

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. SCHLOMILCH

Réduction d'une intégrale multiple

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 2 (1857), p. 206-212.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2_206_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

RÉDUCTION
D'UNE INTÉGRALE MULTIPLE;

PAR M. O. SCHLOMILCH.

L'intégrale multiple dont nous ferons voir la réduction est celle-ci

$$\iiint \dots f(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(ax + \beta y + \gamma z + \dots) dx dy dz \dots,$$

étendue à toutes les valeurs positives et négatives de $x, y, z, \dots$, qui vérifient l'une ou l'autre des inégalités

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 + \dots < 1,$$

$$\sigma_1 < ax + \beta y + \gamma z + \dots < \sigma_2,$$

ou même simultanément les deux inégalités énoncées.

Examinons d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire l'intégrale double

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k^2 + u^2 + v^2) \varphi(\kappa + \lambda u + \mu v) du dv;$$

en prenant $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$, nous aurons

$$S = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(k^2 + r^2) \varphi(\kappa + \lambda r \cos \theta + \mu r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Ici l'on peut faire usage de la formule connue

$$\int_0^{2\pi} \psi(a \cos \theta + b \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} \psi(\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \theta) d\theta.$$

et l'on aura

$$S = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} f(k^2 + r^2) \varphi(\kappa + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \cdot r \cos \theta) r dr d\theta.$$

Par retour aux variables primitives u et v , on parvient alors à la formule

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k^2 + u^2 + v^2) \varphi(\kappa + \lambda u + \mu v) du dv \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(k^2 + u^2 + v^2) \varphi(\kappa + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \cdot u) du dv. \end{aligned} \right.$$

Cette transformation est avantageuse parce que la fonction φ , dans le second membre, ne renferme qu'une seule des variables u et v .

Quant à l'intégrale triple

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x^2 + y^2 + z^2) \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z) dx dy dz,$$

on trouve à l'aide de la formule (1), en prenant $k = x$, $u = y$, $v = z$, $\kappa = \alpha x$, $\lambda = \beta$, $\mu = \gamma$,

$$T = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(x^2 + y^2 + z^2) \varphi(\alpha x + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \cdot y) dx dy dz.$$

Ici la formule (1) est de nouveau applicable; elle donne

$$T = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x^2 + y^2 + z^2) \varphi(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cdot x) dx dy dz.$$

On voit sur-le-champ que ce procédé si simple peut servir à la transformation d'une intégrale multiple du même genre, et que le résultat sera

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots f(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots) dx dy dz \dots \\ &= 2^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots f(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(\rho x) dx dy dz \dots, \end{aligned} \right.$$

où l'on a désigné par n le nombre des variables $x, y, z, \dots$, et par ρ la quantité

$$(3) \quad \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots}.$$

L'intégrale prise par rapport à $x, y, \dots$, est facile à réduire à l'aide de la formule connue [*]

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \dots F(\xi^2 + \eta^2 + \dots) d\xi d\eta \dots = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty x^{m-1} F(x^2) dx,$$

(m le nombre des variables $\xi, \eta, \dots$); c'est de cette manière que l'on parvient à la formule remarquable

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \dots f(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots) dx dy dz \dots \\ &= \frac{2 \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f(x^2 + y^2) \varphi(\rho x) y^{n-2} dx dy. \end{aligned} \right.$$

Maintenant remplaçons la fonction $f(t)$ par une autre qui coïncide avec $f(t)$ si $t < 1$, et qui se réduise à zéro dans le cas contraire. Alors les intégrations au premier membre s'étendent à toutes les valeurs positives et négatives de $x, y, z, \dots$, qui vérifient l'inégalité

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 + \dots < 1;$$

quant aux deux intégrations dans le second membre, elles se rappor-

[*] Cette formule découle comme on sait d'un théorème de M. Liouville, savoir

$$\int \int \dots x^{p-1} y^{q-1} \dots F(x + y + \dots) dx dy \dots = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q) \dots}{\Gamma(p + q + \dots)} \int_0^h t^{p+q+\dots-1} F(t) dt,$$

$$h > x + y + \dots > 0.$$

Nous remarquerons à cette occasion qu'il y a encore une formule plus générale que nous avons démontrée ailleurs; c'est la suivante :

$$\int \int \dots \frac{x^{p-1} y^{q-1} \dots F(x + y + \dots)}{(1 + \alpha x + \beta y + \dots)^{p+q+\dots}} dx dy \dots = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p + q + \dots)} \int_0^h \frac{t^{p+q+\dots-1} F(t) dt}{(1 + \alpha t)^p (1 + \beta t)^q}.$$

$$h > x + y + \dots > 0.$$

Cette formule offre l'avantage de contenir les constantes arbitraires ($\alpha, \beta, \dots$) que l'on peut varier par différentiation ou par intégration.

tent à toutes les valeurs positives et négatives de x et à toutes les valeurs positives de y qui satisfont à la condition

$$0 < x^2 + y^2 < 1.$$

De là on tire sur-le-champ la formule

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & \iint \dots f(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(ax + \beta y + \gamma z + \dots) dx dy dz \dots \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2) \varphi(\rho x) y^{n-2} dx dy, \\ &\text{Condition : } 0 > x^2 + y^2 + z^2 + \dots < 1. \end{aligned} \right.$$

Supposons de plus que dans la formule (1), la fonction $\varphi(s)$ soit telle que l'on ait

$$\varphi(s) = 0$$

pour toutes les valeurs de s non comprises dans l'intervalle de $s = \sigma_1$ à $s = \sigma_2$; alors nous aurons

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \iint \dots f(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(ax + \beta y + \gamma z + \dots) dx dy dz \dots \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\frac{\sigma_1}{\rho}}^{\frac{\sigma_2}{\rho}} \int_0^{\infty} f(x^2 + y^2) \varphi(\rho x) y^{n-2} dx dy, \\ &\text{Condition : } \sigma_1 < ax + \beta y + \gamma z + \dots < \sigma_2. \end{aligned} \right.$$

Enfin si l'on veut étendre les intégrations à toutes les valeurs positives et négatives de x , y , z , .., qui vérifient simultanément les deux conditions énoncées, alors il faut aussi que l'on ait, au second membre,

$$-1 < x < +1, \quad 0 < y < \sqrt{1-x^2},$$

et en même temps

$$\frac{\sigma_1}{\rho} < x < \frac{\sigma_2}{\rho}, \quad 0 < y < \infty.$$

De là on tire aisément une formule que l'on peut présenter de la manière suivante :

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & \int \int \int \dots f(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots) dx dy dz \dots \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2) \varphi(\rho x) y^{n-2} dx dy, \\ &\text{Conditions: } 0 < x^2 + y^2 + z^2 + \dots < 1, \\ &\text{et } \sigma_1 < \alpha x + \beta y + \gamma z + \dots < \sigma_2; \end{aligned} \right.$$

les valeurs de x_1 et x_2 sont

$$\begin{aligned} \text{si } -1 < \frac{\sigma_1}{\rho} < \frac{\sigma_2}{\rho} < +1, & \quad x_1 = \frac{\sigma_1}{\rho} \text{ et } x_2 = \frac{\sigma_2}{\rho}, \\ \text{si } -1 > \frac{\sigma_1}{\rho} < \frac{\sigma_2}{\rho} < +1, & \quad x_1 = -1 \text{ et } x_2 = \frac{\sigma_2}{\rho}, \\ \text{si } -1 > \frac{\sigma_1}{\rho} < \frac{\sigma_2}{\rho} > +1, & \quad x_1 = \frac{\sigma_1}{\rho} \text{ et } x_2 = +1, \\ \text{si } -1 > \frac{\sigma_1}{\rho} < \frac{\sigma_2}{\rho} > +1, & \quad x_1 = -1 \text{ et } x_2 = +1. \end{aligned}$$

Les formules (5), (6) et (7) deviennent un peu plus générales quand on remplace $x, y, z, \dots$, par $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}, \dots$, et $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, par $a\alpha, b\beta, c\gamma, \dots$, ce qui donne

$$\rho = \sqrt{a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2 + \dots}$$

Dans le cas très-simple

$$f(t) = 1, \quad \varphi(s) = 1, \quad n = 3, \quad \sigma_1 = \mu < 1, \quad \sigma_2 = 1,$$

l'intégrale

$$V = \int \int \int dx dy dz,$$

$$\mu < \alpha x + \beta y + \gamma z < 1, \quad 0 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1,$$

donne le volume de la partie d'un ellipsoïde comprise entre les deux plans parallèles dont les équations sont

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \mu,$$

et

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1;$$

on trouve à l'aide de la formule (7) que ce volume est égal à

$$2 \pi abc \int_{\frac{\mu}{\rho}}^{\frac{1}{\rho}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dx dy = \pi abc \left(\frac{1-\mu}{\rho} - \frac{1}{3} \frac{1-\mu^3}{\rho^3} \right),$$

$$\rho = \sqrt{a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2}.$$

Ce résultat se vérifie aisément par les méthodes ordinaires.

Prenons maintenant dans la formule (5)

$$n = 3, \quad f(t) = 1,$$

et

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \omega, \quad z = r \sin \theta \sin \omega;$$

alors nous trouvons

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha r \cos \theta + \beta r \sin \theta \cos \omega + \gamma r \sin \theta \sin \omega) r^2 \sin \theta dr d\theta d\omega$$

$$= \pi \int_{-1}^{+1} (1-x^2) \varphi(\rho x) dx, \quad (\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}).$$

De cette formule on peut déduire un théorème de Poisson; en effet, si l'on pose

$$\int_0^1 x^2 \varphi(\rho x) dx = \psi(\rho),$$

ou

$$\int_0^\mu t^2 \varphi(t) dt = \mu^3 \psi(\mu),$$

on trouve d'abord par différentiation

$$\varphi(\mu) = 3 \psi(\mu) + \mu \psi'(\mu),$$

et d'après cela :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \cos \omega + \gamma \sin \theta \sin \omega) \sin \theta d\theta d\omega$$

$$= \pi \int_{-1}^{+1} (1-x^2) [3\psi(\rho x) + \rho x \psi'(\rho x)] dx = 2\pi \int_{-1}^{+1} \psi(\rho x) dx,$$

ce qui est le théorème mentionné.

