

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques fonctions numériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 2 (1857), p. 141-144.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2_141_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR QUELQUES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je nomme ainsi certaines quantités qui dépendent d'un nombre entier m , et qui sont tellement définies qu'on peut toujours les calculer quand ce nombre est donné : il est dès lors naturel de les exprimer par un signe analogue à celui qui marque les fonctions d'une variable continue. C'est ainsi que nous représenterons, avec Euler, par $\int m$ la somme des diviseurs d du nombre m , y compris 1 et m : c'est encore ainsi qu'avec M. Gauss, nous dénoterons par $\varphi(m)$ le nombre des entiers premiers à m que contient la suite 1, 2, ..., m .

On a

$$\int 1 = 1, \quad \varphi(1) = 1,$$

et pour un nombre quelconque décomposé en ses facteurs premiers :

$$m = a^\alpha b^\beta \dots c^\gamma,$$

on trouve facilement

$$\int m = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \dots \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1},$$

et

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{c}\right).$$

Les fonctions $\varphi(m)$ et $\int m$ ont d'ailleurs beaucoup de propriétés remarquables. En désignant par la caractéristique $\sum$ une somme concernant tous les diviseurs d de m , on a

$$(1) \quad \sum \varphi(d) = m,$$

comme l'a d'abord prouvé M. Gauss. En posant $m = d \cdot \delta$, on a aussi, comme je l'ai déjà dit dans un des derniers cahiers du Journal,

$$(2) \quad \sum (d \int d) = \sum (\delta^2 \int d).$$

Il existe un grand nombre de formules semblables, dont plusieurs offrent de l'intérêt, et où figurent avec $\varphi(m)$ et $\int m$ d'autres fonctions numériques analogues. Je profite de l'espace qui reste libre dans cette feuille pour écrire quelques-unes de ces formules : celles que je vais indiquer sont toutes très-faciles à établir et à vérifier ; mais la place me manque pour ajouter les démonstrations, si courtes qu'elles soient : je me borne donc à un simple énoncé.

Je conserve les définitions et les notations précédentes ; et de plus je désigne par $\zeta(m)$ le nombre des diviseurs de m . On a généralement

$$\zeta(m) = (1 + \alpha)(1 + \beta) \dots (1 + \gamma),$$

par suite

$$\zeta(1) = 1, \zeta(2) = 2, \zeta(3) = 2, \zeta(4) = 3, \zeta(5) = 2, \zeta(6) = 4, \text{ etc.}$$

Enfin je représente par $\theta(m)$ le nombre des décompositions de m en deux facteurs premiers entre eux. On sait que

$$\theta(m) = 2^{\nu},$$

ν désignant le nombre des facteurs premiers distincts $a, b, \dots, c$ de $m = a^{\alpha} b^{\beta} \dots c^{\gamma}$. Ainsi

$$\theta(1) = 1, \theta(2) = 2, \theta(3) = 2, \theta(4) = 2, \theta(5) = 2, \theta(6) = 4, \text{ etc.}$$

Cela posé, je trouve d'abord que

$$(3) \quad \sum (\int d) = \sum [\delta \cdot \zeta(d)].$$

Les sommations indiquées s'appliquent à tous les diviseurs d de m , et l'on se souvient que $m = d \cdot \delta$. Soit par exemple $m = 6$, ce qui donne $d = 1, 2, 3, 6$ et $\delta = 6, 3, 2, 1$; on devra avoir

$$\int 1 + \int 2 + \int 3 + \int 6 = 6\zeta(1) + 3\zeta(2) + 2\zeta(3) + \zeta(6),$$

c'est-à-dire

$$1 + 3 + 4 + 12 = 6 + 3.2 + 2.2 + 4,$$

ce qui est exact, la somme aux deux membres étant 20.

En second lieu, on a

$$(4) \quad \sum [\varphi(d) \zeta(d)] = \int m.$$

Soit toujours comme exemple $m = 6$; nous devons avoir

$$\varphi(1) \zeta(6) + \varphi(2) \zeta(3) + \varphi(3) \zeta(2) + \varphi(6) \zeta(1) = \int 6 = 12,$$

et c'est en effet 12 qu'on trouve pour la valeur du premier membre, c'est-à-dire de

$$1.4 + 1.2 + 2.2 + 2.1.$$

Nous avons encore cette formule

$$(5) \quad \sum [\theta(d) \zeta(d)] = \zeta(m)^2.$$

Pour $m = 6$, cela veut dire que

$$\theta(1) \zeta(6) + \theta(2) \zeta(3) + \theta(3) \zeta(2) + \theta(6) \zeta(1) = \zeta(6)^2;$$

ainsi, en mettant pour les expressions θ et ζ leurs valeurs, on doit avoir

$$1.4 + 2.2 + 2.2 + 4.1 = 4^2,$$

ce qui est exact.

Je puis aussi démontrer que

$$(6) \quad \sum \left(\int d. \int d \right) = \sum [d. \zeta(d) \zeta(d)].$$

Pour $m = 6$, cette formule donne

$$\begin{aligned} & \int 1. \int 6 + \int 2. \int 3 + \int 3. \int 2 + \int 6. \int 1 \\ &= \zeta(1) \zeta(6) + 2 \zeta(2) \zeta(3) + 3 \zeta(3) \zeta(2) + 6 \zeta(6) \zeta(1), \end{aligned}$$

ce qui revient à

$$12 + 3.4 + 4.3 + 12 = 4 + 2.2.2 + 3.2.2 + 6.4;$$

et des deux parts, en effet, la somme est 48.

Pour écrire la dernière formule, je dois distinguer parmi les diviseurs de m ceux qui sont des carrés : 1 par exemple sera toujours un tel diviseur, et il y en aura d'autres si les exposants $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ de la formule

$$m = a^\alpha b^\beta \dots c^\gamma,$$

ne sont pas tous égaux à l'unité. Je désignerai ces diviseurs par D^2 , et je marquerai d'un accent le signe $\sum$ quand il ne devra s'appliquer qu'à eux. Ces conventions faites, on aura

$$(7) \quad \sum [\zeta(d) \zeta(d')] = \sum' \left[\zeta \left(\frac{m}{D^2} \right)^2 \right].$$

Ainsi pour $m = 6$, où l'on n'a qu'un seul diviseur carré $D^2 = 1$, il vient

$$\zeta(1)\zeta(6) + \zeta(2)\zeta(3) + \zeta(3)\zeta(2) + \zeta(6)\zeta(1) = \zeta(6)^2,$$

c'est-à-dire

$$1.4 + 2.2 + 2.2 + 4.1 = 4^2,$$

ce qui est exact. De même, pour $m = 32$, où D^2 a ces trois valeurs 1, 4, 16, on doit trouver égales entre elles les deux sommes

$$\zeta(1)\zeta(32) + \zeta(2)\zeta(16) + \zeta(4)\zeta(8) + \zeta(8)\zeta(4) + \zeta(16)\zeta(2) + \zeta(32)\zeta(1),$$

et

$$\zeta(32)^2 + \zeta(8)^2 + \zeta(2)^2:$$

la valeur commune est en effet 56.

Ces théorèmes (dont plusieurs peut-être ont déjà été donnés sans que je le sache) pourront servir à exercer les jeunes géomètres, et dans ce but j'en présenterai d'autres encore dans un prochain article : je pourrai ajouter alors une démonstration.