

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Sur l'expression $\varphi(n)$, qui marque combien la suite $1, 2, 3, \dots, n$
contient de nombres premiers à n**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 2 (1857), p. 110-112.

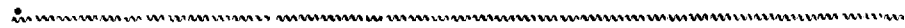
http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__110_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR L'EXPRESSION $\varphi(n)$,

QUI MARQUE COMBIEN LA SUITE 1, 2, 3, ..., n CONTIENT DE NOMBRES
PREMIERS À n ;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Euler a donné la valeur générale et simple de l'expression $\varphi(n)$,
qui marque combien la suite

$$1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n,$$

contient de nombres premiers à n . Il est clair que l'on a

$$\varphi(1) = 1,$$

et pour un entier n quelconque, décomposé en facteurs premiers,
sous la forme

$$n = a^\alpha b^\beta \dots c^\gamma,$$

Euler trouve

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{c}\right).$$

De là il est aisé de conclure, par le calcul effectué, que la somme

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \dots + \varphi(n),$$

des expressions φ , appliquées successivement à tous les diviseurs

$$1, d, \dots, n$$

de n , est égale au nombre n lui-même. Voyez sur ce point une Note
de M. Catalan (1^{re} série, tome IV, page 7).

Mais on peut aussi établir l'équation

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \dots + \varphi(n) = n$$

par un raisonnement direct, indépendant de la formule qui donne $\varphi(n)$, et c'est même ainsi que Gauss, à qui cette équation est due, l'a d'abord démontrée (voir le n° 59 des *Disquisitiones arithmeticae*). Cela étant, si l'on observe que l'équation dont il s'agit, en y faisant successivement $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$, etc., donne l'une après l'autre les valeurs de φ , savoir

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(4) = 2, \dots,$$

on sera conduit à se proposer d'en tirer la valeur de $\varphi(n)$ pour un entier quelconque n .

Le problème peut d'ailleurs être ainsi généralisé. Supposant

$$f(1) + f(d) + \dots + f(n) = F(n),$$

où le signe $f(n)$, qui représente une quantité déterminée dépendante de l'entier n , est appliqué à tous les diviseurs $1, d, \dots, n$ de n , exprimer $f(n)$ au moyen de F . La réponse est fournie par la formule suivante, que je me garde bien, du reste, de présenter comme nouvelle, car quiconque l'aura cherchée a dû la trouver :

$$f(n) = F(n) - \sum F\left(\frac{n}{a}\right) + \sum F\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum F\left(\frac{n}{abc}\right) + \dots;$$

$a, b, c, \dots$, sont les nombres premiers distincts, facteurs de n : les signes $+$ et $-$ alternent : on pose, pour abrégér,

$$\sum F\left(\frac{n}{a}\right) = F\left(\frac{n}{a}\right) + F\left(\frac{n}{b}\right) + F\left(\frac{n}{c}\right) + \dots,$$

$$\sum F\left(\frac{n}{ab}\right) = F\left(\frac{n}{ab}\right) + F\left(\frac{n}{ac}\right) + F\left(\frac{n}{bc}\right) + \dots,$$

.....

Cette formule est aisée à établir, et plus aisée encore à vérifier.

Elle donne

$$f(1) = F(1),$$

puis, pour une puissance de nombre premier,

$$f(a^\alpha) = F(a^\alpha) - F(a^{\alpha-1}),$$

puis encore

$$f(a^\alpha b^\beta) = F(a^\alpha b) - F(a^{\alpha-1} b^\beta) - F(a^\alpha b^{\beta-1}) + F(a^{\alpha-1} b^{\beta-1}),$$

et ainsi de suite.

Mise en usage sur l'équation

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \dots + \varphi(n) = n,$$

elle fournit

$$\varphi(n) = n - \sum \frac{n}{a} + \sum \frac{n}{ab} - \sum \frac{n}{abc} + \dots,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{c}\right),$$

ce qu'il fallait trouver.

