire le rapport de la circonférence au diamètre. Je suppose le paramètre g réel et pris à volonté de -1 à $+\infty$, ou imaginaire, mais tel que la partie réelle de $1+g$ soit positive; quant aux exposants p, q, on les prendra réels et positifs, ou bien imaginaires, mais à partie réelle positive.

La valeur de l'intégrale B est connue dans quelques cas particuliers, par exemple quand $g=-1$: la valeur de A s'en déduira, comme on voit, sur-le-champ.