

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TCHEBICHEF

Sur la série de Lagrange

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 2 (1857), p. 166-183.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2_166_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR

LA SÉRIE DE LAGRANGE;

PAR M. TCHEBICHEF.

§ I.

L'intégration *par parties* donne la série de Taylor et le terme complémentaire avec une extrême facilité; que manque-t-il à cette méthode pour donner d'une manière analogue la série plus générale due à Lagrange? Toutes les méthodes d'après lesquelles on parvient à la série de Taylor sont plus ou moins susceptibles de donner la série de Lagrange; la méthode d'intégration *par parties* présente seule une exception. En cherchant à combler cette lacune, nous avons reconnu qu'il ne s'agissait que de donner une certaine extension à la méthode de réduction des intégrales, connue sous le nom d'intégration *par parties*, extension qui paraît être utile dans plusieurs autres cas.

L'intégration *par parties* consiste dans cette réduction de l'intégrale

$$\int \theta(x) \psi(x) dx,$$

$$\int \theta(x) \psi(x) dx = \theta(x) \int \psi(x) dx - \int \theta'(x) \left[\int \psi(x) dx \right] dx,$$

ce qu'on peut écrire sans séparer les facteurs du produit $\theta(x) \psi(x)$ de la manière suivante :

$$\int \theta(x) \psi(x) dx = \int \theta(x') \psi(x') dx' - \int \frac{d \int \theta(x'') \psi(x') dx'}{dx''} dx,$$

en supposant qu'on supprime les accents de x' et x'' , après avoir fait les opérations qui se rapportent exclusivement à ces quantités.

Or, en représentant sous cette forme l'intégration *par parties*, on reconnaît sans peine que rien ne s'oppose à ce qu'on l'applique au cas où le produit $\theta(x'') \psi(x')$ est remplacé par une fonction quelconque

de x' et x'' . C'est là le changement nécessaire pour qu'on puisse en tirer la série de Lagrange par le même procédé qui conduit à la série de Taylor. L'énoncé de cette réduction des intégrales peut se faire en ces termes :

Si l'on convient de ne distinguer x' et x'' de x que dans les opérations qui se rapportent exclusivement à x' ou x'' , on a

$$(1) \quad \int f(x', x'') dx = \int f(x', x'') dx' - \int \frac{d f(x', x'')}{dx''} dx.$$

Il n'est pas difficile de remarquer que la réduction des intégrales dont nous venons de parler ne diffère que par son énoncé de celle que M. Bertrand a donnée dans le tome VIII du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville.

Pour montrer la manière de se servir de cette réduction, supposons qu'il s'agisse de réduire l'intégrale $\int (\cos x + e^x) dx$. On commencera par mettre l'expression $\cos x + e^x$ sous la forme d'une fonction de x' et x'' , ce qu'on peut faire évidemment de différentes manières. Si l'on s'arrête au cas où l'on donne un accent à x sous le signe de *cosinus* et deux à l'exposant de e , l'expression

$$\cos x + e^x$$

devient

$$\cos x' + e^{x''},$$

et alors, d'après la formule (1), on aura

$$\begin{aligned} \int (\cos x' + e^{x''}) dx &= \int (\cos x' + e^{x''}) dx' - \int \frac{d f(\cos x' + e^{x''})}{dx''} dx \\ &= \sin x' + x' e^{x''} - \int x' e^{x''} dx, \end{aligned}$$

ou, en supprimant les accents,

$$\int (\cos x + e^x) dx = \sin x + x e^x - \int x e^x dx.$$

En intégrant par rapport à x' , nous avons pris pour constante zéro, mais rien n'empêche de prendre une valeur quelconque qui peut être

même une fonction de x'' . Pour s'en assurer on n'a qu'à remarquer que la formule (1), étant différenciée par rapport à x , se réduit à cette identité

$$f(x', x'') = f(x', x'') + \frac{df f(x', x'') dx'}{dx''} - \frac{df f(x', x'') dx'}{dx''}.$$

§ II.

Passons maintenant à la démonstration de la série de Lagrange. Nous supposons qu'on ait

$$X - a = f \cdot \varphi(X),$$

et que l'on cherche le développement de $F(X)$ suivant les puissances croissantes de f .

Imitant la marche ordinaire qui mène à la série de Taylor, mettons la valeur $F(X)$ sous la forme

$$F(X) = F(a) + \int_a^X F'(x) dx.$$

Puis remplaçant dans la dérivée $F'(x)$ la lettre x par x'' , nous trouvons, d'après la formule (1),

$$\int F'(x) dx$$

ou

$$\begin{aligned} \int F'(x'') dx &= \int F'(x'') dx' - \int \frac{d f F'(x'') dx'}{dx''} dx \\ &= F'(x'')(x' + C) - \int \frac{d F'(x'')(x' + C)}{dx''} dx, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \int F'(x) dx &= F'(x'')[x' - a - f\varphi(x'')] \\ &\quad - \int \frac{d F'(x'')[x' - a - f\varphi(x'')]}{dx''} dx, \end{aligned}$$

en prenant

$$C = a - f\varphi(x'').$$

Remarquons en passant que cette valeur de C présente une grande analogie avec celle que l'on emploie dans le même cas, en cherchant la série de Taylor.

Si l'on applique de nouveau la formule (1) à l'intégrale

$$\int \frac{dF'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]}{dx''} dx,$$

on parvient à cette réduction

$$\begin{aligned} \int \frac{dF'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]}{dx''} dx &= \int \frac{dF'(x'') (x' - a - f\varphi(x''))}{dx''} dx' \\ &\quad - \int \frac{d \int \frac{dF'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]}{dx''} dx'}{dx''} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{dF'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^2}{dx''} - \frac{1}{2} \int \frac{d^2 F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^2}{dx''} dx. \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à poursuivre la même marche, et l'on obtient successivement

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^2}{d(x'')^2} dx &= \frac{1}{3} \frac{d^2 F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^3}{d(x'')^2} \\ &\quad - \frac{1}{3} \int \frac{d^3 F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^3}{d(x'')^3} dx, \\ \int \frac{d^3 F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^3}{d(x'')^3} dx &= \frac{1}{4} \frac{d^3 F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^4}{d(x'')^4} \\ &\quad - \frac{1}{4} \int \frac{d^4 F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^4}{d(x'')^4} dx; \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

La substitution de ces valeurs donne pour l'intégrale indéfinie

$$\int F'(x) dx$$

cette expression

$$\begin{aligned} \int F'(x) dx &= F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')] - \frac{1}{2} \frac{dF'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^2}{dx''} \\ &+ \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^2 F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^3}{d(x'')^2} - \dots + \frac{(-1)^n}{2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^{n-1} F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^{n-1}} \\ &+ \frac{(-1)^n}{2 \cdot 3 \dots n} \int \frac{d^n F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^n} dx. \end{aligned}$$

En passant à l'intégrale définie

$$\int_a^X F'(x) dx,$$

on reconnaît d'abord que pour

$$x = x' = x'' = a$$

les termes hors du signe d'intégration deviennent

$$\begin{aligned} -f F'(a) \varphi(a) - \frac{f^2}{2} \frac{dF'(a) \varphi^2(a)}{da} - \frac{f^3}{2 \cdot 3} \frac{d^2 F'(a) \varphi^3(a)}{da^2} - \dots \\ - \frac{f^n}{2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^{n-1} F'(a) \varphi^n(a)}{da^{n-1}}. \end{aligned}$$

Ensuite que, pour

$$x = x' = x'' = X,$$

X étant racine de l'équation

$$X - a = f\varphi(X),$$

ces termes se réduisent tous à zéro à cause du facteur $x' - a - f\varphi(x'')$ qui y reste malgré toutes les différentiations, et qui s'annule, en vertu de l'équation précédente, pour $x' = x'' = X$.

Donc

$$\begin{aligned} \int_a^X F'(x) dx &= f F'(a) \varphi(a) + \frac{f^2}{2} \frac{dF'(a) \varphi^2(a)}{da} \\ &+ \frac{f^3}{2 \cdot 3} \frac{d^2 F'(a) \varphi^3(a)}{da^2} + \dots + \frac{f^n}{2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^{n-1} F'(a) \varphi^n(a)}{da^{n-1}} \\ &+ \frac{(-1)^n}{2 \cdot 3 \dots n} \int_a^X \frac{d^n F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^n} dx, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} F(X) &= F(a) + \int_a^X F'(x) dx = F(a) + f F'(a) \varphi(a) \\ &\quad + \frac{f^2}{2} \frac{dF'(a) \varphi^2(a)}{da} + \frac{f^3}{2.3} \frac{d^2 F'(a) \varphi^3(a)}{da^2} + \dots \\ &\quad + \frac{f^n}{2.3 \dots n} \frac{d^{n-1} F'(a) \varphi^n(a)}{da^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{2.3 \dots n} \int_a^X \frac{d^n F'(x'') [x' - a - f \varphi(x'')]^n}{d(x'')^n} dx. \end{aligned}$$

Ainsi l'on parvient à la série de Lagrange

$$\begin{aligned} F(X) &= F(a) + f F'(a) \varphi(a) + \frac{f^2}{2} \frac{dF'(a) \varphi^2(a)}{da} + \frac{f^3}{2.3} \frac{d^2 F'(a) \varphi^3(a)}{da^2} + \dots \\ &\quad + \frac{f^n}{2.3 \dots n} \frac{d^{n-1} F'(a) \varphi^n(a)}{da^{n-1}}, \end{aligned}$$

et l'on voit que le terme complémentaire a pour valeur

$$\frac{(-1)^n}{2.3 \dots n} \int_a^X \frac{d^n F'(x'') [x' - a - f \varphi(x'')]^n}{d(x'')^n} dx,$$

où, après avoir fait les différentiations par rapport à x'' , on supprimera les accents de x' et x'' . Cette valeur peut être évidemment présentée sous cette forme

$$\frac{1}{2.3 \dots n} \int_a^X \frac{d^n F'(x+i) [f \varphi(x+i) + a - x]^n}{d^n i} dx,$$

en faisant $i = 0$ après les différentiations.

D'après ce que nous venons de voir, la formule

$$\begin{aligned} F(X) &= F(a) + f F'(a) \varphi(a) + \frac{f^2}{2.3} \frac{dF'(a) \varphi^2(a)}{da} + \dots \\ &\quad + \frac{f^n}{2.3 \dots n} \frac{d^{n-1} F'(a) \varphi^n(a)}{da^n} + \frac{(-1)^n}{2.3 \dots n} \int_a^X \frac{d^n F'(x'') [x' - a - f \varphi(x'')]^n}{d(x'')^n} dx \end{aligned}$$

subsiste également pour toutes les valeurs de X qui vérifient l'équation

$$X - a = f \varphi(X).$$

Mais les premiers termes

$$F(a) + F'(a) \varphi(a) + \frac{f^2}{2} \frac{dF'(a) \varphi^2(a)}{da} + \dots + \frac{f^n}{2.3 \dots n} \frac{d^{n-1} F'(a) \varphi^n(a)}{da^{n-1}}$$

de cette expression qui constituent le développement de $F(X)$, d'après la série de Lagrange, jusqu'à la $(n+1)^{\text{ième}}$ puissance de f ne donnent effectivement sa valeur exacte aux quantités de même ordre que si le terme complémentaire

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{2.3 \dots n} \int_a^X \frac{d^n F'(x'') [x' - a - f\varphi(x'')]^n}{d(x'')^n} dx \\ &= \frac{1}{2.3 \dots n} \int_a^X \frac{d^n F'(x+i) [f\varphi(x+i) + a - x]^n}{di^n} dx \end{aligned}$$

devient, pour f petit, de l'ordre f^{n+1} ou d'un ordre supérieur. Or il est facile de remarquer que cela a lieu nécessairement tant que X est celle des racines de l'équation

$$X = 0 = f\varphi(X),$$

qui se réduit à a pour $f=0$; car, dans ce cas, en vertu de l'équation

$$X - a = f\varphi(X),$$

la différence $X - a$ est une quantité de l'ordre f , $\varphi(X)$ étant, par la supposition, finie pour $X=a$, et par conséquent l'intégrale

$$\int_a^X \frac{d^n F'(x+i) [f\varphi(x+i) + a - x]^n}{di^n} dx,$$

où $x - a$ reste compris entre 0 et $X - a$, a tout au plus une valeur de l'ordre f^{n+1} .

§ III.

Le terme complémentaire que l'on vient de trouver permet d'assigner la limite du reste dans les développements construits d'après la formule de Lagrange et arrêtés à un terme de rang quelconque.

Nous allons en donner des exemples sur les développements bien connus de l'*anomalie excentrique* et du *rayon vecteur*, selon les puissances croissantes de l'*excentricité*.

Pour le développement de l'*anomalie excentrique*, il faut poser dans nos formules

$$F(x) = x, \quad \varphi(x) = \sin x,$$

en supposant que a désigne l'*anomalie excentrique*, x l'*anomalie moyenne* et f l'*excentricité*. Dans ce cas l'équation

$$X - a = f \varphi(X)$$

devient

$$X - a = f \sin X,$$

et le terme complémentaire du développement de $F(X) = X$, prolongé jusqu'à f^n , s'exprime ainsi :

$$\frac{1}{2.3 \dots n} \int_a^X \frac{d^n [f \sin(x+i) + a - x]^n}{di^n} dx,$$

en prenant $i = 0$.

Or, comme l'expression

$$\frac{1}{2.3 \dots n} \frac{d^n [f \sin(x+i) + a - x]^n}{di^n}$$

pour $i = 0$ n'est que la valeur de l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x}{r} \right]^n e^{-np\sqrt{-1}} dp,$$

r étant une quantité quelconque, ce terme complémentaire peut être mis sous cette forme

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^X \int_0^{2\pi} \left[\frac{f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x}{r} \right]^n e^{-np\sqrt{-1}} dp dx.$$

Pour assigner la limite que cette expression ne peut surpasser, nous allons chercher la plus grande valeur que peut avoir le module de

$$[f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x]^2$$

pour x compris entre a et X , racine de l'équation

$$X - a = f \sin X,$$

ou, ce qui revient au même, pour a compris entre x et $x - f \sin x$.

En dénotant par R le module de cette expression, on trouve

$$R = [f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x] [f \sin(x + re^{-p\sqrt{-1}}) + a - x];$$

d'où, en cherchant la valeur de $\frac{d^2 R}{da^2}$, on a

$$\frac{d^2 R}{da^2} = 2.$$

La valeur de $\frac{d^2 R}{da^2}$ étant positive, on conclut que le *maximum* de R ne peut avoir lieu que pour les valeurs limites de a , savoir

$$a = x,$$

$$a = x - f \sin x.$$

Or, pour $a = x$, la valeur de R devient

$$f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) \cdot f \sin(x + re^{-p\sqrt{-1}}),$$

ce qui se réduit à

$$\begin{aligned} & \frac{f^2}{2} [\cos(2r \sin p \sqrt{-1}) - \cos(2x + 2r \cos p)] \\ &= \frac{f^2}{2} \left[\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos(2x + 2r \cos p) \right], \end{aligned}$$

et la plus grande valeur de cette expression a lieu évidemment pour

$$\sin p = 1, \quad \cos(2x + 2r \cos p) = -1,$$

ce qui donne pour le *maximum* de R cette valeur

$$\frac{f^2}{2} \left(\frac{e^{2r} + e^{-2r}}{2} + 1 \right) = f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^2.$$

En prenant pour a son autre valeur limite $x - f \sin x$, on trouve

que R devient

$$f^2 [\sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) \sin x] [\sin(x + re^{-p\sqrt{-1}}) \sin x],$$

ce qui se réduit à

$$4f^2 \cos\left(x + \frac{r}{2} e^{p\sqrt{-1}}\right) \sin\left(\frac{r}{2} e^{p\sqrt{-1}}\right) \cos\left(x + \frac{r}{2} e^{-p\sqrt{-1}}\right) \sin\left(\frac{r}{2} e^{-p\sqrt{-1}}\right),$$

et comme

$$\begin{aligned} & 2 \cos\left(x + \frac{r}{2} e^{p\sqrt{-1}}\right) \cos\left(x + \frac{r}{2} e^{-p\sqrt{-1}}\right) \\ &= \cos(r \sin p \sqrt{-1}) + \cos(2x + r \cos p) \\ &= \frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} + \cos(2x + r \cos p), \\ & 2 \sin\left(\frac{r}{2} e^{p\sqrt{-1}}\right) \sin\left(\frac{r}{2} e^{-p\sqrt{-1}}\right) \\ &= \cos(r \sin p \sqrt{-1}) - \cos(r \cos p) \\ &= \frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos(r \cos p), \end{aligned}$$

on trouve pour R cette valeur

$$\begin{aligned} R &= f^2 \left[\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos(r \cos p) \right] \\ &\times \left[\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} + \cos(2x + r \cos p) \right]. \end{aligned}$$

On parvient facilement à reconnaître que cette valeur reste toujours au-dessous du *maximum* de R que nous venons de trouver pour $a = x$. En effet, en cherchant les valeurs de p pour lesquelles l'expression

$$\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos(r \cos p)$$

peut devenir *maximum* ou *minimum*, on trouve l'équation

$$(2) \quad \frac{e^{r \sin p} - e^{-r \sin p}}{2} \cos p - \sin(r \cos p) \sin p = 0.$$

Cette équation se vérifie évidemment quand on fait

$$\sin p = 0$$

ou

$$\cos p = 0,$$

et hors ces cas, elle ne peut être satisfaite; car tant que $\sin p$ est différent de zéro, on a

$$\left(\frac{e^{r \sin p} - e^{-r \sin p}}{2} \right)^2 > r^2 \sin^2 p,$$

et comme

$$\sin^2(r \cos p) \leq r^2 \cos^2 p,$$

cela suppose

$$\left(\frac{e^{r \sin p} - e^{-r \sin p}}{2 \sin(r \cos p)} \right)^2 > \tan^2 p,$$

tandis que l'équation (2), pour $\cos p$ différent de 0, donne

$$\frac{e^{r \sin p} - e^{-r \sin p}}{2 \sin(r \cos p)} = \tan^2 p.$$

Donc les *maxima* et les *minima* de l'expression

$$\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos(r \cos p)$$

ne peuvent avoir lieu, à moins qu'on n'ait

$$\cos p = 0$$

ou

$$\sin p = 0.$$

D'après cela, en remarquant que l'expression

$$\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos(r \cos p)$$

devient

$$\frac{e^r + e^{-r}}{2} - 1 = \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{r^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots,$$

ou

$$1 - \cos(r) = \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{r^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \dots,$$

selon qu'on prend $\cos p = 0$ ou $\sin p = 0$, et que la première valeur surpasse la seconde, nous concluons que c'est cette valeur

$$\frac{e^r + e^{-r}}{2} = 1,$$

qui est le maximum de l'expression

$$\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} = \cos(r \cos p).$$

Mais comme l'autre facteur

$$\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} + \cos(2x + r \cos p)$$

de la valeur de R

$$R = f^2 \left[\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} - \cos(r \cos p) \right] \\ \times \left[\frac{e^{r \sin p} + e^{-r \sin p}}{2} + \cos(2x + r \cos p) \right]$$

ne peut être évidemment au-dessus de $\frac{e^r + e^{-r}}{2} + 1$, il s'ensuit que cette valeur de R ne peut surpasser la limite

$$f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} - 1 \right) \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} + 1 \right) = f^2 \left(\frac{e^r - e^{-r}}{2} \right)^2,$$

et par conséquent qu'elle est inférieure à $f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^2$; ce qu'il s'agissait de prouver.

Ainsi l'on parvient à reconnaître que la plus grande valeur que peut avoir le module de l'expression

$$[f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x]^2$$

pour x compris entre a et X , racine de l'équation

$$X - a = f \sin X,$$

est celle-ci :

$$f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^2.$$

Il en résulte que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^X \int_0^{2\pi} \left[\frac{f \sin(x + r e^{p\sqrt{-1}}) + a - x}{r} \right]^n e^{-np\sqrt{-1}} dp dx,$$

qui désigne le reste de la série en question, est au-dessous de cette valeur

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^X \int_0^{2\pi} \left[\frac{f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^2}{r^n} \right]^{\frac{n}{2}} dp dx = (X - a) f^n \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r} \right)^n.$$

Cette limite, du reste, sera plus ou moins grande selon la valeur de r . Mais comme r est tout à fait arbitraire, rien n'empêche de le choisir de manière que la limite devienne la plus petite possible, et par conséquent la plus proche de la vraie valeur du reste. On y parvient en prenant pour r une valeur qui rende *minimum* l'expression

$$\left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r} \right)^n,$$

ou, ce qui revient au même, *maximum* celle-ci :

$$\frac{2r}{e^r + e^{-r}}.$$

En dénotant par k le *maximum* de cette expression, on aura pour la limite du reste la valeur

$$(X - a) \left(\frac{f}{k} \right)^n,$$

et comme la différence $X - a$, en vertu de l'équation

$$X - a = f \sin X,$$

ne surpasse pas f , on peut prendre pour cette limite l'expression suivante :

$$f\left(\frac{f}{k}\right)^n, \quad \text{ou} \quad k\left(\frac{f}{k}\right)^{n+1}.$$

Quant à la valeur de k , on trouve que le *maximum* de

$$\frac{2r}{e^r + e^{-r}}$$

a lieu pour r , racine de l'équation

$$\frac{d}{dr} \frac{2r}{e^r + e^{-r}} = \frac{2}{(e^r + e^{-r})^2} [e^r + e^{-r} - r(e^r - e^{-r})] = 0,$$

et que la valeur approchée de ce *maximum* est 0,66195.

§ IV.

Pour trouver la limite du reste dans le développement du *rayon vecteur*, on prendra

$$F(x) = 1 - f \cos x, \quad \varphi(x) = \sin x,$$

en supposant toujours que x désigne l'*anomalie excentrique*, a la *moyenne* et f l'*excentricité*. Ces valeurs de $F(x)$ et $\varphi(x)$, en s'arrêtant dans la série de Lagrange au terme

$$\frac{f^n}{2.3 \dots n} \frac{d^{n-1} F'(a) \varphi^n(a)}{da^{n-1}},$$

donnent pour le reste

$$\frac{1}{2.3 \dots n} \int_a^X \frac{d^n [f \sin(x+i) (f \sin(x+i) + a - x)]}{di^n} dx,$$

où $i = 0$, après les différentiations.

En suivant la même marche que dans le paragraphe précédent, on mettra cette expression sous la forme

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^X \int_0^{2\pi} \frac{f \sin(x + re^{ip\sqrt{-1}}) [f \sin(x + re^{ip\sqrt{-1}}) + a - X]^n}{r^n} e^{-np\sqrt{-1}} dp dx.$$

On commencera la recherche de la limite supérieure de ce reste, ainsi transformé, par le calcul de la plus grande valeur que peut avoir le module de

$$f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) [f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x]^n$$

pour x compris entre a et X , racine de l'équation $X - a = f \sin X$. Or nous venons de trouver dans le paragraphe précédent que pour ces valeurs de x le plus grand module de l'expression

$$[f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x]^2$$

est $f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r} \right)^2$, et que ce module n'a lieu que pour $a = x$ et par conséquent dans le cas où l'expression

$$[f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x]^2$$

se réduit à

$$[f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}})]^2.$$

Donc la valeur

$$f^2 \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2r} \right)^2$$

est la limite des modules de chacune de ces deux expressions

$$[f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x]^2, \quad [f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}})]^2;$$

d'où il suit que le module de

$$f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) [f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x]^n$$

ne peut surpasser

$$f \frac{e^r + e^{-r}}{2} \left(f \frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^n = f^{n+1} \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^{n+1},$$

et par conséquent la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^X \int_0^{2\pi} \frac{f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) [f \sin(x + re^{p\sqrt{-1}}) + a - x]^n}{r^n} e^{-np\sqrt{-1}} dp dx,$$

qui est le reste de la série en question, doit être au-dessous de cette limite

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^X \int_0^{2\pi} \frac{f^{n+1}}{r^n} \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^{n+1} dp dr = (X - a) \frac{f^{n+1}}{r^n} \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^{n+1}.$$

Cette limite s'approche le plus près de la vraie valeur du reste quand on prend pour r la valeur qui la réduit à son *minimum*; ce qui a lieu pour r déterminé par l'équation

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r^n} \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^{n+1} = \frac{n+1}{2r^{n+1}} \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2} \right)^n \left[(e^r + e^{-r})r - \frac{n}{n+1}(e^r + e^{-r}) \right] = 0.$$

Mais on n'augmente pas notablement cette valeur en prenant pour r la racine de l'équation

$$r(e^r - e^{-r}) - e^r - e^{-r} = 0,$$

qu'on trouve en faisant dans l'équation précédente n infiniment grand. Avec cette valeur de r l'expression

$$\frac{2r}{e^r + e^{-r}}$$

se réduit à la quantité que nous avons désignée par k , et alors l'expression trouvée de la limite du reste devient

$$r(X - a) \left(\frac{f}{k} \right)^{n+1}.$$

De plus, comme la différence $X - a$ ne surpasse pas f , on peut remplacer cette limite par celle-ci :

$$rf \left(\frac{f}{k} \right)^{n+1} = kr \left(\frac{f}{k} \right)^{n+2}.$$

Les limites que nous venons de trouver pour le reste du développement de l'*anomalie excentrique* et du *rayon vecteur* seraient notablement diminuées si, au lieu de remplacer, comme nous l'avons fait dans

le § III, les expressions

$$\frac{e^{2r \sin p} + e^{-2r \sin p}}{2} + 1, \quad \frac{e^r \sin p + e^{-r \sin p}}{2} + 1,$$

$$\frac{e^r \sin p + e^{-r \sin p}}{2} - \cos(r \cos p),$$

pour toutes les valeurs de p par leurs *maxima*

$$\frac{e^{2r} + e^{-2r}}{2} + 1, \quad \frac{e^r + e^{-r}}{2} + 1, \quad \frac{e^r + e^{-r}}{2} - 1,$$

on tenait compte de leur diminution quand $\sin p$ s'approche de 0. Mais malgré cette hypothèse défavorable, les limites trouvées suffisent pour montrer clairement que les développements de l'*anomalie excentrique* et du *rayon vecteur*, selon les puissances croissantes de l'*excentricité*, sont toujours convergentes si la valeur de l'excentricité est inférieure à la limite $k = 0,66195$. C'est ce que Laplace a trouvé le premier, et ce que M. Cauchy a démontré par une méthode très-ingénieuse. Ces limites suffisent aussi pour prouver que *dans ces développements l'erreur est toujours au-dessous du rapport de l'excentricité à $k = 0,66195$, élevé au degré égal au nombre de termes qu'on retient.*

On s'en assurera si l'on remarque que dans les expressions

$$k \left(\frac{f}{k} \right)^{n+1}, \quad kr \left(\frac{f}{k} \right)^{n+2},$$

que nous avons trouvées pour ces limites, les facteurs k et kr sont inférieurs à 1, car la valeur de k est 0,66195, et r racine de l'équation

$$e^r + e^{-r} - r(e^r - e^{-r}) = 0$$

est au-dessous de 1,2.

D'autre part, en supposant, comme nous l'avons fait, que dans ces développements on arrête la série de Lagrange au terme

$$\frac{1}{2.3 \dots n} \frac{d^{n-1} F'(a) \varphi^n(a)}{da^{n-1}},$$

on trouve $n + 1$ ou $n + 2$ termes, selon qu'il s'agit du développement de l'*anomalie excentrique* ou du *rayon vecteur*; car dans le premier cas on prend $F(x) = x$, et dans le second $F(x) = 1 - f \cos x$, ce qui donne dans ce cas un terme de plus (*).

(*) M. Tchébichef avait ajouté à cette Note, qu'il nous a remise en décembre dernier, un V^e paragraphe, où il s'occupait d'un système d'équations simultanées : il nous a autorisé à le supprimer ici, à cause de la complication des formules. On le retrouvera dans le travail complet que l'auteur publiera sans doute bientôt.

