

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques fonctions numériques; (deuxième article.)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 2 (1857), p. 244-248.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2_244_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

(Deuxième article.)

1. Je conserve toutes les notations dont j'ai fait usage dans le premier article, inséré au cahier d'*Avril* dernier (voir page 141). Ainsi, en désignant par m un nombre entier positif, je continue à représenter par $\varphi(m)$ le nombre des entiers premiers à m et non plus grands que m ; par $\sigma(m)$ la somme des diviseurs de m ; par $\zeta(m)$ leur nombre; enfin par $\theta(m)$ le nombre de manières dont m peut se décomposer en deux facteurs premiers entre eux. Je continue aussi à désigner par d un diviseur quelconque de m , et par δ le diviseur correspondant qui donne $m = d\delta$.

Cela étant, j'ajoute d'abord aux formules posées dans le premier article les deux formules suivantes :

$$(a) \quad \sum \zeta(d^{2\mu}) = \zeta(m) \zeta(m^\mu),$$

et

$$(b) \quad \sum \zeta(d^{2\mu}) \zeta(\delta) = \sum \zeta(d) \zeta(d^\mu).$$

L'exposant μ est un nombre entier positif quelconque, et le signe $\sum$ s'applique à l'ordinaire à tous les diviseurs d de m , 1 et m compris.

Ainsi, pour $m = 6$ et $\mu = 1$, on doit avoir, d'après la formule (a),

$$\zeta(1) + \zeta(4) + \zeta(9) + \zeta(36) = \zeta(6)^2,$$

c'est-à-dire

$$1 + 3 + 3 + 9 = 4^2 = 16,$$

ce qui est exact.

De même, d'après la formule (b), on doit trouver égales entre elles les deux expressions

$$\zeta(1)\zeta(6) + \zeta(4)\zeta(3) + \zeta(9)\zeta(2) + \zeta(36)\zeta(1),$$

et

$$\zeta(1)^2 + \zeta(2)^2 + \zeta(3)^2 + \zeta(6)^2,$$

dont la valeur commune est en effet 25.

Comme la formule (a) pour $\mu = 1$ se réduit à

$$\sum \zeta(d^2) = \zeta(m)^2,$$

et que, d'autre part, on a en vertu d'une formule de notre premier article,

$$\sum \theta(d)\zeta(d) = \zeta(m)^2,$$

il faut en conclure que

$$\sum \theta(d)\zeta(d) = \sum \zeta(d^2).$$

Après les équations (a) et (b), j'écris celle-ci :

$$(c) \quad \sum \varphi(d) \int d = m\zeta(m).$$

Prenons encore pour exemple le nombre (6). L'équation (c) exige que

$$\varphi(6) \int 1 + \varphi(3) \int 2 + \varphi(2) \int 3 + \varphi(1) \int 6 = 6\zeta(6),$$

et cela a réellement lieu, car

$$2.1 + 2.3 + 1.4 + 1.12 = 24 = 6.4.$$

Citons encore la formule

$$(d) \quad \sum d \int d = \sum d\zeta(d).$$

Ainsi, pour $m = 4$,

$$4 \int 1 + 2 \int 2 + \int 4 = 17 = \zeta(1) + 2\zeta(2) + 4\zeta(4).$$

2. Introduisons maintenant une fonction numérique nouvelle

$$\lambda(m),$$

dont la valeur soit 1 ou -1 , suivant que le nombre total des facteurs premiers, égaux ou inégaux, de m est pair ou impair. En d'autres termes, soit

$$\lambda(1) = 1,$$

et généralement, pour m décomposé en facteurs premiers sous la forme

$$m = a^\alpha b^\beta \dots c^\gamma,$$

soit

$$\lambda(m) = (-1)^{\alpha + \beta + \dots + \gamma}.$$

Cette fonction $\lambda(m)$, prise isolément ou jointe à celles dont il a été question plus haut, donnera lieu à des théorèmes curieux.

On aura, par exemple,

$$(e) \quad \sum \lambda(d) = 1 \text{ ou } 0,$$

suivant que m est ou non un carré.

Ainsi, pour $m = 4$,

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(4) = 1,$$

et, pour $m = 12$,

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \lambda(4) + \lambda(6) + \lambda(12) = 0.$$

Je rapproche de l'équation (e) une autre équation du même genre

$$(f) \quad \sum \lambda(d) \theta(d) \zeta(d) = 1 \text{ ou } 0,$$

suivant que m est ou non un carré. Le terme simple $\lambda(d)$ de la formule précédente est remplacé par un produit $\lambda(d) \theta(d) \zeta(d)$, sans que la somme relative à toutes les valeurs de d change : cette somme est toujours 1 quand m est un carré, et 0 quand m n'est pas un carré. C'est ce qu'on peut vérifier sur les deux exemples de $m = 3$ et $m = 4$, car on a bien

$$\lambda(1) \theta(1) \zeta(3) + \lambda(3) \theta(3) \zeta(1) = 0,$$

et

$$\lambda(1)\theta(1)\zeta(4) + \lambda(2)\theta(2)\zeta(2) + \lambda(4)\theta(4)\zeta(1) = 1.$$

Au contraire, on a toujours 1 pour second membre, quel que soit le nombre m , dans cette autre formule

$$(g) \quad \sum \lambda(d)\theta(d)\zeta(d^2) = 1.$$

Exemple : $m = 3$; il vient

$$\lambda(1)\theta(1)\zeta(9) + \lambda(3)\theta(3)\zeta(1) = 3 - 2 = 1.$$

5. La formule (e) ne contient que la seule fonction λ ; les formules (f), (g) contiennent au contraire trois fonctions λ , θ , ζ . Voici à présent une équation où il n'entre que λ et θ :

$$(h) \quad \sum \lambda(d)\theta(d) = \lambda(m).$$

Soit, comme exemple, $m = 6$; on devra avoir

$$\lambda(1)\theta(1) + \lambda(2)\theta(2) + \lambda(3)\theta(3) + \lambda(6)\theta(6) = \lambda(6),$$

et en effet cela revient à l'identité

$$1 - 2 - 2 + 4 = 1.$$

On a encore

$$(i) \quad \sum \lambda(d)\theta(d) = 1.$$

Ainsi, pour $m = 6$,

$$\lambda(1)\theta(6) + \lambda(2)\theta(3) + \lambda(3)\theta(2) + \lambda(6)\theta(1) = 1.$$

Il n'entre également que λ et θ dans la formule singulière qui suit :

$$(j) \quad \sum \lambda(d)\theta(d)\theta(d) = 0$$

pour $m > 1$, mais $= 1$ pour $m = 1$.

Que le premier membre de l'équation que je viens d'écrire soit en effet égal à l'unité quand $m = 1$, cela est évident de soi. Mais il est bien remarquable que ce premier membre se réduise toujours à zéro pour les autres valeurs de m . Ainsi, quand $m = 2$, ce premier membre est

$$\lambda(1)\theta(1)\theta(2) + \lambda(2)\theta(2)\theta(1) = 2 - 2 = 0;$$

pour $m = 3$, il est de même

$$\lambda(1)\theta(1)\theta(3) + \lambda(3)\theta(3)\theta(1) = 2 - 2 = 0;$$

pour $m = 4$, il devient

$$\lambda(1)\theta(1)\theta(4) + \lambda(2)\theta(2)\theta(2) + \lambda(4)\theta(4)\theta(1),$$

c'est-à-dire

$$2 - 2 \cdot 2 + 2 = 0.$$

Et ainsi de suite.

4. Il a été question dans notre premier article, et aussi à la fin du cahier de *Mai* (voir page 184), de formules concernant des sommes relatives, non plus à tous les diviseurs d de m , mais seulement aux diviseurs carrés D^2 que m peut avoir. Je remarquerai en passant que le nombre des diviseurs carrés dont il s'agit est exprimé par

$$\sum \lambda(d) \zeta(d).$$

Soit, par exemple, $m = 16$. On trouve 3 pour valeur de

$$\lambda(1)\zeta(16) + \lambda(2)\zeta(8) + \lambda(4)\zeta(4) + \lambda(8)\zeta(2) + \lambda(16)\zeta(1),$$

et 16 a en effet trois diviseurs carrés 1, 4, 16.

La somme des valeurs inverses des diviseurs dont il s'agit donne lieu à cette autre formule

$$(k) \quad \sum \lambda(d) \int d = m \sum' \frac{1}{D^2},$$

où l'on a marqué d'un accent le second $\sum$, qui ne se rapporte qu'aux diviseurs carrés D^2 , tandis que le premier s'applique à tous les diviseurs d de m . Pour $m = 8$, par exemple, la formule (k) mène à l'identité

$$\int 8 - \int 4 + \int 2 - \int 1 = 8 + 2.$$