

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 1 (1856), p. 89-189.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__89_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

MÉMOIRE

SUR

LA FLEXION DES PRISMES,

Sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes [];*

PAR M. DE SAINT-VENANT.

1. Recherches anciennes sur la théorie de la flexion.

C'est à propos du problème de la rupture des prismes par flexion que la théorie de la résistance des solides a été fondée par Galilée [**], et établie ensuite sur sa véritable base par Mariotte [***], qui l'a rattachée à celle de leur élasticité, dont Robert Hooke avait découvert, un peu avant lui, le principe [****].

[*] Un premier extrait de ce Mémoire a paru dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie*, à la correspondance du 20 novembre 1854, tome XXXIX, page 1027; et un deuxième extrait le jour de sa lecture, 20 juillet 1855, tome XLI, page 143.

[**] *Dialogo secondo, Giornata seconda*, 1638, art. 550, page 63 *delle opere di Galileo Galilei*.

[***] *Traité du mouvement des eaux*, 5^e partie, second discours, 1684 (posthume).

[****] *Lectures De potentiâ restitutivâ or of Spring*, opuscule inséré aux *Philosophical tracts and collections* de Robert Hooke, et publié en 1678, c'est-à-dire deux ans après sa *Description of Helioscopes*, où il énonce déjà sous l'anagramme *ceiïinossttuu* son fameux principe *ut tensio sic vis*, énonçant la *proportionnalité* des dilatations ou contractions des ressorts aux efforts qui les amènent ou qu'elles développent.

Galilée, en concevant un prisme horizontal à base rectangulaire partagé en *fibres* ou éléments longitudinaux, supposait qu'elles rompaient ensemble et opposaient toutes la même résistance lorsque, sous l'action d'une force verticale, une portion du prisme se séparait de l'autre en tournant, comme il le pensait, autour du côté inférieur de la section transversale où cette séparation s'opérait.

Mariotte jugeant, au contraire, que les fibres s'étendaient et se compressaient avant la rupture qui commence par l'une d'elles, et qu'elles résistaient jusque-là en raison du degré de leur extension ou de leur compression supposées proportionnelles aux distances à celles qui ne varient pas de longueur, plaçait celles-ci, et par conséquent l'axe de rotation, au milieu de la hauteur de la section de rupture comme on fait encore aujourd'hui. Mais se trompant ensuite, quant aux conséquences, d'une manière singulière, qui revient à doubler en même temps un bras de levier et une force pour doubler leur produit [*], il trouvait pour le moment des résistances « la même chose que si toutes » les parties s'étendaient » ou que si la rotation se faisait autour du bas de la section et non du milieu ; ce qui lui donnait les deux tiers du résultat de Galilée, tandis qu'il aurait dû n'arriver qu'au tiers, d'après son point de départ.

On s'étonne de voir, vingt ans plus tard, un grand géomètre, auteur de la première théorie des courbes élastiques, Jacques Bernoulli, *tout en admettant aussi les compressions* et présentant même leur considération comme étant de lui, commettre, sous une autre forme, précisément la même méprise du simple au double que Mariotte dans l'évaluation du moment des résistances, ce qui le conduit même à affirmer que la position attribuée à l'axe de rotation est tout à fait indifférente [**].

Ce ne fut qu'en 1773 que Coulomb, dans ce Mémoire célèbre où se trouvent posées presque toutes les bases de la théorie de la stabilité

[*] *Idem*, 13^e alinéa du discours.

[**] *Véritable hypothèse de la résistance des solides avec la démonstration de la courbure des ressorts*, lemme 4 (*Académie des Sciences*, 1705, ou *Jacobi Bernoullii opera omnia*, tome II, page 976).

des constructions [*], rectifia cette erreur d'évaluation, et que plaçant, comme Mariotte et Bernoulli, la *ligne des fibres invariables* au milieu de la hauteur de la section supposée rectangulaire, il établit sur un lemme évident de statique le principe qui doit servir à la détermination de cette ligne pour les sections de toutes les formes, savoir *la nullité de la somme algébrique totale des résistances longitudinales des fibres* du prisme qui n'est sollicité que transversalement; et il donna une valeur exacte de la somme de leurs moments, valeur moitié moindre que celle à laquelle étaient arrivés Mariotte par une supputation erronée, et Leibnitz par la supposition que les fibres invariables se trouvaient réellement à la partie inférieure de la section [**].

Coulomb remarque très-bien, au reste, que, si la matière du prisme ne suit pas jusqu'à l'instant de sa rupture la loi de proportionnalité des efforts aux dilatations et compressions, l'axe final de rotation pourra se trouver ailleurs qu'au milieu de la section, mais il repousse l'opinion qu'il puisse être au bas, par cette raison péremptoire qu'une ligne sans épaisseur ne saurait supporter à elle seule une pression finie.

C'est dans notre siècle seulement que son Mémoire, qui contient sur ce sujet tant de choses dans les trois pages intitulées *Remarque sur la rupture*, a été enfin étudié et compris. Encore ne l'a-t-il été que peu à peu, car Duleau [***], en donnant la même expression que Coulomb pour la somme des moments des résistances, et en plaçant de la même manière la ligne des fibres invariables pour le prisme à section rectangulaire, détermine en général la situation de cette ligne par la condition « que la somme des moments des résistances aux compressions » soit égale à la somme des moments des résistances aux extensions », principe faux qui lui assignerait une situation très-différente de la véritable pour les sections qu'elle ne partagerait pas en deux moitiés

[*] *Essai sur une application des règles de maximis et de minimis à quelques problèmes relatifs à l'architecture. Savants étrangers*, année 1773 (tome publié en 1776).

[**] *Demonstrationes novæ de resistantiâ solidorum. Acta Eruditorum Lipsiæ*, 1784, page 319. Leibnitz cite Mariotte dont les recherches étaient déjà connues, mais dont le livre n'était pas publié.

[***] *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*; 1820, pages 2 et 3.

symétriques. M. Barlow, en Angleterre, faisait la même confusion [*] avouée ingénument et rectifiée par lui dans son dernier ouvrage sur la force des matériaux [**] en citant M. Hodgkinson comme l'ayant signalée [***]. Et son habile et savant compatriote, M. Tredgold, en mettant comme lui et comme Coulomb *l'axe neutre* en question à sa vraie place pour les sections rectangulaires, imaginait un principe singulier [****] pour en déterminer la position dans les sections d'une autre forme, sans comprendre encore le principe si simple invoqué par Coulomb, de l'équilibre nécessaire des forces décomposées dans une même direction parallèle aux fibres.

Mais Navier, après avoir pendant quelque temps placé les fibres invariables avec Galilée, Leibnitz et M. Girard [*****] au bas de la section [*****], et s'être livré à diverses considérations compliquées [*****] auxquelles il a dû bientôt renoncer, a donné enfin, dans ses leçons de 1824, imprimées à mesure et publiées en 1826 [*****], et conformément au principe de Coulomb, la théorie aujourd'hui adoptée de la résistance des solides, non-seulement à la rupture par flexion, mais encore à la simple flexion sans rupture, dont l'illustre physicien Th. Young avait, en 1807 [*****], présenté les formules pour les cas les plus simples, et qui avait été ensuite le sujet d'une

[*] *An Essay on the Strength and Stress of timber*, 1817, art. 120.

[**] *A Treatise on the Strength of timber, cast iron, etc.*, 1837, art. 40.

[***] Tome IV des *Mémoires de Manchester*, nouvelle série.

[****] *Essay on the Strength of cast iron*, art. 85, et *Elementary principles of Carpentry*.

[*****] *Traité analytique de la résistance des solides*, 1798, pages 2, 5 et 7.

[*****] *Notes sur la Science des ingénieurs*, de Belidor, 1818; et *Lithographie des premières leçons* (1819-1820) faites à l'École des Ponts et Chaussées.

[*****] Notes sur le *Traité de la construction des ponts* de Gauthey, 1819.

[*****] *Résumé des leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*.

[*****] *A Course of lectures on natural Philosophy*, vol. II, sect. IX. Ces formules ont été reproduites par le Dr Robison, article *Strength of materials* de l'*Encyclopédie britannique*.

grande partie des belles expériences de Duleau et de M. Dupin [*].

Navier montra en même temps (ce que Young avait indiqué en passant) le vrai parti qu'on peut tirer des formules de flexion pour prévenir les chances de *rupture éloignée*, en limitant convenablement les dilatations ou les efforts qui alors ne cessent pas d'être soumis à peu près aux lois d'élasticité et de proportionnalité sur lesquelles ces formules se fondent, en sorte qu'il n'est pas nécessaire de placer finalement l'axe de rotation ailleurs que dans la situation où il se trouve pendant les petites flexions.

Nous ne parlons pas ici des autres services rendus à la même branche de la Mécanique par cet homme éminent qui le premier, en 1821 [**] ou dans le temps même de ses incertitudes sur la manière de présenter la théorie approximative de Mariotte et Coulomb, fondait la théorie rigoureuse et complète en donnant les équations générales de l'équilibre et du mouvement intérieur des solides élastiques, sur lesquelles on doit baser désormais toute recherche exacte des changements de forme que leur font subir des forces quelconques, en y ajoutant la théorie des pressions ou tensions intérieures, introduites par M. Cauchy en 1822 [***] et considérées aussi, peu après, par M. Poisson [****] ainsi que par MM. Lamé et Clapeyron qui, alors en mission hors de France, paraissent n'avoir pas eu connaissance des travaux antérieurs lorsqu'ils ont présenté leur beau Mémoire de 1828 [*****], dont une partie est reproduite par M. Lamé dans ses lumineuses leçons sur l'élasticité [*****].

[*] Expériences sur la force des bois. *Journal de l'École Polytechnique*, 17^e cahier, 1815.

[**] Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des solides élastiques, lu le 14 mai 1821. *Mémoires (nouv.) de l'Institut*, tome VII, 1827, et *Société Philomathique*, 1823.

[***] *Société Philomathique*, janvier 1823, page 10; et ensuite, *Exercices de Mathématiques*, tome II, 1827.

[****] Mémoire sur les corps élastiques, lu le 14 avril 1828, et inséré au tome VIII de *l'Institut*.

[*****] Mémoire sur l'équilibre intérieur des solides homogènes. *Savants étrangers*, 1829, et *Journal de Crelle*.

[*****] *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 1853

2. *Théorie, actuellement adoptée, de la flexion due aux dilatations longitudinales inégales des fibres. — Hypothèses sur lesquelles on la fonde ordinairement, et qui ne sont pas, dans ce qu'elles ont d'inexact, nécessaires pour en établir les formules.*

Cette théorie enseignée généralement, et dont les résultats sont assez bien confirmés par l'expérience dans les cas les plus habituels, est ordinairement présentée en partant de ces deux hypothèses : 1° que les sections planes faites avant la flexion perpendiculairement aux arêtes des prismes, restent, après, *encore planes et normales* à ces arêtes et aux fibres ou éléments longitudinaux devenus courbes ; 2° que ces fibres, les unes allongées, les autres accourcies, *résistent d'une manière indépendante*, comme feraient de petits prismes isolés ou n'exerçant les uns sur les autres aucune action.

Il résulte de la première que les petites portions de fibres comprises entre les deux sections très-voisines et toutes égales avant la flexion, *ont ensuite des longueurs proportionnelles à leurs rayons* ou à leurs distances à la ligne suivant laquelle les plans de ces sections se coupent, en sorte qu'en appelant

- ρ la distance, à cette ligne, des fibres *invariables* ou restées de même longueur qu'auparavant, distance nécessairement la même pour toutes ;
- $\rho + z$ celle d'une fibre quelconque, z pouvant être positif ou négatif ;
- δ la *dilatation* de cette même fibre, ou la proportion de son extension positive ou négative ;
- p la force de sa *tension* par unité superficielle de sa petite section transversale ;
- E le rapport constant, dit coefficient ou module d'élasticité, des tensions aux petites dilatations, pour la matière dont le prisme est composé, *quand il n'y a pas d'action latérale* ;

on a, pour le rapport de la nouvelle longueur de la fibre quelconque à son ancienne longueur, la même que la longueur actuelle des fibres qui n'ont pas varié,

$$\frac{\rho + z}{\rho} = 1 + \frac{z}{\rho},$$

ce qui donne pour la dilatation de cette fibre :

$$(1) \quad \delta = \frac{z}{\rho}; \quad \text{d'où (d'après la deuxième hypothèse)} \quad p = E \frac{z}{\rho}.$$

Ces deux hypothèses, telles que nous venons de les énoncer avec tout le monde, *sont fausses*, excepté dans le cas rare où la flexion s'opère d'une manière *égale* ou en arc de cercle, sous l'action de forces faisant couples à chaque bout; car lorsque, comme à l'ordinaire, les forces extérieures agissant à une extrémité d'un prisme pour le fléchir ont une résultante transversale P qui rend nécessairement la flexion inégale d'un bout à l'autre, l'équilibre d'une portion quelconque du prisme de ce côté exige qu'il se développe à travers la section ω , qui la sépare du reste, des actions intérieures aussi transversales, ayant la même résultante P [*], ce qui ne peut être qu'autant que les sections s'infléchissent et cessent d'être partout normales aux fibres qui, par suite, *glissent* aussi un peu l'une devant l'autre, et exercent mutuellement *une sorte de frottement* ou d'entraînement longitudinal qui exclut l'indépendance absolue.

Mais, malgré ces circonstances, les formules (1) peuvent être justes, 1° si les sections du prisme *se courbent et s'inclinent toutes également* sur les fibres, car les portions de fibres qu'elles interceptent éprouvent les mêmes dilatations que celles qui seraient comprises entre des plans restés normaux; 2° si le rapport $\frac{P}{\delta}$ des tensions aux dilatations des fibres ne dépend nullement de leurs actions *longitudinales* analogues aux frottements, car il suffit alors *qu'elles ne se pressent point normalement à leurs longueurs* pour que ce rapport soit égal à E comme si elles étaient entièrement isolées ou indépendantes.

Or les formules fondamentales (1),

$$\delta = \frac{z}{\rho}, \quad p = E \frac{z}{\rho},$$

si l'on peut ainsi les légitimer, conduisent facilement à la détermination des diverses particularités de la flexion, ou du moins de tout ce qui dépend des inégalités des dilatations longitudinales et non des petites

[*] Leur existence n'avait pas échappé à Coulomb (*Mémoire* cité de 1773, art. VII, page 350); et M. Vicat a appelé sur elles l'attention d'une manière particulière en appelant *force transverse* leur résultante (*Recherches sur les phénomènes qui précèdent la rupture, etc.*; *Annales des Ponts et Chaussées*, 1833, 2^e semestre).

inclinaisons ou *glissements* dont les grandeurs doivent être autrement cherchées : car si l'on nomme

$d\omega$ l'élément de la section ω d'un prisme $A\omega B$, ou la base d'une quelconque de ses fibres, regardée comme un prisme très-délié;

M le moment total, autour de la *ligne des fibres invariables* tracée sur cette même section, des forces extérieures qui font fléchir et qui agissent sur la partie ωB du prisme, *forces qui sont supposées d'abord n'avoir aucune somme de composantes dans le sens longitudinal* ou des fibres;

l'équilibre de la partie ωB , sollicitée d'un côté par ces forces extérieures, de l'autre par les tractions $pd\omega$ qu'exerce sur elle, au moyen des fibres, l'autre partie $A\omega$ du prisme, exige, ainsi que l'a remarqué Coulomb, que ces forces longitudinales $pd\omega$ aient une somme nulle comme les forces extérieures décomposées dans leur sens, ou que $\int \frac{E}{\rho} z d\omega = 0$; et il faut aussi que la somme $\int pd\omega \cdot z = \int \frac{E}{\rho} z^2 d\omega$ des moments des mêmes forces autour de la ligne des fibres invariables soit égale à M , d'où ces deux égalités qui sont, avec celles (1), comme le résumé de deux siècles d'efforts et de tâtonnements des savants les plus illustres,

$$(2) \quad \int z d\omega = 0, \quad \frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega = M.$$

La première montre que la ligne des fibres invariables, perpendiculaire au plan de flexion, *passé par le centre de gravité de la section ω* .

La seconde sert à déterminer la courbure $\frac{1}{\rho}$, et, par suite (quand l'effet des glissements dont on vient de parler est négligeable) les formes diverses de l'axe fléchi du prisme, formes qui ont pu déjà être déterminées, quant à la théorie, par Jacques Bernoulli [*], Euler [**] et Lagrange [***] sans connaître encore le vrai dénominateur $E \int z^2 d\omega$, et qui ont été de la part de Navier, et sont, encore aujourd'hui, l'objet

[*] *Curvatura laminæ elasticæ. Acta Eruditorum Lipsiæ*, 1694, ou *Opera omnia*, tome I, page 576. Et *Véritable hypothèse*, etc., cité plus haut.

[**] *Methodus inveniendi lineas, etc. Additamentum de curvis elasticis*, 1744; et divers autres écrits d'Euler.

[***] *Sur la figure des colonnes*, anciens Mémoires de Turin, I^{er} vol., 1770-1773.

de nombreuses et utiles recherches faites au point de vue des applications pour des modes variés d'agir des forces extérieures, dont les intensités et les directions ne sont données souvent que d'une manière implicite.

La même seconde équation (2) écrite

$$M = \frac{E \int z^2 d\omega}{z} \gamma \quad \text{ou} \quad M = \frac{\int z^2 d\omega}{z} p,$$

susceptible, sous cette dernière forme, d'être démontrée sans parler de ρ ni de E , en admettant seulement que la tension p des fibres varie linéairement avec z , est une généralisation de celle de Coulomb relative au seul prisme rectangle, et sert à déterminer le moment M d'après la limite que l'expérience a pu fournir pour les valeurs qui peuvent être données à p sans danger de rupture, même éloignée. Mais il faut observer que l'on n'obtient pas ainsi la vraie condition de résistance, car les glissements ou inclinaisons de fibres ou de sections dont nous avons parlé, et que ces équations n'embrassent pas, amènent de petits écartements moléculaires obliques qui se combinent avec les dilatations longitudinales γ pour produire, dans des sens différents, des dilatations un peu plus grandes, et c'est à ces dilatations résultantes, et non à $\gamma = \frac{p}{E}$, qu'il convient d'imposer une limite.

On doit observer aussi, comme a fait M. Persy [*], que la flexion ne peut s'opérer dans le plan du moment principal des forces extérieures qu'autant que ce *plan de sollicitation à fléchir* se trouve parallèle à l'un des deux axes principaux d'inertie de la section ω . Dans tout autre cas, on ne peut pas se servir de l'équation ci-dessus des moments autour d'une ligne perpendiculaire au *plan de flexion* qui n'est point donné; et nous avons fait voir ailleurs [**] que la question se résout alors en posant *deux* équations des moments, savoir une autour de chacun des deux axes d'inertie de ω .

Mais nous avertissons que, dans tout ce qui suivra, nous ne suppo-

[*] *Cours* (lithographié) à l'École d'application de Metz, 4^e édit. (1834), art. 42, 43.

[**] *Comptes rendus de l'Académie*, 30 octobre et 6 novembre 1843, tome XVII, pages 946 et 1024. — *Mémoire* (cité plus loin) *sur la torsion*, art. 42. — *Société Philomathique*, 8 juillet 1854, ou journal *l'Institut*, 15 novembre, n° 1089.

serons pas cette dernière circonstance. Nos sections auront toujours un de leurs axes principaux parallèle au plan de sollicitation, qui, ainsi, se confondra constamment avec le plan de flexion.

3. *Objet et sommaire de ce Mémoire.*

Nous nous sommes donc proposé de rechercher, par une analyse rigoureuse, si les deux formules fondamentales (1) de la théorie connue de la flexion, malgré ce que nous avons signalé de faux dans la manière ordinaire de les établir, peuvent être vraies, quand ce ne serait que pour des modes déterminés d'application et de distribution, aux extrémités des prismes, de forces ayant une résultante et un moment donnés quelconques et capables ainsi de produire une flexion quelconque *égale* ou *inéga*le d'un bout à l'autre; d'apprécier en même temps les circonstances omises par cette théorie, telles que les glissements relatifs des sections voisines ou des fibres contiguës, ou la courbure que les sections acquièrent; en un mot, de résoudre complètement et exactement le problème de la flexion, tout au moins pour les modes de sollicitation qui donnent des résultats d'une forme simple, servant de limite aux résultats compliqués des autres modes d'application et de distribution des mêmes forces extérieures, en sorte qu'on puisse approximativement les substituer à ceux-ci dans la plupart des cas.

Pour cela, nous démontrons d'abord (art. 4 à 9) d'une manière élémentaire et géométrique autant que nous pouvons, les formules des pressions dans les solides élastiques, les relations d'égalité qui nous paraissent exister toujours (art. 7) entre leurs coefficients, les changements de leurs plans (art. 8), et les équations différentielles tant indéfinies que définies (art. 10, 11) qui lient les déplacements des points aux forces extérieures.

Comme les difficultés encore insurmontées de leur intégration pour des forces données disparaissent quand ce sont les déplacements qu'on se donne, et se trouvent considérablement amoindries lorsqu'on prend pour données, à la fois, une partie des forces et une partie des déplacements ou de leurs relations mutuelles en recherchant le reste, c'est cette marche mixte, particulièrement propre à la question énoncée, que nous suivons comme nous avons fait ailleurs [*].

[*] Principalement à un Mémoire *Sur la torsion des prismes, avec des considérations*

Après l'avoir appliquée (art. 12) au cas de l'extension simple, et avoir rappelé (art. 13) une solution directe, mais simplement approximative du cas de la flexion, proposée par deux illustres géomètres, et qui a servi de point de départ à nos recherches, nous posons (art. 14) les données de notre problème mixte sur le même sujet, et nous reconnaissons, par une première et facile intégration (art 16), que sa solution se ramène à celle d'une équation aux différences partielles du second ordre avec une condition définie exprimant qu'aucune pression n'agit longitudinalement sur la surface latérale des prismes.

La deuxième intégration s'effectue en quelque sorte d'elle-même lorsque le contour a certaines formes (art. 18), en nombre infini, représentées par une équation algébrique quadrinôme dont l'un des termes peut avoir tous les degrés positifs possibles entiers ou fractionnaires. Les déplacements des points du prisme, les dilatations et glissements, la flèche de flexion complétée par la mise en compte de ceux-ci, les composantes de pression intérieure ou extérieure donnant le mode de distribution des forces qui font fléchir, les ordonnées des surfaces légèrement courbes dans lesquelles se sont changées les sections primitivement planes, ont alors (art. 19 à 25) des expressions aussi algébriques entières et même ne s'élevant pas au delà du troisième degré; et l'on peut facilement, par une suite de coupes équidistantes, tracer la topographie complète de ces surfaces, dont chacune est commune à une multitude de contours d'un même degré quelconque et au nombre desquels se trouve (si ce degré entier ou frac-

sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément, lu le 13 juin 1853, in-4°, 1855; ou Savants étrangers, tome XIV.

Nous renvoyons à ce Mémoire pour la manière de faire servir les résultats principaux de celui-ci, ou de combiner les glissements latéraux g , une fois déterminés, avec les dilatations longitudinales $\partial = \partial_0 + \frac{z}{\rho}$, dont la théorie ordinaire tient compte seulement, pour avoir les plus grandes dilatations obliques (le plus souvent exprimées par la formule $\frac{3}{8}\partial + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\partial\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}$, donnée déjà en 1837 dans un cours lithographié, et aux *Comptes rendus*, tome XVII, page 948), et pour en déduire les conditions de résistance à la rupture, dont nous ne nous occuperons pas de nouveau aujourd'hui.

tionnaire reste entre 2 et 4) un cercle ou une ellipse qu'on obtient en annulant le coefficient du terme qui donne à l'équation du contour ce degré au-dessus de 2. Les coupes dont nous parlons se réduisent à des droites parallèles, et, par conséquent, la surface courbe de la section à un cylindre à base de doucine parabolique du troisième degré lorsque (art. 23) l'équation du contour est du degré 9 traité comme pair $= \frac{18}{2}$; et ce contour courbe, si la dimension perpendiculaire n'excède pas la dimension parallèle au plan de flexion, diffère peu d'un contour rectangulaire à angles arrondis (art. 18).

Mais lorsque la section est rectangulaire, la dernière intégration peut se faire encore exactement au moyen de séries transcendentes précédées de quelques termes algébriques, après avoir transformé convenablement (art. 24, 25) les deux équations dans lesquelles se partage la condition définie. On peut, si l'on se contente d'approximations, effacer ces séries, et l'on peut d'ailleurs calculer des Tables numériques, en conservant ces mêmes séries pour diverses valeurs du rapport des deux dimensions de la base du prisme parallépipède.

Ces exemples, outre l'intérêt pratique qu'offre l'évaluation de ce que les formules connues de la flexion ne comprennent pas, suffisent pour convaincre, si l'on ne se contentait pas de la seule inspection des équations qu'on ne sait pas toujours intégrer, et d'une comparaison tirée de la théorie de la chaleur (art. 30) qu'il existe toujours, quelle que soit la forme du contour de la section, des modes de distribution des forces extérieures sur les bases extrêmes, pour lesquelles ces formules admises donnent *exactement* les dilatations et tensions longitudinales et la courbure qui en provient.

En sorte que l'on peut continuer de se servir de ces formules connues quand les prismes sont assez longs par rapport aux dimensions de leurs bases pour que les glissements aient peu d'influence, ainsi que ce qui peut résulter des différences entre le mode effectif d'application et de distribution des forces vers les extrémités et le mode tendant à s'établir, à l'intérieur, aux points qui s'en éloignent; de même que dans les questions où un état varié dépend du temps au lieu de dépendre de la distance, cet état devient de plus en plus indépendant des circonstances initiales et plus approché d'un état permanent (art. 32).

Enfin nous tâchons de donner (art. 31) une démonstration directe et sans analyse, et pourtant rigoureuse, des formules de la flexion. Si elle excède un peu en longueur celle que l'on fonde ordinairement sur des hypothèses non justifiées et même inexactes, il faut considérer qu'elle embrasse forcément plusieurs particularités essentielles à enseigner aussi, savoir les contractions latérales qui accompagnent les dilatations longitudinales, et les glissements qui accompagnent les flexions inégales. On peut donc, dans les cours qui ne comportent pas l'exposition analytique de la théorie de l'élasticité, démontrer ces formules, et ce qui doit les compléter, sans déroger aux habitudes mathématiques par un mélange de principes rationnels et de suppositions gratuites dont on ne peut pas même prouver l'approximation.

4. *Démonstration succincte des formules des pressions à l'intérieur des solides élastiques. — Relations entre les pressions en divers sens au même point.*

Nous appelons *pression*, sur un des deux côtés d'une petite face plane imaginée à l'intérieur d'un pareil corps, *la résultante de toutes les actions des molécules situées de ce côté sur les molécules du côté opposé, et dont les directions traversent cette face*; en la regardant comme positive lorsqu'elle est attractive (ou qu'elle constitue, à proprement parler, une *tension* ou une traction).

Il s'ensuit que la résultante des actions exercées sur les molécules d'un élément polyédrique de la part des molécules qui lui sont extérieures, peut être remplacée identiquement par la résultante des pressions sur toutes ses faces; car si les pressions comprennent, en outre, des actions de molécules extérieures sur d'autres molécules extérieures suivant des lignes qui traversent deux des faces, ces actions étrangères se détruisent deux à deux en composant la résultante générale.

Il suit de la même définition que la pression sur une petite face A est résultante des pressions supportées par ses trois projections X, Y, Z sur trois plans rectangulaires passant par son centre. En effet, les nombres et les intensités totales d'actions moléculaires qui s'exercent parallèlement à une même ligne droite quelconque *l* à travers diverses faces très-petites ayant le même centre, est évidemment proportionnelle

aux superficies des projections de ces faces sur un même plan P perpendiculaire à la droite l : or la projection de A sur tout plan P a une superficie égale à la somme des superficies des projections de X, Y, Z sur le même plan ; donc, comme les pressions résultent de la composition des actions qui s'exercent ainsi dans toutes les directions, celle sur S est la même chose que celles sur X, Y, Z composées ensemble.

Ce théorème de M. Cauchy est dit des *projections de plans de pression*.

Il suit encore de la même définition et de la même remarque que si l'on appelle

$$p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}; \quad p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}; \quad p_{zx}, p_{zy}, p_{zz};$$

les composantes, suivant les x, y, z , des pressions supportées en un même point par l'unité superficielle de trois petits plans perpendiculaires à ces coordonnées rectangles, et ayant le même centre de gravité, la première sous-lettre indiquant le plan par sa normale, et la seconde le sens de décomposition, l'on a :

$$(3) \quad p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}.$$

En effet, les nombres et les intensités totales d'actions moléculaires s'exerçant parallèlement à une même droite quelconque l à travers deux petites faces, *supposées égales en superficie*, et perpendiculaires respectivement à y et à z , sont comme leurs projections sur un même plan perpendiculaire à l , c'est-à-dire comme $\cos(l, y)$ et $\cos(l, z)$. Ces mêmes intensités totales d'actions étant décomposées, la première dans le sens z , la seconde dans le sens y , donneront $\cos(l, y) \cos(l, z)$ et $\cos(l, z) \cos(l, y)$, ou la même chose. Donc comme les pressions résultent de la composition des actions semblables pour toutes les directions l , on voit que la pression sur la première petite face, décomposée perpendiculairement à la seconde, a la même intensité que la pression sur la seconde, décomposée perpendiculairement à la première, ce qui donne bien $p_{yz} = p_{zy}$, et ainsi de même des quatre autres composantes analogues.

C'est le théorème de *réciprocité des composantes tangentielles*, également dû à M. Cauchy.

5. *Suite. — Dilatations, glissements : forme linéaire des expressions des composantes de pression.*

Quant aux relations que les composantes *normales* p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , et les composantes *tangentielles* p_{yz} , p_{zx} , p_{xy} des pressions développées dans un corps élastique, par les déplacements relatifs de ses points, peuvent avoir avec ces déplacements, imaginons par un même point m de ce corps trois petites lignes matérielles mx , my , mz , primitivement parallèles aux coordonnées rectangulaires, et changées par les déplacements en trois lignes légèrement obliques entre elles m_1x_1 , m_1y_1 , m_1z_1 . Appelons

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z,$$

les *dilatations* éprouvées par ces petites lignes, ou les proportions supposées très-petites de leurs allongements positifs ou négatifs, et désignons par

$$g_{yz}, g_{zx}, g_{xy},$$

les petites inclinaisons qu'elles ont prises les unes sur les autres, ou les rétrécissements éprouvés par leurs trois angles, et qui ne sont autre chose que les cosinus des angles actuels $y_1m_1z_1$, $z_1m_1x_1$, $x_1m_1y_1$, supposés devenus légèrement aigus lorsque l'on prend positivement les quantités g ; quantités que nous appellerons *glissements*, parce que celle g_{yz} , par exemple, mesure de combien auront glissé l'une devant l'autre les lignes matérielles parallèles soit aux y , soit aux z , situées à l'unité de distance dans des plans parallèles à celui yz .

Il est clair que ces trois dilatations et ces trois glissements, supposés connus, et sensiblement les mêmes dans toute une petite étendue autour du point m , donnent tout ce qu'il faut pour déterminer les changements de distance et de situation relative des points environnants, (comme on le verra bien d'ailleurs par les expressions (6) ci-après). Par conséquent, les composantes p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} , p_{zx} , p_{xy} des pressions, si, comme on le suppose, elles étaient nulles avant ces changements, sont fonctions de $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$.

Dans ces fonctions, les six quantités très-petites ∂, g doivent entrer toutes avec les mêmes exposants, car elles peuvent décroître indéfiniment à la fois, sans cesser d'avoir le même ordre de grandeur et d'in-

fluence sur les déplacements relatifs et sur les pressions. Et comme il y a d'assez nombreuses expériences où, quelques-unes étant nulles, les pressions ont été trouvées simplement proportionnelles aux autres (*ut extensio sic vis*), toutes ces fonctions doivent être linéaires.

6. *Suite. — Attractions et répulsions, fonctions des distances moléculaires. Théorème de composition géométrique correspondante des forces et des petits déplacements.*

Cette forme linéaire des composantes de pressions se prouve également si, au lieu d'invoquer des expériences particulières dont l'interprétation peut donner lieu à discussion, l'on part d'un principe général que l'expérience aussi a révélé, et sur lequel nos définitions mêmes sont basées, savoir : « que les points matériels exercent les uns sur les autres, à des distances insensibles, des actions attractives et répulsives, qui sont fonctions continues de ces distances. » Et l'on peut, en s'en servant, trouver en même temps les relations qui peuvent exister entre quelques-uns des trente-six coefficients des formules exprimant les six composantes p en fonction des γ et des g .

En effet, on déduit d'abord du principe énoncé, ce théorème souvent applicable : *Que la pression due à de petits déplacements résultants de plusieurs autres est elle-même résultante des pressions qui seraient dues séparément aux déplacements composants.* Car si, par une translation et une rotation générales, ne changeant rien aux déplacements relatifs qui seuls produisent les actions moléculaires et les pressions, on ramène la petite portion de corps considérée à avoir ses points très-proches de leurs premières situations, et leurs lignes de jonction actuelles à prendre des directions extrêmement peu différentes de celles des anciennes, on verra facilement, en projetant celles-ci sur celles-là, que les petits changements de longueur de ces lignes, dus aux déplacements totaux ou résultants, sont sommes algébriques des changements dus aux déplacements partiels ou composants. Or les actions moléculaires développées sont proportionnelles à ces changements, en vertu de la *continuité* supposée des fonctions qui en mesurent l'intensité. Donc les pressions, résultantes des actions moléculaires dues aux déplacements totaux, sont aussi résultantes des pressions

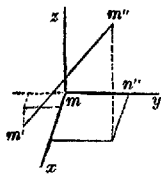
qui seraient produites par les actions dues aux déplacements partiels[*].

Réciproquement, comme les pressions intérieures font équilibre aux forces extérieures, les petits déplacements produits par plusieurs de celles-ci sont résultants géométriques de ceux dus à chacune.

Or il en résulte bien qu'en imprimant aux points des déplacements équivalant à deux, à trois, ..., autres déplacements qui donnaient, chacun, la même grandeur aux ∂_x , et zéro pour les ∂_y , ∂_z , g_{yz} , g_{zx} , g_{xy} , on aura pour p_{xx} , pour p_{yy} , etc., deux fois, trois fois, ..., ce qui était produit par les déplacements partiels; et que, par conséquent, ces six composantes varient linéairement avec ∂_x . Et, comme on en peut dire autant de chacun des autres ∂ ou g , supposés successivement exister seuls, on voit que les composantes de pression qui ont lieu lorsqu'ils existent tous, sont fonctions linéaires de ces dilata-tions et glissements.

7. Suite. — *Nombre des coefficients essentiellement différents.*
Leur réduction de trente-six à quinze.

Pour connaître les grandeurs relatives des trente-six coefficients qui multiplient ces six quantités ∂ et g dans les expressions des six composantes p , considérons d'abord un cas simple où ∂_x , ∂_z , g_{yz} , g_{zx} soient nuls et ∂_y , g_{xy} constants, en sorte que, par tout le corps, les plans matériels perpendiculaires aux y se soient écartés les uns des autres dans une même proportion ∂_y de leurs distances primitives et aient en même temps tourné tous d'un petit angle constant g_{xy} autour



de lignes parallèles aux z , suivant lesquelles ils coupent un même plan ymz perpendiculaire aux x . La ligne de jonction r de deux molécules quelconques m' , m'' , qui est supposée avoir, avant les déplacements, des projections x , y , z parallèlement aux coordonnées de même nom, aura, après les déplacements, les mêmes projections x , z ; mais sa projection y sur les y sera augmentée de $y\partial_y$ à cause des écartements proportionnels ∂_y , et de xg_{xy} à cause des rotations g_{xy} , ce

[*] Ce théorème, ainsi démontré, se trouve à des feuilles lithographiées d'un cours de Mécanique fait en 1837-1838 à l'École des Ponts et Chaussées, art. 12, et il en a été donné de nombreuses applications aux art. 71 à 81 des mêmes feuilles.

qui donnera, en projetant sur la ligne r , une augmentation $(y\partial_y + xg_{xy})\frac{y}{r}$ de cette distance $m'm''$ des deux molécules. Il en résultera, R étant une fonction de r , une action mutuelle $R(y\partial_y + xg_{xy})\frac{y}{r}$ développée entre ces deux mêmes molécules m', m'' par les déplacements. Si ces molécules sont du nombre de celles situées de part et d'autre d'une face plane perpendiculaire aux x et ayant une superficie A très-petite, on aura les composantes $A p_{xx}$, $A p_{xy}$ de la pression qui s'exerce à travers cette petite face en prenant les sommes $\sum$ de toutes ces actions décomposées successivement dans les sens x et y , ou multipliées par les cosinus des angles de r avec les x et y , cosinus égaux à $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ à cela près de quantités qui ne donneraient que des produits très-petits du second ordre et négligeables.

Il en résulte

$$p_{xx} = \frac{\partial_y}{A} \sum \frac{R}{r^2} xy^2 + \frac{g_{xy}}{A} \sum \frac{R}{r^2} x^2 y, \quad p_{xy} = \frac{\partial_y}{A} \sum \frac{R}{r^2} y^3 + \frac{g_{xy}}{A} \sum \frac{R}{r^2} xy^2.$$

D'où l'on voit que le coefficient de ∂_y dans p_{xx} est égal au coefficient de g_{xy} dans p_{xy} .

La même égalité aura lieu si ∂_x , ∂_z , g_{yz} , g_{zx} ne sont pas nuls, en vertu du principe (article précédent) de composition des pressions dues à divers déplacements composants. Elle aura lieu encore si ∂_y et g_{xy} , au lieu d'être constants par tout le corps solide, sont variables; car on suppose toujours qu'ils varient fort peu dans l'étendue des petites portions de ce corps où s'exercent, à des distances insensibles, les actions qui composent les pressions.

On en déduira, en changeant simplement les lettres ou les directions, que le coefficient de g_{xy} dans p_{yx} sera le même que celui de ∂_x dans p_{yy} , et que, par conséquent, celui-ci est le même que le coefficient de ∂_y dans p_{xx} , puisque, comme nous savons, p_{yx} est la même chose que p_{xy} et doit avoir les mêmes coefficients.

On reconnaîtra d'autres égalités en variant les sens et en invoquant encore le principe $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{zx} = p_{xz}$, $p_{xy} = p_{yx}$.

D'où l'on peut conclure que si l'on désigne les divers coefficients par une même lettre a avec les deux sous-lettres de la composante de pres-

sion à laquelle ils appartiennent, suivies des sous-lettres de la dilatation ou du glissement qu'ils affectent, en doublant, pour la symétrie, celles des dilatations, ou si l'on écrit

$$(4) \quad \begin{cases} p_{xx} = a_{xx.xx} \partial_x + a_{xx.yy} \partial_y + a_{xx.zz} \partial_z + a_{xx.yz} g_{yz} + a_{xx.zx} g_{zx} + a_{xx.xy} g_{xy} \\ p_{yy} = a_{yy.xx} \partial_x + \dots, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} = \text{des expressions analogues,} \end{cases}$$

les coefficients ayant les mêmes quatre sous-lettres seront égaux, quel que soit l'ordre où elles s'y trouvent placées, ce qui réduit les trente-six coefficients de ces formules à quinze distincts [*].

Si dans cette démonstration nous avons négligé l'influence des actions moléculaires primitives, en n'attribuant les pressions qu'aux actions nouvelles, développées par les déplacements, c'est pour simplifier et parce qu'il est facile de voir que ces actions anciennes disparaissent quand on suppose les pressions primitives nulles.

Ce qui précède suppose, au reste, que les déplacements varient, d'une molécule à l'autre, d'une manière simple et continue, ou que, s'il en est autrement, à cause de la grande diversité et de la complication des arrangements des molécules et de leurs actions en divers sens, on puisse remplacer les déplacements individuels des molécules par les déplacements moyens de leurs groupes, qui doivent varier d'une manière plus régulière ou moins compliquée vu la compensation des écarts en divers sens. La possibilité de cette substitution

[*] C'est à M. Cauchy que l'on doit ce théorème, comme la plus grande partie de la théorie des pressions. Il l'a donné en faisant quelques suppositions et substitutions dont la démonstration élémentaire que nous venons d'en donner se trouve dégagée.

Si, aux pages 222 du tome III et surtout 138 du tome IV de ses *Exercices* (1828 et 1829), il semble qu'il y a vingt et un coefficients au lieu de quinze, c'est que M. Cauchy suppose, à ces deux endroits, qu'il existait déjà dans l'état primitif des pressions dont les six composantes sont précisément les six coefficients supplémentaires.

Les termes de $p_{xx}, p_{yy}, \dots$, où entrent ces pressions *primitives* ou antérieures aux déplacements qui ont produit les dilatations ∂ et les glissements g , s'obtiennent facilement en se servant d'un théorème qui se trouve démontré d'une manière élémentaire à une *Note sur les pressions*, insérée à la date du 7 juillet 1845 aux *Comptes rendus*, tome XXI, page 24. Ils sont habituellement négligeables dans les questions relatives aux corps solides, mais il faut en tenir compte dans la théorie de la lumière et dans celle du son, vu que les forces déjà en jeu dans l'état d'équilibre des fluides élastiques qu'on y considère peuvent avoir une influence comparable ou même supérieure à celle des forces que l'ébranlement seul développerait dans le cas de nullité de celles-là.

est accordée généralement et ne paraît pas douteuse pour les corps à cristallisation confuse, *les seuls dont on se serve comme matériaux* ; mais elle est, jusqu'à un certain point, contestable, comme l'a remarqué M. Cauchy, pour des corps régulièrement cristallisés dont les petits assemblages atomiques, tous semblables, tourneraient semblablement sur eux-mêmes lorsqu'on déforme l'ensemble de manière à amener certaines concordances de périodicité qui s'opposeraient à l'exacte compensation des écarts en plus et en moins. Bien que nous ne pensions pas que cette circonstance, si elle a lieu, doive avoir une influence sensible, et quoiqu'elle ne puisse regarder que des corps dont nous n'aurons pas à nous occuper dans ce Mémoire, comme les doutes dont le principe de l'égalité du coefficient de g_{xy} dans p_{xy} à celui de γ_y dans p_{xx} a été l'objet ne sont pas encore levés pour tout le monde, nous conserverons le plus souvent l'indépendance aux trente-six coefficients, ce qui, comme l'a remarqué M. Lamé, ne rend pas ordinairement plus compliquées les solutions analytiques des problèmes.

8. *Suite. — Changement des axes et des plans pour lesquels on prend les pressions, les dilatations et les glissements.*

On a fait voir (art. 4) qu'une petite face A, perpendiculaire à une droite quelconque r , supporte une pression résultante de celles qui s'exercent à travers ses projections $A \cos \widehat{rx}$, $A \cos \widehat{ry}$, $A \cos \widehat{rz}$ sur trois plans perpendiculaires aux coordonnées x, y, z . La pression sur la première projection, par exemple, a pour composantes $A \cos \widehat{rx} \cdot p_{xx}$, $A \cos \widehat{rx} \cdot p_{xy}$, $A \cos \widehat{rx} \cdot p_{xz}$ suivant les mêmes coordonnées. En écrivant de même les composantes des autres, et en les ajoutant toutes après les avoir décomposées suivant une même autre droite r' , on obtient, en divisant par A, la valeur suivante de la composante $p_{rr'}$, suivant r' , de la pression à travers l'unité superficielle de la face perpendiculaire à r :

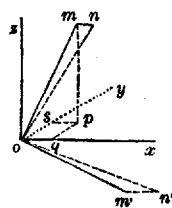
$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{rr'} &= (p_{xx} \cos \widehat{rx} + p_{yx} \cos \widehat{ry} + p_{zx} \cos \widehat{rz}) \cos \widehat{r'x} \\ &+ (p_{xy} \cos \widehat{rx} + p_{yy} \cos \widehat{ry} + p_{zy} \cos \widehat{rz}) \cos \widehat{r'y} \\ &+ (p_{xz} \cos \widehat{rx} + p_{yz} \cos \widehat{ry} + p_{zz} \cos \widehat{rz}) \cos \widehat{r'z}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on attribue successivement à r et r' les directions de trois nouvelles lignes rectangulaires x' , y' , z' , on a les formules servant à passer d'un système à un autre système de plans de pression.

Quant aux dilatations et glissements, supposons d'abord que les déplacements des points d'un corps solide ne lui fassent éprouver qu'une dilatation générale ∂_x . Si la première extrémité o d'une droite $om = r$, est restée immobile, comme sa projection oq dans le sens x est $r \cos \widehat{rx}$, la deuxième extrémité m aura cheminé de $r \cos \widehat{rx} \cdot \partial_x$ parallèlement à x , ce qui, en projetant le chemin mn sur la direction de r , ou en multipliant par $\cos \widehat{rx}$, donne $r \partial_x \cos^2 \widehat{rx}$ pour son allongement, et, par conséquent, en divisant par r , pour sa dilatation,

$$\partial_r = \partial_x \cos^2 \widehat{rx}.$$

Si, en second lieu, le corps a éprouvé partout un glissement g_{yz} au lieu d'une dilatation, en sorte que tous les plans matériels tels que mps , parallèles aux zx , aient tourné d'un angle très-petit g_{yz} autour de leurs intersections ps avec celui xoy perpendiculaire aux z , comme la distance mp de m à ce plan fixe est $r \cos \widehat{rz}$, m aura



cheminé de $r \cos \widehat{rz} \cdot g_{yz}$ parallèlement aux y , en sorte que, en projetant sur la direction om de r , et divisant par sa longueur, on a pour la dilatation ∂_r que le glissement g_{yz} aura fait éprouver à cette ligne :

$$\partial_r = g_{yz} \cos \widehat{ry} \cdot \cos \widehat{rz}.$$

Soit maintenant une deuxième ligne $r' = om'$ primitivement à angle droit sur celle $r = lm$, et prenons pour plus de simplicité les longueurs $r = r' = 1$. La dilatation générale ∂_x supposée tout à l'heure aura fait cheminer parallèlement aux x leurs extrémités m , m' de deux petites lignes $mn = \cos \widehat{rx} \cdot \partial_x$ et $m'n' = \cos \widehat{r'x} \cdot \partial_x$ parallèles à x . Si l'on projette la première mn sur la direction de om' ou r' , on aura la petite quantité dont l'angle droit mom' se serait rétréci s'il était devenu nom' ;

et si l'on projette la deuxième $m'n'$ sur la direction de r ou de om , direction qui est sensiblement la même que celle de on , on aura la petite quantité dont l'angle presque droit nom' se serait rétréci en devenant non' . La somme de ces deux projections sera le rétrécissement éprouvé par l'angle droit mom' en devenant non' , ou (art. 5) le glissement $g_{rr'}$. Donc on a pour ce glissement produit par la dilatation ∂_x :

$$g_{rr'} = 2 \partial_x \cos \widehat{rx} \cos \widehat{r'x}.$$

Si, au lieu d'une dilatation ∂_x , il n'y a eu qu'un glissement g_{yz} par tout le corps, les deux extrémités m, m' des lignes $r = 1, r' = 1$ auront cheminé de $g_{yz} \cos \widehat{rz}$ et $g_{yz} \cos \widehat{r'z}$ parallèlement aux y . En ajoutant, comme tout à l'heure, les projections de la première de ces petites lignes sur r' et de la seconde sur r , on a pour le glissement $g_{rr'}$ provenant de celui g_{yz} ,

$$g_{rr'} = g_{yz} (\cos \widehat{rz} \cos \widehat{r'y} + \cos \widehat{ry} \cos \widehat{r'z}).$$

S'il y a en même temps des dilatations et des glissements $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ dans les sens des coordonnées x, y, z , la dilatation ∂_r et le glissement $g_{rr'}$ seront, à cela près de quantités très-petites du second ordre et négligeables, sommes de tout ce qui est dû à ces diverses modifications séparément. Donc on a

$$(6) \quad \begin{cases} \partial_r = \partial_x \cos^2 \widehat{rx} + \partial_y \cos^2 \widehat{ry} + \partial_z \cos^2 \widehat{rz} + g_{yz} \cos \widehat{ry} \cos \widehat{rz} + g_{zx} \cos \widehat{rz} \cos \widehat{rx} + g_{xy} \cos \widehat{rx} \cos \widehat{ry}, \\ g_{rr'} = 2 \partial_x \cos \widehat{rx} \cos \widehat{r'x} + 2 \partial_y \cos \widehat{ry} \cos \widehat{r'y} + 2 \partial_z \cos \widehat{rz} \cos \widehat{r'z} \\ + g_{yz} (\cos \widehat{ry} \cos \widehat{r'z} + \cos \widehat{rz} \cos \widehat{r'y}) + g_{zx} (\cos \widehat{rz} \cos \widehat{r'x} + \cos \widehat{rx} \cos \widehat{r'z}) + g_{xy} (\cos \widehat{rx} \cos \widehat{r'y} + \cos \widehat{ry} \cos \widehat{r'x}); \end{cases}$$

double formule qui, en donnant successivement aux droites r, r' , la direction des trois nouvelles lignes rectangulaires x', y', z' , servira à changer à volonté le système des axes coordonnés suivant lesquels on prend les dilatations et les glissements [*].

[*] On trouve au Mémoire cité *Sur la torsion*, art. 6, ces deux formules (6) démontrées pour tous leurs termes à la fois, d'une manière qui peut paraître plus prompte, mais qui fait moins comprendre la raison de leur composition.

9. Réduction des formules de composante de pression pour diverses sortes de contextures des corps.

Si le corps est *homogène*, les coefficients a des formules (4) sont les mêmes en tous ses points, pour les mêmes directions des axes coordonnés, mais peuvent changer avec ces directions des axes.

Et si, de part et d'autre d'un plan que l'on peut appeler *plan de symétrie de contexture*, ou, avec M. Cauchy, *plan principal d'élasticité* [*], les pressions ont les mêmes relations avec les déplacements ou sont exprimables en $\partial_x, \partial_y, \dots, g_{xy}$, avec les mêmes coefficients, les formules (4) doivent rester les mêmes lorsque, ce plan étant pris pour plan des yz , on change l'axe des x en son prolongement du côté opposé. Or alors, les axes y et z restant les mêmes, $p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, \partial_y, \partial_z, g_{yz}$ ne changent pas, et il est facile de voir qu'il en est de même de p_{xx} et ∂_x , tandis que $p_{zx}, p_{xy}, g_{zx}, g_{xy}$ prennent un signe contraire en conservant la même grandeur. Pour que les équations (4) restent les mêmes en opérant de pareils changements de signe, il faut que g_{zx}, g_{xy} n'entrent pas dans celles qui donnent $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}$, et que $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}$ n'entrent pas dans celles qui donnent p_{zx}, p_{xy} . D'où il suit que lorsqu'il y a, en chaque point d'un corps homogène, un plan de symétrie perpendiculaire aux x , on a des expressions de la forme suivante. On a désigné par les mêmes lettres les coefficients qui doivent être faits égaux, d'après le principe de la réductibilité, à quinze, des trente-six coefficients de (4), en sorte que les accents seront effacés si l'on ne met pas ce principe en doute :

$$(7) \quad \begin{cases} p_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e''\partial_z + hg_{yz}, \\ p_{yy} = f''\partial_x + b\partial_y + d'\partial_z + kg_{yz}, \\ p_{zz} = e'\partial_x + d''\partial_y + c\partial_z + lg_{yz}, \\ p_{yz} = h'\partial_x + k'\partial_y + l'\partial_z + dg_{yz}, \\ p_{zx} = eg_{zx} + h''g_{xy}, \\ p_{xy} = h'''g_{zx} + fg_{xy}. \end{cases}$$

Si, en outre, il y a un plan de symétrie perpendiculaire aux y , ces

[*] *Comptes rendus*, tome XXXVIII, page 329.

équations devront rester les mêmes en changeant pareillement les signes de p_{yz} , g_{yz} , p_{xy} et g_{xy} , ce qui les réduira à la forme suivante, qui prouve que le plan perpendiculaire aux z sera aussi, par cela seul, un plan de symétrie ou un plan principal d'élasticité, *en sorte qu'il y aura trois plans principaux* se coupant parallèlement aux x , y , z :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e''\partial_z, \\ p_{yy} = f''\partial_x + b\partial_y + d'\partial_z, \\ p_{zz} = e'\partial_x + d''\partial_y + c\partial_z, \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} p_{yz} = d g_{yz}, \\ p_{zx} = e g_{zx}, \\ p_{xy} = f g_{xy}. \end{array} \right.$$

Si, de plus, tout est égal autour d'une parallèle mx aux x , appelée alors un *axe d'élasticité*, on a

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{non-seulement} \quad b = c, \quad f = e, \quad f' = e'', \quad d'' = d', \\ \text{mais encore} \quad \quad \quad b = 2d + d'. \end{array} \right.$$

On prouve cette dernière relation $b = 2d + d'$, en prenant, sans changer l'axe des x , deux nouveaux axes y' , z' faisant, dans le plan yz , un angle ϵ avec les anciens y et z , et en exprimant qu'on a encore $p_{y'z'} = d g_{y'z'}$. En effet, si nous supposons, pour simplifier, que le point m où ces axes se croisent est resté immobile et que les déplacements des autres points n'ont fait que produire une dilatation générale ∂_z , d'où

$$p_{yy} = d' \partial_z, \quad p_{zz} = b \partial_z, \quad p_{yz} = 0,$$

il en résultera, en considérant les pressions supportées par une petite face A perpendiculaire à y' et par ses deux projections $A \cos \epsilon$ et $A \sin \epsilon$ sur les plans perpendiculaires aux y et aux z , et en égalant la première à la somme des deux autres après les avoir décomposées toutes les trois suivant z' (ou bien en particulier la formule générale de transformation (5) de l'art. 8 pour $p_{yz} = 0$, $\widehat{\cos r'x} = \widehat{\cos r'x} = 0$, $\widehat{\cos ry} = \widehat{\cos r'z} = \cos \epsilon$, $\widehat{\cos rz} = -\widehat{\cos r'y} = \sin \epsilon$),

$$p_{y'z'} = (p_{zz} - p_{yy}) \sin \epsilon \cos \epsilon = (b - d') \partial_z \sin \epsilon \cos \epsilon.$$

Il en résulte aussi, en raisonnant comme on a fait art. 8 pour trouver $g_{rr'} = 2\partial_x \widehat{\cos r'x} \widehat{\cos r'x}$, ou en particulier la formule gé-

nérale (6),

$$g_{y'z'} = 2 \partial_x \sin \epsilon \cos \epsilon.$$

D'où la nécessité, pour obtenir $p_{y'z'} = d g_{y'z'}$, d'avoir

$$b - d' = 2d,$$

ou précisément la dernière des relations (9).

D'où il suit qu'on a, lorsque x est axe d'élasticité,

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = a \partial_x + e'' \partial_y + e' \partial_z, \\ p_{yy} = e' \partial_x + (2d + d') \partial_y + d' \partial_z, \\ p_{zz} = e' \partial_x + d' \partial_y + (2d + d') \partial_z, \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{yz} = d g_{yz}, \\ p_{zx} = e g_{zx}, \\ p_{xy} = e g_{xy}. \end{array} \right.$$

Les relations *nécessaires* (9) que nous venons d'établir ainsi entre les coefficients, sont *suffisantes* pour que tout soit pareil autour de l'axe des x . En effet, cette parité ne saurait empêcher le coefficient d de g_{yz} dans p_{yz} de pouvoir être différent de ceux e des glissements g_{zx} , g_{xy} dans p_{zx} , p_{xy} , ni le coefficient d' de ∂_z dans p_{yy} de pouvoir être différent de ceux e' , e'' de ∂_x dans p_{yy} et de ∂_z dans p_{xx} , en sorte qu'elle ne peut exiger aucune autre égalité entre les coefficients désignés par des lettres différentes.

Aussi l'on peut vérifier, en appliquant les formules générales de transformation (5) $p_{rr'} = \dots$, et (6) $\partial_r = \dots$, $g_{rr'} = \dots$, de l'art. 8, que les diverses composantes p_{xx} , $p_{y'y'}$, $p_{y'z'}$, $p_{z'x}$ sont exprimées en ∂_x , $\partial_{y'}$, $\partial_{z'}$, $g_{y'z'}$,... avec les mêmes coefficients que celles p_{xx} , p_{yy} , p_{yz} , p_{zx} le sont en ∂_x , ∂_y , ∂_z , g_{yz} ,... ce qui est bien le caractère de l'égalité *élasticité* dans toutes les directions faisant le même angle avec les x .

S'il y a aussi un axe d'élasticité parallèle aux y , il faut, par les mêmes raisons, qu'on ait

$$(11) \quad d = e, \quad d' = e'' = e', \quad a = 2d + d' = 2e + e',$$

d'où résulte qu'il y a un troisième axe d'élasticité parallèle aux z , et même, à cause de l'égalité des coefficients quand on prend deux nouveaux axes y' , z' , que ceux-ci, et, par suite, des droites quelconques menées dans les plans xy' , xz' , c'est-à-dire *toutes les droites possibles*

tirées par le point m , sont aussi des axes d'élasticité. Le corps est alors appelé *isotrope* ou d'égalé élasticité en tout sens.

Les coefficients se réduisent à deux, e et e' , et même à un seul si (art. 7) l'on ne conteste point l'égalité $e = e'$ du coefficient de γ dans p_{xx} au coefficient de g_{xy} dans p_{xy} .

Mais les expériences de Savart, et la simple considération de la manière dont s'opèrent le refroidissement et la solidification des corps, prouvent que l'isotropie est fort rare, même, comme le pense M. Regnault, dans les métaux coulés ou les matières vitreuses ou grenues; en sorte qu'il convient de supposer, en général, une texture inégale en divers sens, et que le désaccord qui peut être trouvé entre des résultats d'expériences et les formules d'isotropie avec $e = e'$, ne prouve nullement contre le principe (art. 7) $a_{xx,yy} = a_{xy,xy} = a_{yy,xx}$, etc., pour les corps à texture soit égale, soit inégale.

10. *Équations différentielles indéfinies de l'équilibre des solides élastiques. — Expression des dilatations et glissements en fonction des déplacements amenés à être très-petits.*

Les conditions de l'équilibre intérieur du corps s'expriment en posant simplement les trois équations de *non-translation* de chaque élément solide, dont le point quelconque $m(x, y, z)$ occupe le centre, en remplaçant par les pressions sur ses faces (art. 4) les actions émanant des éléments qui l'environnent. Soient, parallèlement aux coordonnées x, y, z ,

x, y, z les trois dimensions très-petites de cet élément supposé parallélépipède rectangle,

X, Y, Z les composantes, par unité de volume, des autres forces, telles que la pesanteur, pouvant agir sur sa matière.

Les deux faces xy de cet élément, perpendiculaires aux z , éprouvent des pressions contraires qui, décomposées dans le sens x par exemple, sont l'une un peu au-dessus, l'autre un peu au-dessous de la pression supportée par une face parallèle passant par le centre m , et qui est représentée par p_{xx} par unité superficielle. La différence sera le coefficient différentiel $\frac{dp_{xx}}{dz}$ multiplié par la distance z de ces faces, et aussi

par leur superficie xy ; la résultante des deux composantes de pression, suivant x , sera ainsi

$$\frac{dp_{xx}}{dz} xyz.$$

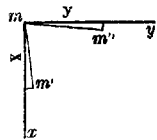
Comme on peut faire le même raisonnement pour les différences des pressions, décomposées dans le même sens x , qui ont lieu sur les quatre autres faces de l'élément prises deux à deux, on a pour l'équilibre de l'élément sollicité en sens opposé par la force $Xxyz$, une équation dont on peut diviser tous les termes par son volume xyz . Il en résulte la première des trois équations suivantes; les deux autres s'obtiennent de même, en exprimant l'équilibre de translation dans les sens y et z :

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = X, & \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{zy}}{dz} = Y, \\ \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} = Z. \end{cases}$$

Toutes les formules ci-dessus s'appliquent à des grandeurs quelconques des déplacements *absolus*, et même des déplacements *relatifs* de ceux des points d'un même corps qui sont éloignés les uns des autres, *pourvu que les déplacements relatifs des points très-proches restent fort petits*, ou que les petites distances ne varient que dans de très-faibles proportions.

Pour en tirer les déplacements par le calcul, il faut exprimer, en fonction de ceux-ci, les dilatations et les glissements. Mais, pour que le calcul soit simple, il faut, en général, ne considérer à la fois que des portions de corps d'une petite étendue, et où l'on puisse, par conséquent, au moyen d'une translation et d'une rotation générales, *amener les déplacements à être très-petits*. Soient alors

$x + u$, $y + v$, $z + w$ les coordonnées, après les déplacements, du point quelconque m , dont x , y , z étaient les coordonnées primitives, ou u , v , w ses *petits déplacements dans les sens x , y , z* .



Si m' , m'' sont deux autres points, dont les coordonnées primitives étaient respectivement $x + x$, y , z et x , $y + y$, z , ou si $mm' = x$, $mm'' = y$ sont deux petites droites primitivement parallèles à x et à y , comme on

aura pour les coordonnées *nouvelles* dans ces mêmes directions,

$$\begin{aligned} \text{de } m \dots x + u, & \quad y + v, \\ \text{de } m' \dots x + x + u + \frac{du}{dx}x, & \quad y + v + \frac{dv}{dy}x, \\ \text{de } m'' \dots x + u + \frac{du}{dy}y, & \quad y + y + v + \frac{dv}{dy}y, \end{aligned}$$

la longueur nouvelle de la petite droite mm' , restée presque parallèle à x , sera $x \left(1 + \frac{du}{dx}\right)$ et, par conséquent, sa dilatation aura été $\frac{du}{dx}$. Et, si l'on a pris $mm'' = mm'$ ou $y = x$, la somme des projections, sur x , du déplacement du point m'' , et, sur y , du déplacement du point m' , est $\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)x$, en sorte que, d'après ce que nous avons dit art. 8, le petit rétrécissement de l'angle primitivement droit $m'mm''$, ou le glissement g_{xy} , est $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$. Comme on peut raisonner de même pour les autres dilatations et glissements, on a, *quand* u , v , w *sont très-petits*, les valeurs suivantes :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_x = \frac{du}{dx}, \quad \partial_y = \frac{dv}{dy}, \quad \partial_z = \frac{dw}{dz}, \\ g_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \quad g_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \quad g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}. \end{array} \right.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions (4), (7), (8), (10) de p_{xx} , p_{yy} , ..., p_{xy} , on a les six composantes de pression en fonction des déplacements très-petits des points des corps ou *des portions de corps* que l'on considère.

Et si l'on met ensuite ces valeurs de p_{xx} , p_{yy} , ... dans les trois équations générales (12) de l'équilibre d'un élément solide, on obtient trois équations différentielles du second ordre qui sont les *équations indéfinies* (ou applicables à tous les points) des problèmes où il s'agit de la recherche des déplacements u , v , w .

11. Équations définies, à satisfaire principalement pour les points de la surface.

Les équations différentielles indéfinies dont nous venons de parler,

sont à intégrer de manière à satisfaire à des conditions géométriques d'immobilité de certains points ou de certains éléments linéaires ou superficiels extrêmes des corps supposés assujettis, ou bien de juxtaposition avec d'autres corps ou d'autres parties du même corps considérées d'abord.

Mais elles doivent satisfaire aussi à des conditions statiques, consistant en ce que certaines parties de leur surface sont soumises à l'action de forces données.

Soient Π ces forces ou *pressions extérieures*, par unité superficielle des divers éléments de surface où elles agissent;

n les directions des normales à ces éléments.

On aura les projections d'un quelconque de ces mêmes éléments sur trois plans perpendiculaires aux x , y , z en multipliant sa superficie respectivement par $\cos \widehat{n x}$, $\cos \widehat{n y}$, $\cos \widehat{n z}$; et la somme des composantes, dans le sens x , des pressions intérieures qui s'y exerceront sera $p_{xx} \cos \widehat{n x} + p_{yx} \cos \widehat{n y} + p_{zx} \cos \widehat{n z}$.

Faisant de même les sommes de composantes dans les sens y et z , on aura pour l'équilibre entre les pressions intérieures et extérieures, d'après le théorème (art. 4) des projections de plans de pression,

$$(14) \quad \begin{cases} p_{xx} \cos \widehat{n x} + p_{yx} \cos \widehat{n y} + p_{zx} \cos \widehat{n z} = \Pi \cos \widehat{\Pi x}, \\ p_{xy} \cos \widehat{n x} + p_{yy} \cos \widehat{n y} + p_{zy} \cos \widehat{n z} = \Pi \cos \widehat{\Pi y}, \\ p_{xz} \cos \widehat{n x} + p_{yz} \cos \widehat{n y} + p_{zz} \cos \widehat{n z} = \Pi \cos \widehat{\Pi z}. \end{cases}$$

Ce sont les équations différentielles *définies*, où l'on mettra pour p_{xx} , p_{yx} , ... leurs expressions en fonction des dilatations et glissements, et, par suite (article précédent), en fonction des déplacements.

12. Application de ces formules à l'extension d'un prisme. — Contractions transversales qui l'accompagnent. — Coefficient d'élasticité.

Nous allons d'abord examiner ce cas simple, auquel on ramène les circonstances les plus influentes de la flexion des prismes.

Supposons généralement qu'en tous les points d'un corps homo-

gène de forme quelconque, les six composantes de pression $p_{xx}, \dots, p_{xy}$ soient constantes et égales à des nombres donnés. Les six équations du premier degré (4) ou (7), ou (8), ou (10) qui établissent les relations entre elles et $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ étant résolues, donneront aussi pour ces dernières quantités des nombres constants par tout le corps. Et l'on pourra toujours, d'après (13) $\partial_x = \frac{du}{dx}, \dots, g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$, trouver des petits déplacements u, v, w qui y satisfassent, en même temps qu'aux conditions particulières telles que l'immobilité de certains points et de certains éléments supposés assujettis; car on n'aura qu'à évaluer u, v, w à des fonctions linéaires de x, y, z et qu'à disposer, pour cela, des douze coefficients de ces fonctions.

Les trois équations d'équilibre intérieur (12) $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = 0, \frac{dp_{xy}}{dx} + \dots$, dont on fait les seconds membres nuls en négligeant la pesanteur, sont satisfaites aussi par des fonctions linéaires de x, y, z .

Or, si l'on donne les pressions à la surface d'un corps, les pressions intérieures s'ensuivent: elles se règlent par la condition que tous les éléments du volume soient en équilibre, ou que les mêmes équations (12) $\frac{dp_{xx}}{dx} + \dots$ soient satisfaites; et le problème, quand on connaît seulement ces pressions extérieures, est complètement déterminé.

Supposons donc, par exemple, que la forme du corps soit prismatique, qu'aucune pression n'agisse sur ses faces latérales, et que ses bases extrêmes supportent sur tous leurs éléments, parallèlement aux arêtes, une pression ou tension constante dont l'intensité est p par unité superficielle, en sorte que, les x étant pris dans le sens des mêmes arêtes, les composantes de pression autres que celle p_{xx} soient nulles sur ces bases comme sur les faces latérales. Le problème de la détermination des déplacements pour ces données sera résolu en prenant pour u, v, w des expressions qui satisfassent, par tout le corps, à

$$p_{xx} = p, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad p_{zx} = 0, \quad p_{xy} = 0;$$

et les composantes de pression auront ces six valeurs aux points de l'intérieur comme à ceux de la surface. En les attribuant aux premiers membres $p_{xx}, \dots$, des six équations (4), la résolution de celles-ci donnera,

si l'on désigne par $E, \varepsilon, \varepsilon', \dots$, des fonctions de leurs trente-six (ou quinze) coefficients,

$$\partial_x = \frac{p}{E}, \quad \partial_y = -\varepsilon \partial_x, \quad \partial_z = -\varepsilon' \partial_x, \quad g_{yz} = \varepsilon'' \partial_x, \quad g_{zx} = \varepsilon''' \partial_x, \quad g_{xy} = \varepsilon'''' \partial_x.$$

Les dilatations et glissements sont tous proportionnels à la traction longitudinale p .

Le rapport E de celle-ci à la dilatation longitudinale ∂_x est ce qu'on appelle le *coefficient d'élasticité d'extension*.

Si la matière offre, en chaque point, un plan de symétrie perpendiculaire aux arêtes, il résulte des équations (7), combinées avec $p_{xx} = 0$, $p_{xy} = 0$, que l'on a $g_{xx} = 0$, $g_{xy} = 0$, ou *que le prisme reste droit*.

Si elle offre trois pareils plans ou plans principaux, se coupant suivant les x, y, z , on a, de plus,

$$g_{yz} = 0.$$

Et les coefficients $E, \varepsilon, \varepsilon'$ des expressions (que nous récrivons)

$$(15) \quad \partial_x = \frac{p}{E}, \quad p = E \partial_x, \quad \partial_y = -\varepsilon \partial_x, \quad \partial_z = -\varepsilon' \partial_x$$

sont donnés au moyen des neuf (ou six) coefficients des trois premières (8)

$$p_{xx} = a \partial_x + f' \partial_y + e'' \partial_z, \quad p_{yy} = f'' \partial_x + b \partial_y + d' \partial_z, \quad p_{zz} = e' \partial_x + d'' \partial_y + c \partial_z$$

par les trois équations

$$(16) \quad f'' - b\varepsilon - d'\varepsilon' = 0, \quad e' - d''\varepsilon - c\varepsilon' = 0, \quad a - f'\varepsilon - e''\varepsilon' = E,$$

qui fournissent, dans le cas de *l'isotropie*,

$$\varepsilon = \varepsilon' = \frac{e'}{2e + 2e'}, \quad \frac{E}{e} = 2 + \frac{e'}{e' + e},$$

ou

$$(17) \quad \varepsilon = \varepsilon' = \frac{1}{4}, \quad E = \frac{5}{2}e,$$

si l'on ne conteste pas le principe (art. 7) de l'égalité du coefficient e' de ∂_y dans p_{xx} au coefficient e de g_{xy} dans p_{xy} ; en sorte que le *coefficient d'élasticité d'extension* E est deux fois et demie celui e qu'on peut appeler le *coefficient d'élasticité de glissement*.

Toute dilatation longitudinale est accompagnée, comme on voit, de contractions transversales qui sont avec elle dans les rapports $\varepsilon, \varepsilon'$ lorsqu'il n'y a aucune pression normale latérale ou que l'on a

$$p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0.$$

Ces rapports $\varepsilon, \varepsilon'$, ainsi que le coefficient E , seraient encore les mêmes si p_{xx}, p_{xy} n'étaient pas nuls, ou s'il y avait, sur les faces latérales, des frottements longitudinaux changeant le prisme droit en un prisme légèrement oblique.

Tous ces résultats sont applicables malgré la pression atmosphérique qui agit sur les faces latérales comme sur les bases, si les déplacements ne sont comptés qu'en sus de ceux fort petits qu'elle a déjà produits sur les corps pris dans l'état habituel [*].

[*] Nous avons abstrait la pesanteur du prisme. Si on la rétablit et si ϖ est son poids par unité de volume, il est facile de voir que l'on a, l'axe des x étant supposé vertical, et le prisme, d'une hauteur a , étant fixé par sa base supérieure et l'unité de sa base inférieure étant tirée par un poids p :

$$u = \frac{1}{E} \left[px + \varpi \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{\varpi}{2} (\varepsilon y^2 + \varepsilon' z^2) \right],$$

$$v = -\frac{\varepsilon}{E} [py + \varpi (a - x) y], \quad w = -\frac{\varepsilon'}{E} [pz + \varpi (a - x) z].$$

Ces valeurs donnent en effet, en substituant dans les formules (8) du cas de trois plans d'élasticité, et eu égard à (16),

$$p_{xx} = p + \varpi (a - x), \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad p_{zx} = 0, \quad p_{xy} = 0,$$

d'où

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\varpi,$$

qui est, dans ce cas, la première des équations (12). On suppose que la base attachée est libre de se contracter, et, en même temps, de se courber très-légèrement, comme les autres sections, suivant un paraboloides elliptique dont l'ordonnée est

$$\frac{\varpi}{2E} (\varepsilon y^2 + \varepsilon' z^2).$$

En faisant $p = 0$, et changeant le signe de ϖ , on a les déplacements des points du même prisme pesant, s'il était posé sur sa base inférieure.

13. *Emploi de ces mêmes formules générales par MM. Poisson [*] et Cauchy [**] pour la détermination approchée des flexions.*

Les deux illustres géomètres ont trouvé dans le cours de la même année (1828), l'un pour le cylindre à base circulaire, l'autre pour le prisme rectangle, que l'expression connue (2) du moment de flexion de la théorie ordinaire

$$M = \frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega$$

pouvait être regardée comme approximativement exacte « lorsque les » dimensions transversales sont très-petites », en supposant « que les » pressions et les dilatations, aux divers points de chaque section, sont » exprimables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances » entières et positives des coordonnées transversales »; et en effaçant finalement les termes affectés des puissances supérieures.

On peut résumer leur analyse à peu près comme il suit, en l'étendant, ce qui est facile, au cas où la matière n'est point isotrope et n'a même de plans de symétrie ou d'élasticité que perpendiculairement aux arêtes.

Soit pris pour axe des x l'axe de figure du prisme. Si, pour une quelconque de ses sections transversales ω , on exprime la composante normale de pression par la série suivante où l'on suppose que les coefficients $A_0, A_1, \dots$, fonctions de x , ont des grandeurs telles, qu'elle soit toujours très-convergente, même pour les plus grandes valeurs des coordonnées transversales y, z , en sorte que chaque terme soit très-petit devant ceux d'un degré inférieur de deux unités :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{xx} = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots \\ \quad + A'_1 z + A'_2 y^2 + A'_3 y^2 z + \dots \\ \quad + A''_2 z^2 + A''_3 y z^2 + \dots \\ \quad + A'''_3 z^3 + \dots; \end{array} \right.$$

[*] Mémoire lu le 14 avril 1828, tome VIII des *Nouveaux Mémoires de l'Institut*, art. 39.

[**] *Exercices de Mathématiques*, tome III, pages 250, 256, 262, 358, et tome IV, page 26.

comme $\int \gamma^m z^n d\omega$ est nul pour toute section symétrique par rapport aux axes des γ et des z quand l'un des deux exposants m ou n est impair, on aura pour le moment de flexion ou le moment des forces élastiques autour d'un axe parallèle aux γ , mené par le centre de ω , une expression

$$(19) \quad M_\gamma = \int p_{xx} z d\omega = A'_1 \int z^2 d\omega + A'_3 \int \gamma^2 z^2 d\omega + A'_5 \int z^4 d\omega + \dots,$$

dont le premier terme l'emportera de beaucoup sur les suivants.

Or on a, si l'on désigne généralement par une parenthèse avec l'indice zéro la valeur, pour $\gamma = 0$, $z = 0$, de la quantité qui y est renfermée,

$$(20) \quad A'_1 = \left(\frac{dp_{xx}}{dz} \right)_0;$$

et, en éliminant ∂_γ , ∂_z entre les trois premières équations (7) $p_{xx} = a\partial_x + f'\partial_\gamma + e''\partial_z + h g_{yz}$, $p_{yy} = \text{etc.}$, du cas d'un seul plan d'élasticité, on obtient, ε_1 , ε'_1 , ε''_1 désignant trois fonctions de leurs coefficients, analogues à celles ε , ε' de l'article précédent,

$$(21) \quad p_{xx} = E \frac{du}{dx} + \varepsilon_1 p_{yy} + \varepsilon'_1 p_{zz} + \varepsilon''_1 p_{yz},$$

d'où

$$(22) \quad \left(\frac{dp_{xx}}{dz} \right)_0 = A'_1 = E \left(\frac{d^2 u}{dx dz} \right)_0 + \varepsilon_1 \left(\frac{dp_{yy}}{dz} \right)_0 + \varepsilon'_1 \left(\frac{dp_{zz}}{dz} \right)_0 + \varepsilon''_1 \left(\frac{dp_{yz}}{dz} \right)_0.$$

Mais la deuxième et la troisième équation d'équilibre (12) $\frac{dp_{xy}}{dx} + \dots = 0$, $\frac{dp_{xz}}{dx} + \dots = 0$, donnent, en remplaçant p_{xy} et p_{xz} par leurs valeurs (7), puis g_{zx} , g_{xy} par celles (13), et éliminant $\frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \right)$ pour tirer $\frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right)$,

$$(23) \quad \frac{d^2 u}{dx dz} = - \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{e}{ef - h'' h'''} \left(\frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} \right) + \frac{h'''}{ef - h'' h'''} \left(\frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} \right);$$

et le premier terme du second membre n'est autre chose que la cour-

bure de la ligne dont x est l'abscisse et w l'ordonnée très-petite, en sorte que, si on y fait $y = 0$, $z = 0$, on a

$$-\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure de l'axe du prisme s'il est, comme on suppose, fléchi dans le plan xz . Substituant dans (22) la valeur de $\left(\frac{d^2 u}{dx dz}\right)_0$ qui en résulte, puis A'_1 dans (19), on a pour le moment de flexion,

$$(24) \left\{ \begin{aligned} M_y = & \frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega + A'_1 \int y^2 z^2 d\omega + A'_3 \int z^4 d\omega + \dots + \\ & + \left[\varepsilon_1 \left(\frac{dp_{yy}}{dz}\right)_0 + \varepsilon'_1 \left(\frac{dp_{zz}}{dz}\right)_0 + \varepsilon''_1 \left(\frac{dp_{yz}}{dz}\right)_0 - \frac{Ee}{ef - h''h'''} \left(\frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz}\right)_0 + \frac{Eh'''}{ef - h''h'''} \left(\frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz}\right)_0 \right] \int z^2 d\omega \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on regarde p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} comme exprimables par des développements semblables à celui (18) de p_{xx} , il est facile de voir que, d'après la condition de nullité des pressions sur les faces latérales du prisme, ces trois composantes seront partout, à l'intérieur, du second ordre et du quatrième ordre en y , z et les valeurs particulières de ces coordonnées relatives à la surface. En effet, en nous bornant à une section rectangle dont les côtés sont $2b$, $2c$, si nous représentons par les lettres B (à la place de celles de A relatives à p_{xx}) les coefficients du développement de p_{yy} , la condition $p_{yy} = 0$ pour $y = +b$ et $y = -b$ quel que soit z , donnera cette suite indéfinie d'équations

$$(25) \left\{ \begin{aligned} B_0 + B_2 b^2 + B_4 b^4 + \dots &= 0, & B_1 + B_3 b^2 + B_5 b^4 + \dots &= 0, \\ B'_1 + B'_3 b^2 + B'_5 b^4 + \dots &= 0, & B'_2 + B'_4 b^2 + B'_6 b^4 + \dots &= 0, \\ B''_2 + B''_4 b^2 + B''_6 b^4 + \dots &= 0, & B''_3 + B''_5 b^2 + B''_7 b^4 + \dots &= 0, \dots \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit, en tirant les coefficients B_0 , B_1 , B'_1 , B'_2 , ... en fonction des coefficients d'ordre supérieur B_2 , B_3 , ..., et en substituant dans le développement $p_{yy} = B_0 + B_1 y + B'_1 z + \dots$, que p_{yy} est au moins du second ordre en y , b , z . On aura la même chose pour p_{zz} en y , z , c ; et, quant à p_{yz} , qui doit s'annuler sur les quatre faces $y = \pm b$, $z = \pm c$, on trouvera qu'il est du quatrième ordre en fonc-

tion de ces mêmes coordonnées ou dimensions transversales que nous supposons très-petites. Mettant dans l'expression (24) du moment M_y les développements ainsi trouvés pour p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} , ou, plus simplement, mettant pour $\left(\frac{dp_{yy}}{dy}\right)_0, \left(\frac{dp_{yy}}{dz}\right)_0$ les valeurs $B_1 = -B_3 b^2 - B_5 b^4 - \dots$, $B'_1 = -B'_3 b^2 - B'_5 b^4 - \dots$ obtenues directement de la seconde et de la troisième équation (25) et celles obtenues d'une manière semblable pour $\left(\frac{dp_{zz}}{dz}\right)_0, \left(\frac{dp_{yz}}{dy}\right)_0, \left(\frac{dp_{yz}}{dz}\right)_0$, on verra que tout, dans cette expression (24), hors le premier terme, est au moins du quatrième ordre, et, par conséquent, susceptible d'être négligé; d'où, approximativement,

$$(26) \quad M_y = \frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega.$$

Cette analyse, en supposant que l'on conteste la possibilité de développer $p_{xx}, p_{yy}, \dots$, en séries convergentes entières en y, z , peut toujours être regardée comme démontrant la formule (26) avec un peu plus d'approximation ou moins de postulats que la théorie ordinaire; car celle-ci revient à supposer de prime abord p_{yy}, p_{zz} nuls partout, et p_{xx} linéaire en z , tandis que l'analyse qui précède, après avoir supposé simplement ces composantes de pression exprimables par de pareilles séries, n'opère finalement que des suppressions revenant au même que si l'on avait effacé, en commençant, les termes du troisième, du cinquième, etc., degré, en conservant les autres, ce qui laisse toujours une certaine latitude pour représenter, au moins empiriquement, la loi encore inconnue de leurs variations. Et une autre chose doit y être remarquée, c'est que cette même analyse, en s'appuyant sur deux des équations exactes (12) de l'équilibre intérieur, et une fois reconnu et admis que les actions transversales des fibres p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} , doivent être très-petites partout, démontre ce que suppose la théorie ordinaire, savoir, que la dilatation ϑ_x est exprimable par $\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}$ (ϑ_0 étant une constante), si la flexion s'opère dans un plan parallèle aux z ; car, comme ces équations se réduisent approximativement à

$$\frac{dp_{xx}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} = 0,$$

on tire de la première

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dz} \frac{du}{dx} = - \frac{d^2 w}{dx^2},$$

qui est sensiblement constant et égal à $-\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{\rho}$ à tous les points d'une même section, vu la petitesse de sa hauteur par rapport au rayon ρ de la courbure que le prisme prend en cet endroit; d'où l'on tire bien, en intégrant,

$$\frac{du}{dx} = \vartheta_x = \vartheta_0 + \frac{z}{\rho},$$

et par suite (toujours en raison de la nullité approchée de p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}),

$$(27) \quad p_{xx} = E \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right),$$

c'est-à-dire toutes les formules (art. 2) de la théorie ordinaire.

14. Données et équations de notre problème de la flexion inégale des prismes.

Il convient néanmoins de rechercher, comme on a dit art. 3, et pour des bases de différentes formes, des solutions rigoureuses et sans hypothèse du problème des déplacements produisant une flexion, en prenant au besoin, suivant l'esprit de la méthode mixte ou semi-inverse dont nous avons parlé art. 3, des données telles, que tout ou partie de ce qui est supposé sans contrôle dans la théorie de Mariotte et Coulomb ait lieu effectivement, et en en cherchant la possibilité et les conditions. C'est ce que nous avons fait au Mémoire déjà cité [*] pour le cas très-exceptionnel de la flexion égale ou circulaire, en nous bornant à des indications pour le cas général de la *flexion inégale*, où les forces ne se réduisent point à des couples.

Pour traiter ce dernier cas, qui comprend l'autre, nous considérerons un prisme ou une portion quelconque d'un prisme sans pesanteur, comprise entre deux bases ou sections droites transversales, et nous nous proposerons de déterminer complètement son état nouveau d'équilibre après que ses points auront été déplacés, en prenant pour données :

[*] Sur la torsion, art. 33, 36, 40.

1°. Une partie des déplacements ou de leurs relations, en ce que nous supposons qu'il y a eu un mouvement de flexion dans un certain plan, mouvement auquel nous donnons pour caractère que l'axe du prisme, ou la droite qui unit les centres de gravité de ses sections, se change en une courbe plane, et que les dilatations de ses *fibres* varient transversalement d'une manière uniforme avec leurs distances mutuelles estimées parallèlement au plan de cette courbe;

2°. Une partie des forces, en ce que nous supposons que les mêmes fibres n'exercent mutuellement aucune pression transversale ou perpendiculaire à leur longueur, *tout en pouvant agir les unes sur les autres longitudinalement*; que, sur les faces latérales extérieures, il n'y ait aucune action, même longitudinale; enfin en ce que nous nous donnons arbitrairement, quelque part, la résultante et le moment résultant des forces extérieures dont il n'y a, ainsi, d'inconnu que le mode d'application et de distribution.

A quoi nous ajoutons, non par nécessité, mais *pour simplifier* et ne pas mêler d'abord à la flexion des éléments étrangers tels que translation ou rotation générale, extension de l'axe, torsion (éléments qui peuvent être ajoutés plus tard d'après le théorème de composition de l'art. 6):

3°. Que l'une des deux extrémités de l'axe du prisme reste immobile ainsi que le plan matériel de l'élément central de la base correspondante, et aussi une bande longitudinale infiniment étroite du plan où la flexion de l'axe s'effectue.

En sorte que nous avons à chercher d'abord si ces données sont compatibles entre elles, et ensuite quelles sont les grandeurs des déplacements dont on ne s'est donné ainsi que quelques relations, et quelles sont les forces non données et qui produisent la flexion.

Prenons toujours pour axe des x l'axe non encore fléchi du prisme, pour origine son extrémité immobile, et pour plan des xz le plan où fléchit cet axe. Et appelons

M le moment, généralement variable ou fonction de x , des forces extérieures autour de parallèles aux y menées sur les sections ω par leurs centres: on suppose nulle la composante longitudinale totale de ces forces;

P la valeur de ce moment M pour $x = 0$;

I le moment d'inertie $\int z^2 d\omega$ de la section ;

ρ le rayon de courbure généralement variable de l'axe du prisme.

Comme les distances mutuelles des fibres, projetées sur le plan de flexion xz , sont les différences de leurs ordonnées z , la *première donnée* se trouve exprimée par $\partial_x = Cz + C'$, C et C' étant deux quantités constantes pour chaque section. La donnée principale sur les forces est exprimée par $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$, $p_{yz} = 0$ qui suffisent, d'après les formules de changement de plans de l'art. 8, pour annuler toutes leurs actions normales.

Supposons que la matière du prisme ait des plans de symétrie de contexture perpendiculaires aux arêtes ou aux x , en sorte qu'on ait les formules (7) pour les composantes de pressions. La seconde, la troisième et la quatrième, avec zéro pris au premier membre à la place de p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} , donneront comme à l'art. 12,

$$(28) \quad p_{xx} = E\partial_x, \quad \partial_y = -\varepsilon\partial_x, \quad \partial_z = -\varepsilon'\partial_x, \quad g_{yz} = \varepsilon''\partial_x.$$

Mettant pour ∂_x la valeur $Cz + C'$ que nous lui attribuons, et posant les équations de l'équilibre de translation, dans le sens x , et de rotation, autour de la parallèle aux y menée par le centre de ω , de la portion du prisme comprise entre cette section et l'extrémité opposée à l'origine, on a

$$0 = \int E(Cz + C')d\omega, \quad M = \int E(Cz + C')zd\omega;$$

d'où, comme $\int zd\omega = 0$ en vertu de la propriété du centre de gravité,

$$C' = 0, \quad C = \frac{M}{EI}.$$

En sorte que les données (1°) et (2°) se trouvent exprimées par

$$(29) \quad \frac{du}{dx} = \frac{Mz}{EI}, \quad \frac{dv}{dy} = -\varepsilon \frac{Mz}{EI}, \quad \frac{dw}{dz} = -\varepsilon' \frac{Mz}{EI}, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \varepsilon'' \frac{Mz}{EI},$$

qui, eu égard à $p_{xx} = E\partial_x = E \frac{du}{dx}$, $\partial_x = Cz$, reviennent au même

que

$$(30) \quad p_{xx} = \frac{Mz}{I}, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0,$$

et auxquelles il faut joindre, pour les données particulières (3°), établissant l'immobilité d'un point et de deux éléments plans,

$$(31) \quad \begin{cases} u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \text{ et } \frac{du}{dz} = 0 \text{ à l'origine ou pour } x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \\ v = 0 \text{ et } \frac{dv}{dz} = 0 \text{ sur l'axe ou pour } y = 0, \quad z = 0 \text{ quel que soit } x. \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer des valeurs de u , v , w qui y satisfassent, en même temps qu'aux équations d'équilibre indéfinies (13) $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0, \dots$, relatives à tous les points du solide, équations qui se réduisent, vu les valeurs (30), à

$$(32) \quad \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\frac{z}{I} \frac{dM}{dx}, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{xz}}{dx} = 0;$$

et aussi, mais seulement pour des points de la surface extérieure, aux équations définies (14) $p_{xx} \cos \widehat{nx} + p_{xy} \cos \widehat{ny} + p_{xz} \cos \widehat{nz} = \Pi \cos \widehat{\Pi x}, \dots$, à appliquer seulement aux parties de cette surface où l'on connaît les pressions Π , savoir aux faces latérales du prisme, où on les fait nulles.

Comme on a, pour ces faces, $\cos \widehat{nx} = 0$, la seconde et la troisième de ces équations (14) sont déjà satisfaites par $p_{yy} = 0, p_{zz} = 0, p_{yz} = 0, \Pi = 0$;

et celle qu'on vient d'écrire, vu que l'on a $\cos \widehat{ny} = -\frac{dz}{ds}$,

$\cos \widehat{nz} = \frac{dy}{ds}$, ds étant l'élément du contour de ω , se réduit à

$$(33) \quad p_{xz} dy - p_{xy} dz = 0;$$

équation qui est à satisfaire aux seuls points des contours des sections, et que l'on pouvait établir directement, soit au moyen du théorème des projections de plans de pression de l'art. 4, soit plus directement, en considérant qu'à toutes les actions moléculaires traversant l'élément superficiel $ds dx$ répondent des actions égales et parallèles qui traversent l'une ou l'autre de ses projections $dy dx$ et $-dz dx$ et qui peuvent les remplacer.

15. *Premières conséquences de ces données et conditions.*

La seconde et la troisième équation indéfinie (32), vu les expressions (7) de p_{xz} , p_{xy} , reviennent à $\frac{dg_{xy}}{dx} = 0$, $\frac{dg_{xz}}{dx} = 0$, ou (formule 13) à

$$(34) \quad \frac{d^2 u}{dx dy} + \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dx dz} + \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

qui, en mettant pour $\frac{du}{dx}$ sa valeur (29) $\frac{Mz}{EI}$ où le moment M n'est fonction que de x , sont la même chose que

$$(35) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad -\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EI}.$$

On voit déjà par $\frac{d^2 v}{dx^2} = 0$ que les fibres, après la flexion, n'ont aucune courbure dans le sens y , ou se projettent sur le plan xy suivant des lignes droites, en sorte qu'elles sont toutes des courbes planes; et, par $-\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$, que leurs projections sur le plan xz de flexion de l'axe ont toutes sensiblement la même courbure, aux points appartenant à une même section ω , car $-\frac{d^2 w}{dx^2}$ est à peu près, comme on l'a dit déjà, l'inverse de leur rayon de courbure.

On a donc, comme ρ désigne ce rayon,

$$(36) \quad \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{z}{\rho}, \quad p_{xx} = E \frac{z}{\rho};$$

en sorte que les formules (1), (2) de la théorie ordinaire sont une suite de nos données et sont vraies quand celles-ci se réalisent.

Mais la première équation d'équilibre (32) $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\frac{z}{I} \frac{dM}{dx}$ prouve que lorsque le moment M , ou la courbure $\frac{1}{\rho}$, est variable, les composantes de pression p_{xy} , p_{xz} et par conséquent les glissements g_{xy} , g_{xz} ne sauraient avoir une valeur nulle à la fois, d'où il suit bien (art. 2) que les sections s'inclinent sur les fibres.

Les mêmes équations (34) $\frac{d^2 v}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ montrent qu'en

différentiant deux fois par rapport à x celles (29) $\frac{dv}{dy} = -\varepsilon \frac{Mz}{EI}$, $\frac{dw}{dz} = -\varepsilon' \frac{Mz}{EI}$, on doit avoir zéro dans le second membre; d'où

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = 0.$$

En sorte qu'il suit encore de nos suppositions ou *données*, que le moment M des forces extérieures ne peut varier que linéairement avec la coordonnée x dont il dépend, ou qu'on peut poser, puisque nous avons appelé $P a$ la valeur donnée de M pour $x = 0$,

$$(37) \quad M = P(a - x),$$

en sorte que la constante a représente l'abscisse du point (qui peut être situé dans le prolongement du prisme) pour lequel ce moment variable s'annule.

Et $-P$ est la résultante, dans le sens z , des forces extérieures qui font fléchir, et, aussi (pour l'équilibre de translation latérale) des pressions tangentielles sur les sections ω ; de sorte qu'on a, pour toutes,

$$(38) \quad \int_0^\omega p_{xz} d\omega = -P.$$

Le cas particulier de la flexion égale ou en arc de cercle répond à P nul, a infini, mais leur produit Pa fini et égal au moment M alors constant d'un bout à l'autre du prisme, puisque x doit être effacé devant a , en sorte que les forces se réduisent à un couple, et le rayon de courbure $\rho = \frac{EI}{M}$ (expression 36) est constant aussi.

16. Première intégration.

Ceci posé, une première intégration des équations (29) $\frac{du}{dx} = \frac{Mz}{EI}$, $\frac{dv}{dy} = -\varepsilon \frac{Mz}{EI}$, $\frac{dw}{dz} = -\varepsilon' \frac{Mz}{EI}$, $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \varepsilon'' \frac{Mz}{EI}$, eu égard à celles (31) donnant u , v , w , $\frac{du}{dz}$ nuls à l'origine et v , $\frac{dv}{dz}$ nuls partout sur l'axe, et à celle (35) $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$, donne facilement, comme on va voir,

en mettant pour M sa valeur (37) $P(a-x)$,

$$(39) \quad \begin{cases} u = P \frac{2ax - x^2}{2EI} z + F(y, z), & v = -P \frac{a-x}{2EI} (2\epsilon yz - \epsilon'' z^2), \\ w = g_0 x + P \frac{a-x}{2EI} (\epsilon y^2 - \epsilon' z^2) - P \frac{3ax^2 - x^3}{6EI}; \end{cases}$$

g_0 étant une constante (qui représente le glissement g_{xz} à l'origine des coordonnées) et $F(y, z)$ une fonction qui doit être telle, qu'on ait

$$(40) \quad F=0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dz}=0 \quad \text{pour} \quad y=0, \quad z=0,$$

$$(41) \quad f \frac{d^2 F}{dy^2} + (h'' + h''') \frac{d^2 F}{dy dz} + e \frac{d^2 F}{dz^2} = P \frac{E - \epsilon f - \epsilon' e + \epsilon'' h''}{EI} z + \epsilon \frac{h''' - h''}{EI} P y \quad \text{partout,}$$

$$(42) \quad \left\{ \left(h'' - f \frac{dz}{dy} \right) \left(\frac{dF}{dy} + P \frac{2\epsilon yz - \epsilon'' z^2}{2EI} \right) + \left(e - h''' \frac{dz}{dy} \right) \left(\frac{dF}{dz} + g_0 + P \frac{\epsilon' z^2 - \epsilon y^2}{2EI} \right) = 0 \right. \\ \left. \text{aux points du contour des sections.} \right.$$

En effet, la valeur de u est donnée immédiatement par l'intégration de (29) $\frac{du}{dx} = \frac{P(a-x)}{EI} z$. Celles de (29) $\frac{dv}{dy} = -\epsilon \frac{Mz}{EI}$, $\frac{dw}{dz} = -\epsilon' \frac{M}{EI}$ donnent $v = -\epsilon \frac{Myz}{EI} + \mathcal{F}(x, z)$, $w = -\epsilon' \frac{Mz^2}{2EI} + f(x, y)$, ce qui, en substituant dans la dernière équation (29) $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \epsilon'' \frac{Mz}{EI}$, donne celle $-\epsilon \frac{My}{EI} + \frac{d}{dy} f(x, y) = \epsilon'' \frac{Mz}{EI} - \frac{d}{dz} \mathcal{F}(x, z)$, qui ne peut être satisfaite, M étant fonction de x seul, qu'autant que les deux membres sont une même quantité constante ou fonction de x seul. En la représentant par X, on tire, en intégrant de nouveau, $\mathcal{F}(x, z) = \frac{\epsilon'' Mz^2}{2EI} - Xz + \text{const.}$; d'où, en substituant, $v = -\epsilon \frac{Myz}{EI} + \frac{\epsilon'' Mz^2}{2EI} - Xz + \text{const.}$ et les conditions (31) $v=0$ et $\frac{dv}{dz}=0$ pour $y=0$, $z=0$ prouvent que cette quantité X est nulle ainsi que la constante, ce qui donne l'expression (39) de v . Quant à w , puisque $X = -\epsilon \frac{My}{EI} + \frac{d}{dy} f(x, y)$ est nul, on a $f(x, y) = \frac{\epsilon My^2}{2EI} + f_1(x)$, en sorte que, comme $\frac{d^2 M}{dx^2} = 0$,

l'équation (35) $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ donne $-\frac{M}{EI} = \frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} = \frac{d^2 f_1 x}{dx^2}$; d'où $f_1(x) = -\frac{1}{EI} \iint M dx^2 = -P \frac{3ax^2 - x^3}{6EI} + g_0 x$, g_0 étant une constante, et l'on a bien ainsi la valeur (39) de w .

Et quant aux conditions auxquelles nous astreignons la fonction $F(y, z)$, celles (40) résultent de (31) $u = 0$ et $\frac{du}{dz} = 0$ à l'origine; celles (41) et (42) ou les équations différentielles indéfinie et définie résultent de la substitution dans celles (32) $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\frac{z}{I} \frac{dM}{dx}$ et (33) $p_{xz} - p_{xy} \frac{dz}{dy} = 0$ des expressions (7) $p_{xz} = eg_{xz} + h''g_{xy}$, $p_{xy} = h'''g_{xz} + fg_{xy}$ et (37) $M = P(a - x)$ en faisant, d'après celles (39) de u, v, w , $g_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{dF}{dz} + g_0 + P \frac{\epsilon' z^2 - \epsilon y^2}{2EI}$, $g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{dF}{dy} + P \frac{2\epsilon yz - \epsilon'' z^2}{2EI}$.

La solution complète de la question posée, qui a pour objet, avons-nous dit, après avoir reconnu la compatibilité des données, de déterminer les grandeurs et les directions de tous les déplacements et de toutes les forces, se réduit donc à trouver, par l'intégration de l'équation aux différences partielles du second ordre (41), une fonction F de y, z et une valeur de la constante g_0 , qui satisfassent aux conditions (40) et (42) pour les différentes formes qu'on peut attribuer au contour des sections.

On peut déjà juger (*voyez plus loin*, art. 50) que cette solution existe toujours, en sorte que les suppositions prises pour nos données sont compatibles et qu'il y a, ainsi, toujours des manières de répartir les forces extérieures sur les bases extrêmes pour lesquelles la flexion s'opérera dans les conditions exprimées ci-dessus.

Mais il convient de donner plusieurs exemples de détermination complète des déplacements u, v, w , et des diverses circonstances de la flexion, dont plusieurs sont omises par la théorie ordinaire et doivent être prises en considération dans les applications.

Nous nous bornerons pour cela au cas où la texture de la matière offre des plans de symétrie perpendiculaires aux y et aux z , outre

ceux perpendiculaires aux x . Alors

$$(43) \quad h'' = 0, \quad h''' = 0, \quad e'' = 0; \quad \text{d'où } p_{xy} = fg_{xy}, \quad p_{xz} = eg_{xz}, \quad g_{yz} = 0.$$

Posons alors, pour rendre les expressions plus simples ou plus symétriques,

$$(44) \quad \frac{\varepsilon f}{E} = \eta, \quad \frac{\varepsilon' e}{E} = \eta', \quad f = G, \quad e = G',$$

en sorte que G, G' sont les *coefficients d'élasticité de glissement* dans les sens y et z , nous avons

$$(45) \quad \begin{cases} u = P \frac{2ax - x^2}{2EI} z + F(y, z), & v = -\eta P \frac{a-x}{GI} yz, \\ w = g_0 x + P \frac{a-x}{2I} \left(\frac{\eta y^2}{G} - \frac{\eta' z^2}{G'} \right) - P \frac{3ax^2 - x^3}{6EI}, \end{cases}$$

g_0 étant une constante et $F(y, z)$ une fonction qui doivent satisfaire à

$$(46) \quad G \frac{d^2 F}{dy^2} + G' \frac{d^2 F}{dz^2} = P \frac{1 - \eta - \eta'}{I} z \quad \text{partout,}$$

$$(47) \quad F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dz} = 0 \quad \text{aux points } y = 0, \quad z = 0,$$

$$(48) \quad \begin{cases} -G \left(\frac{dF}{dy} + \eta \frac{Pyz}{GI} \right) dz + G' \left[\frac{dF}{dz} + g_0 + \frac{P}{2I} \left(\frac{\eta' z^2}{G'} - \frac{\eta y^2}{G} \right) \right] dy = 0 \\ \text{au contour des sections.} \end{cases}$$

17. *Répartition des forces. — Circonstances qui accompagnent la flexion inégale. — Inclinaison et courbure des sections. — Inclinaison mutuelle des fibres. — Flèche complète de flexion.*

Avant d'effectuer dans quelques cas l'intégration de (46) qui doit déterminer F et g_0 , il est bon de donner plusieurs expressions qui dépendent de ces deux quantités, et que nous n'aurons plus qu'à particulariser pour les divers exemples.

D'abord, la *répartition* des forces intérieures sur une section quelconque ou des forces extérieures sur les bases ou sections extrêmes sera fournie par

$$(49) \quad \begin{cases} p_{xx} = P \frac{a-x}{I} z, & p_{xy} = G \left(\frac{dF}{dy} + \eta \frac{Pyz}{GI} \right), \\ p_{xz} = G' \left[\frac{dF}{dz} + g_0 + \frac{P}{2I} \left(\frac{\eta' z^2}{G'} - \frac{\eta y^2}{G} \right) \right]. \end{cases}$$

Secondement, l'inclinaison que prend sur les sections ω , en se courbant, l'axe du prisme, dans son plan xz , est la valeur (art. 5) de $g_{xz} = \frac{P_{xz}}{G}$ pour $y = 0, z = 0$. C'est donc, d'après (49), (47), la constante

$$g_0;$$

de sorte que cette inclinaison est la même sur toutes les sections.

En troisième lieu, l'équation de la surface courbe des sections, ou de la surface dans laquelle s'est changé le plan de celle ω , située primitivement à la distance x de l'origine, s'obtiendra évidemment, x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées d'un de ses points, en éliminant y et z entre les trois équations suivantes, après y avoir mis, pour u, v, w , leurs valeurs (45) :

$$x_1 = x + u, \quad y_1 = y + v, \quad z_1 = z + w.$$

Or on peut lui donner une forme simple. En effet, le point central de cette surface, répondant à $y = 0, z = 0$, aura ainsi pour coordonnées

$$x_1 = x, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = g_0 x - P \frac{3ax^2 - x^3}{6EI};$$

si l'on y transporte l'origine, et si l'on prend de nouvelles coordonnées rectangles u', y', z' dont la seconde, y' , soit parallèle à y , et dont la première, u' , soit parallèle à la tangente à l'axe fléchi du prisme en cet endroit, en sorte que u' mesure la distance d'un point quelconque de la section au plan normal $y'z'$ mené à cet axe par le point central, comme la troisième des expressions qu'on vient d'écrire donne, étant différenciée, $g_0 - P \frac{2ax - x^2}{2EI}$ pour le petit angle $\widehat{u'x}$ de l'axe des u' avec celui des x ou x_1 , on aura, en faisant $\cos \widehat{y'x_1} = 0$, et $\cos \widehat{z'x_1} = -\sin \widehat{u'x_1} = -g_0 + P \frac{2ax - x^2}{2EI}$ dans la formule de transformation $x_1 = x + u' \cos \widehat{u'x_1} + y' \cos \widehat{y'x_1} + z' \cos \widehat{z'x_1}$, où l'on peut remplacer $\cos \widehat{u'x_1}$ par 1, dont il ne diffère que d'une quantité du second ordre :

$$x + u' + \left(-g_0 + P \frac{2ax - x^2}{2EI} \right) z' = x_1 = x + P \frac{2ax - x^2}{2EI} z + F(y, z).$$

Et, en négligeant toujours les quantités très-petites du second ordre, on peut y mettre y' , z' pour y , z , d'où l'on déduit pour l'équation générale de la surface courbe affectée par la section ω ,

$$(50) \quad u' = g_0 z' + F(y', z').$$

Comme cette équation ne contient pas x , on voit que les sections prennent, par la flexion, toutes la même courbure comme la même inclinaison sur l'axe du prisme.

Et c'est pour cela, comme nous avons dit art. 2, que les diverses fibres se dilatent précisément comme si les sections restaient planes et normales à l'axe.

On peut remarquer aussi que les fibres fléchies n'ont pas, à leur passage par une même section, leurs tangentes toutes parallèles. Une fibre quelconque fait, avec la fibre centrale, un petit angle qui, projeté sur les plans xy et xz , a pour mesures les excès de $\frac{d\phi}{dx}$ et $\frac{d\psi}{dx}$ sur leurs valeurs pour $y = 0$, $z = 0$, c'est-à-dire, eu égard à $\frac{1}{\rho} = P \frac{a-x}{EI}$ résultant de (36) et (37):

$$(51) \quad \eta \frac{P y z}{GI} = -\varepsilon y z \frac{d \frac{1}{\rho}}{dx}, \text{ et } \frac{P}{2I} \left(\frac{\eta' z^2}{G'} - \frac{\eta y^2}{G} \right) = -\frac{\varepsilon y^2 - \varepsilon' z^2}{2} \frac{d \frac{1}{\rho}}{dx}.$$

Ces très-petites inclinaisons mutuelles des fibres dépendent, comme l'on voit, de la variabilité, avec x , de leurs contractions transversales ∂_y , ∂_z par suite de celle de la courbure $\frac{1}{\rho}$ dont dépendent les dilatations longitudinales $\partial_x = \frac{z}{\rho}$ avec lesquelles elles ont les rapports ε , ε' .

Elles expliquent les différences que nous trouverons entre $\frac{du'}{dy'}$, $\frac{du'}{dz'}$ et les inclinaisons g_{xy} , g_{xz} des fibres sur les sections.

Enfin on peut tirer de la valeur (45) de $-w$, pour $y = 0$, $z = 0$, $x = a$, ce qu'on appelle la *flèche de flexion*, ou le déplacement transversal de l'axe de prisme au point $x = a$ qui est ordinairement l'extrémité libre où la force P est appliquée. En l'appelant f , on a

$$(52) \quad f = -g_0 a + \frac{P a^3}{3EI}.$$

Comme g_0 est une quantité négative, cette flèche *complète* est un peu plus grande que ce que donne l'expression généralement usitée $\frac{Pa^3}{3EI}$.

Cherchons maintenant F et g_0 pour diverses formes du contour.

18. Courbes-contour des sections pour lesquelles la fonction arbitraire F à déterminer est entière en y, z . Contour elliptique, etc.

Avant de déterminer la forme de F pour le cas de la section rectangle (voy. art. 24, 25), nous résoudrons un problème inverse, celui de connaître pour quelles formes du contour de la section cette fonction a l'expression la plus simple, savoir :

$$F(y, z) = A_0 y + A y^2 + A' y z + A'' z^2 + B y^3 + B' y^2 z + B'' y z^2 + B''' z^3 + C y^4 + C' y^3 z + \dots,$$

où $A_0, A, A', \dots$, sont des constantes, et où nous n'avons dû mettre ni terme constant ni terme du premier degré en z , afin que F s'évanouisse ainsi que $\frac{dF}{dz}$ pour $y = 0, z = 0$.

On trouve, en substituant dans l'équation indéfinie (46), que pour qu'elle soit satisfaite, quels que soient y et z , il faut, entre les coefficients, des relations qui en réduisent le nombre, d'où

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} F(y, z) = & A_0 y + A \left(y^2 - \frac{G}{G'} z^2 \right) + A' y z + B' \left(y^2 z - \frac{G}{3G'} z^3 \right) + B'' \left(y z^2 - \frac{G'}{3G} y^2 \right) + \\ & + P \frac{1-\eta-\eta'}{6G'I} z^3 + C \left(y^4 - 6 \frac{G}{G'} y^2 z^2 + \frac{G^2}{G'^2} z^4 \right) + C'' \left(y z^3 - \frac{G'}{G} y^3 z \right) + \dots \end{aligned} \right.$$

Substituant dans la condition définie (48) $-G[\dots]dz + G'[\dots]dy = 0$, nous aurons une équation en y, z, dy, dz , qui sera l'équation différentielle de toutes les courbes-contour pour lesquelles $F(y, z)$ a une expression entière en y, z , car cette équation convient à tous les points des contours des sections.

Elle est facilement intégrable sous forme finie lorsque l'on réduit l'expression (53) de $F(y, z)$ aux termes en $y^2 z$ et z^3 , qui suffisent pour obtenir une multitude de courbes de tous les degrés. Et l'on simplifie en prenant alors, au lieu du coefficient B' , seul subsistant,

une autre indéterminée m ayant avec B' la relation

$$m = 1 - \eta - \frac{2GI}{P} B',$$

ce qui donne à (53) la forme

$$(54) \quad F(\gamma, z) = P \frac{m-\eta'}{6GI} z^3 + P \frac{1-m-\eta}{2GI} \gamma^2 z,$$

en sorte que l'on a, en substituant dans la condition définie (48), cette équation différentielle des divers contours de section

$$(55) \quad -P \frac{1-m}{I} \gamma z dz + \left(G' g_0 + P \frac{m}{2I} z^2 + G' P \frac{1-2\eta-m}{2GI} \gamma^2 \right) d\gamma = 0.$$

On la rend homogène en multipliant par γ et en faisant

$$\gamma^2 = \gamma', \quad z^2 + \frac{2G'I}{mP} g_0 = z',$$

ce qui permet de séparer les variables en posant $z' = t\gamma'$, et l'on obtient cette intégrale en passant des logarithmes aux nombres, multipliant par γ^2 et représentant par C une constante

$$(56) \quad C \gamma^{\frac{m}{1-m}} + \frac{G'}{G} \frac{1-2\eta-m}{3m-2} \gamma^2 + z^2 = - \frac{2G'I}{mP} g_0.$$

Cette équation, si l'on fait $C = 0$, représente des ellipses.

Si l'on donne à C d'autres valeurs que zéro, et si l'on attribue aussi à l'arbitraire m différentes grandeurs, on a une multitude d'autres courbes symétriques par rapport à l'axe des γ , et qui le sont ou ne le sont pas par rapport à l'axe des z , selon que l'exposant $\frac{m}{1-m}$ est regardé comme pair ou comme impair.

Il est regardé comme pair, quelle que soit sa valeur numérique entière ou fractionnaire, lorsque l'on conserve à $\gamma^{\frac{m}{1-m}}$ le signe + quand γ devient négatif. C'est ce que l'on peut faire pour tout exposant impair tel que 1 ou $\frac{9}{10}$ en leur substituant $\frac{2}{2}$ et $\frac{18}{20}$ ou plutôt $\frac{2N}{2N+1}$,

$\frac{18N}{20N+1}$, N étant un nombre entier infiniment grand. Le même exposant est regardé ou *traité comme impair* lorsqu'on change le signe de $y^{\frac{m}{1-m}}$ avec celui de y , ce qui est permis, même avec tout exposant pair tel que 2 ou $\frac{4}{3}$, en écrivant $y\sqrt{y^2}$, $y\sqrt[3]{y^2}$ au lieu y^2 et $y^{\frac{4}{3}}$ et ne prenant le radical que positivement, ou bien en remplaçant cet exposant par un autre, $\frac{2N+1}{N}$, $\frac{4N+1}{3N}$, dont il diffère infiniment peu.

Si l'on appelle

c le demi-axe de ces courbes dans le sens z ou $-z$;

b leur demi-axe dans le sens $+y$, en sorte que

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } y=0 \text{ on ait } z=\pm c, \\ \text{Pour } z=0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y=+b \text{ toujours,} \\ \text{et aussi } y=-b, \text{ mais seulement quand } \frac{m}{1-m} \end{array} \right.$$

est traité comme pair,

on aura pour la constante g_0 , en faisant $y=0$, $z^2=c^2$,

$$(58) \quad g_0 = -\frac{mP}{2G'I} c^2;$$

et pour celle C , en faisant $y=b$, $z=0$, une valeur qui, substituée dans l'équation (56) de la courbe, lui donne cette forme

$$(59) \quad \left(1 - \frac{1-2\eta-m}{3m-2} \frac{G'b^2}{Gc^2}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}} + \frac{1-2\eta-m}{3m-2} \frac{G'b^2}{Gc^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Lorsque $\frac{m}{1-m}$ est traité comme pair, il faut et il suffit, pour que la courbe ou partie de courbe coupant l'axe des y aux points $y=\pm b$ soit fermée et capable, par conséquent, de servir de contour aux sections des prismes, que $\frac{z}{c}$ ait une valeur réelle lorsqu'on fait $\frac{y}{b}=1-\alpha$, α étant un nombre positif très-petit. Comme on trouve

$$\frac{z}{c} = \sqrt{\frac{\alpha}{1-m} \left[m \left(1 + \frac{G'b^2}{Gc^2} \right) - (1-2\eta) \frac{G'b^2}{Gc^2} \right]},$$

cette condition revient à ce qu'on ait ($1 - 2\eta$ étant positif)

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \text{ compris entre } \frac{1-2\eta}{1 + \frac{Gc^2}{G'b^2}} \text{ et } 1, \\ \text{ou } \frac{m}{1-m} > \frac{1-2\eta}{\frac{Gc^2}{G'b^2} + 2\eta}. \end{array} \right.$$

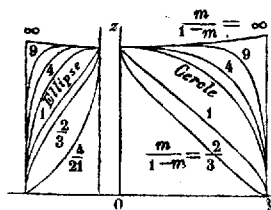
Supposons, par exemple,

$$G' = G, \quad \varepsilon = \frac{1}{4}, \quad \frac{E}{G} = \frac{5}{2}, \quad \text{d'où } \eta = \frac{1}{10}, \quad 1 - 2\eta = \frac{4}{5};$$

m peut être tout nombre compris entre $\frac{4b^2}{5(b^2+c^2)}$ et 1, ou $\frac{m}{1-m}$ peut être tout nombre positif au-dessus de $\frac{4b^2}{b^2+5c^2}$, et l'équation (59) devient successivement

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } m = \frac{4b^2}{5(b^2+c^2)}, \quad \frac{m}{1-m} = \frac{4b^2}{b^2+5c^2}; \\ \quad \left(1 + \frac{2b^2}{5c^2-b^2}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{4b^2}{5c^2+b^2}} - \frac{2b^2}{5c^2-b^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \\ \text{Pour } m = \frac{1}{2}, \quad \frac{m}{1-m} = 1; \quad \left(1 + \frac{3b^2}{5c^2}\right) \sqrt{\frac{y^2}{b^2}} - \frac{3b^2}{5c^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \\ m = \frac{2c^2+0,8b^2}{3c^2+b^2}; \quad \text{terme en } \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}} \text{ disparaît;} \\ \quad \text{Ellipse } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \\ m = \frac{4}{5}, \quad \frac{m}{1-m} = 4; \quad \text{terme en } \frac{y^2}{b^2} \text{ disparaît;} \\ \quad \text{Fausse ellipse } \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \\ m = \frac{9}{10}, \quad \frac{m}{1-m} = 9; \quad \left(1 + \frac{b^2}{7c^2}\right) \sqrt{\frac{y^{18}}{b^{18}}} - \frac{b^2}{7c^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \\ m = 1, \quad \frac{m}{1-m} = 2.\infty; \quad \left(1 + \frac{b^2}{5c^2}\right) \left(\frac{y^2}{b^2}\right)^\infty - \frac{b^2}{5c^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{array} \right.$$

La figure ci-contre donne le quart des courbes représentées par ces équations (61) dans les deux hypothèses $c = b$ et $c = 2b$. La ligne mixte qui les enveloppe répond à $m = 1$, ou l'exposant $\frac{m}{1-m} =$ l'infini pair. Elle se compose, pour les valeurs de $\frac{y^2}{b^2} < 1$, de portions des deux branches de



l'hyperbole ayant pour équation

$$-\frac{b^2}{5c^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et, pour les valeurs $\frac{y^2}{b^2} = 1$, des deux droites $y = \pm b$, car $y^2 = b^2$ rend z indéterminé. Ce contour mixtiligne se rapproche d'ailleurs beaucoup de la courbe continue qu'on obtient pour $\frac{m}{1-m} = 100$ ou tout autre nombre très-grand.

Quand on fait $m = \frac{2}{3}$, ou $\frac{m}{1-m} = 2$, l'équation (59) contient deux termes infinis dont la différence a une valeur finie facile à obtenir en mettant d'abord, pour m , $\frac{2}{3}$ plus une quantité infiniment petite, ce qui produit une équation transcendante

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - (1 - 6\eta) \frac{G' b^2}{G c^2} \frac{y^2}{b^2} \log \frac{y}{b} = 1$$

représentant une courbe légèrement différente de celle $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Aussi l'ellipse s'obtient, non pas en faisant l'exposant $\frac{m}{1-m} = 2$, mais en donnant, comme nous avons dit, à m la valeur suivante qui annule le coefficient de $\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}}$,

$$(62) \quad m = \frac{2 G c^2 + (1 - 2\eta) G' b^2}{3 G c^2 + G' b^2}.$$

Chaque ellipse, répondant à un rapport déterminé $\frac{b}{c}$ des axes, fait

partie d'une série de courbes dont les axes $2b$, $2c$ ont entre eux tous les rapports $\frac{b}{c}$ possibles, avec un même exposant $\frac{m}{1-m}$ compris entre 2 et $\frac{1}{2\eta} - 1$, ou une même valeur de la constante m entre $\frac{2}{3}$ et $1 - 2\eta$. Ainsi l'ellipse $b = c$, c'est-à-dire le cercle, est un cas particulier des courbes pour lesquelles on a

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} m = \frac{2G + (1-2\eta)G'}{3G + G'}, \\ \text{ou } m = \frac{7}{10}, \quad \frac{m}{1-m} = \frac{7}{3} \quad \text{quand } G = G', \quad \eta = \frac{1}{10}; \end{array} \right.$$

l'ellipse $c = 2b$ est un cas particulier des courbes où $m = \frac{8,8}{13}$, $\frac{m}{1-m} = \frac{44}{21}$, etc. Aussi il y a, comme on verra (art. 22), quelques propriétés communes à chaque section elliptique et à une série d'autres courbes pour lesquelles m est le même.

Les courbes de la série des *fausses ellipses* $\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, où l'exposant $\frac{m}{1-m}$ est $= 4$, ou plus généralement $= \frac{1}{2\eta} - 1$, sont les seules qui puissent se déduire les unes des autres en augmentant ou diminuant dans une même proportion les abscisses x sans faire varier les ordonnées z .

Nous trouverons aussi (art. 23), aux courbes à exposant $\frac{m}{1-m} = 9$ et plus généralement $\frac{1}{\eta} - 1$ traité comme pair, une propriété digne d'une attention particulière.

Quand l'exposant $\frac{m}{1-m}$ est traité comme impair, en sorte que $\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}}$ devienne négatif en même temps que x , les courbes ne sont plus symétriques par rapport à l'axe des z . Pour qu'elles soient fermées, il faut toujours que la condition (60) soit satisfaite; mais il faut, de plus, que $\frac{1-2\eta-m}{3m-2}$ soit positif, car on tire pour ce quotient une valeur

essentiellement positive en faisant, dans l'équation (59) de la courbe, $z = 0$, et $y =$ une valeur négative quelconque $-b'$. On doit donc avoir pour m et l'exposant $\frac{m}{1-m}$ des limites plus resserrées que celles (60), savoir

$$m \text{ compris entre } 1 - 2\eta \text{ et } \frac{2}{3}; \text{ ou } \frac{m}{1-m} \text{ entre } 2 \text{ et } \frac{1-2\eta}{2\eta},$$

c'est-à-dire entre 2 et 4 lorsque $\eta = \frac{1}{10}$. Mais cette condition nécessaire n'est pas encore suffisante; il faut aussi que le rapport $\frac{b}{c}$ reste entre certaines limites qui dépendent de la valeur attribuée à m . Sa limite supérieure est la valeur pour laquelle l'équation (59), avec $z = 0$, a deux racines $\frac{y}{b} = 1$, car, alors, il y a deux branches de la courbe qui se coupent au point $y = +b$, et ce point multiple se change en un sommet de courbe fermée quand on donne à $\frac{b}{c}$ une valeur moindre. On l'obtient en exprimant que $\frac{y}{b} = 1$ satisfasse non-seulement à l'équation (59) avec $z = 0$, mais encore à sa différentielle par rapport à $\frac{y}{b}$, ce qui donne pour la limite supérieure

$$(64) \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{G}{G'} \frac{m}{1-2\eta-m}}.$$

La limite inférieure du même rapport $\frac{b}{c}$ répond généralement à la limite supérieure de $\frac{b'}{c}$; elles s'obtiennent en exprimant que la même équation (59), avec $z = 0$ et en changeant le signe de son premier terme, a deux racines égales, ou que la dérivée de son premier membre s'annule pour la même valeur inconnue $\frac{y}{b} = \frac{b'}{b}$ que le même premier membre non différentié, ce qui donne deux équations entre lesquelles on élimine facilement $\frac{b'}{b}$; d'où la condition

$$(65) \quad \left(1 - \frac{1-2\eta-m}{3m-2} \cdot \frac{G' b^2}{G c^2}\right) \left(\frac{m}{1-2\eta-m} \cdot \frac{G c^2}{G' b^2}\right)^{\frac{m}{2-2m}} = \frac{2-2m}{3m-2},$$

servant à déterminer, par tâtonnement numérique, la valeur de $\frac{b}{c}$ qui est sa limite inférieure, pour chaque valeur de m ou de l'exposant $\frac{m}{1-m}$.

Par exemple, pour $\frac{m}{1-m} = \frac{5}{2}$, ou $m = \frac{5}{7}$, $1 - 2\eta = \frac{4}{5}$, $G' = G$, on trouve $\frac{5}{\sqrt{3}} = 2,886751$ et $1,05950$ pour ces deux limites de $\frac{b}{c}$. Et les quatre équations suivantes

$$(66) \left\{ \begin{array}{lll} \text{Pour } \frac{b}{c} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2,88675, & - & 4 \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{5}{2}} + 5 \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{b'}{b} = 0,366, \\ \frac{b}{c} = 2, & - & 1,4 \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{5}{2}} + 2,4 \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{b'}{b} = 0,540, \\ \frac{b}{c} = 1,5, & - & 0,35 \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{5}{2}} + 1,35 \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{b'}{b} = 0,7735, \\ \frac{b}{c} = 1,05950, & + & 0,326476 \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{5}{2}} + 0,673524 \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{b'}{b} = 2,72385, \end{array} \right.$$

représentent des ovals ou courbes ovoïdes dont un des bouts est plus gros que l'autre. Le petit bout dégénère en pointe pour la première et pour la dernière.

L'axe des z ne passe qu'exceptionnellement par le centre de gravité des sections terminées par ces contours non symétriques; mais peu importe, car comme les fibres (art. 15) restent toutes dans des plans, tout ce qui précède est également vrai si l'on prend pour axe des x l'une quelconque des fibres qui ne varieront pas de longueur.

19. Mode d'application et de distribution des forces extérieures qui, pour ces divers contours, rend exactes les formules ordinaires de la flexion due aux dilatations longitudinales. — Valeurs de l'inclinaison centrale g_0 . — Sections elliptique, circulaire, en fausse ellipse, etc.

Nous voyons que, pour des prismes ayant des sections de forme extrêmement variée, dont le contour est représenté par l'équation (59),

le problème des art. 3 et 14 a une solution complète, c'est-à-dire que les points de ces prismes éprouvent des déplacements satisfaisant aux conditions (1°, 2°, 3°) de l'art. 14, ou aux équations (29), (30) qui conduisent *exactement* aux formules ordinaires (36) de la flexion, ou pour mieux dire de la partie de la flexion due aux seules dilatations longitudinales; la courbure de l'axe pouvant être égale ou inégale d'un bout à l'autre du prisme, si, les faces latérales n'éprouvant aucune action, les bases extrêmes sont sollicitées par des forces ayant les expressions (49); expressions qui deviennent, en mettant (58) $\frac{-mPc^2}{2G'I}$ pour g_0 , et pour $F(x, y)$ sa valeur binôme du troisième degré (54):

$$(67) \quad p_{xx} = P \frac{a-x}{I} z, \quad p_{xy} = \frac{P(1-m)}{I} yz, \quad p_{xz} = -mP \frac{c^2-z^2}{2I} + \frac{G'}{G} P \frac{1-2\eta-m}{2I} y^2.$$

Comme la deuxième base extrême répond ordinairement à $x = a$, la composante normale p_{xx} est nulle à tous ses points, en sorte que les forces qui font fléchir n'y sont que tangentielles, et leur résultante $-P$ y est distribuée suivant des lois paraboloidales.

Par exemple :

1°. Pour $m = \frac{4}{5}$, $\eta = \eta' = \frac{1}{10}$, c'est-à-dire pour la fausse ellipse $\frac{y^4}{b^4} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ qui porte le chiffre 4 dans la figure de l'art. 18, et où le rapport des axes $2b, 2c$, peut être quelconque, on aura simplement

$$(68) \quad \begin{cases} F(y, z) = \frac{Pz}{60GI} (7z^2 + 3y^2), & g_0 = -\frac{2Pc^2}{5GI}, \\ \text{d'où } p_{xy} = \frac{Pyz}{5I}, & p_{xz} = -2P \frac{c^2-z^2}{5I}. \end{cases}$$

Le moment d'inertie $I = 4 \int_0^b dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{y^4}{b^4}}} z^2 dz = \frac{4c^3}{3} \int_0^b dy \left(1 - \frac{y^4}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$, et l'aire $\omega = 4 \int_0^b z dy = 4c \int_0^b dy \sqrt{1 - \frac{y^4}{b^4}}$ peuvent s'obtenir au moyen d'une fonction elliptique de première espèce en posant

$\frac{y}{b} = \cos \varphi$, car on leur donne ainsi la forme

$$\omega = \frac{4bc}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{2 \sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}, \quad I = \frac{4bc^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{4 \sin^4 \varphi - 4 \sin^6 \varphi + \sin^8 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Et comme les deux intégrales, considérées comme indéfinies, reviennent respectivement à

$$\frac{2}{3} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} - \frac{2}{3} \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi},$$

$$\frac{4}{7} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} - \frac{4}{7} \cos \varphi \sin \varphi \left(1 + \sin^2 \varphi - \frac{\sin^4 \varphi}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi},$$

on a, les seconds termes s'évanouissant aux limites, et en désignant

avec Legendre $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}$ par $F' \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \right)$ dont la valeur est

1,854074677301 (fin de sa table II^e) :

$$(69) \left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{8bc}{3\sqrt{2}} F' \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \right) = 3,496076 bc, \quad I = \frac{2}{7} c^2 \omega = 0,99888 bc^3, \\ \text{ou, environ, } I = bc^3, \quad \omega = \frac{7}{2} bc, \quad \text{d'où, à très-peu près,} \\ p_{xy} = \frac{P}{5bc^3} yz, \quad p_{xz} = -\frac{2P}{5bc} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right); \text{ et } g_0 = -\frac{2P}{5G'bc} = -\frac{7}{5} \frac{P}{G'\omega}. \end{array} \right.$$

La relation $I = \frac{2c^2}{7} \omega$, qui est exacte, pouvait s'obtenir de l'expression

(68) de p_{xz} eu égard à ce que l'on a (38) $\int p_{xz} d\omega = -P$.

Cette même relation $\int p_{xz} d\omega = -P$ donne pour toutes les courbes (59), quel que soit m , en représentant par I' le moment d'inertie

$\int \gamma^2 d\omega :$

$$(70) \quad m \frac{c^2 \omega - I}{2I} = 1 + \frac{1 - 2\eta - m}{2} \frac{G'I}{GI},$$

ce qui offre une propriété commune à toutes ces courbes.

2°. Pour $m = \frac{9}{10}$, ou $= \frac{18}{20}$ puisqu'on le considère comme pair (art. précédent), ce qui donne des courbes se rapprochant ordinairement d'un rectangle dont les angles auraient été abattus en pan coupé, on a, en prenant $\eta = \eta' = 0,1$, $G = G'$,

$$(71) \quad F(\gamma, z) = \frac{2Pz^3}{15GI}, \quad p_{xy} = \frac{P\gamma z}{10I}, \quad p_{xz} = -\frac{9P}{20I} \left(c^2 - z^2 + \frac{\gamma^2}{9} \right), \quad g_0 = -\frac{9Pc^2}{20G'I}.$$

Et l'on trouve, par quadratures,

$$\text{Quand } b = c, \text{ que } \omega = 3,8218 c^2, \quad I = 1,2326 c^4 = \frac{\omega c^2}{3,1006}, \quad g_0 = 1,3953 \frac{P}{G'\omega},$$

$$\text{Quand } c = 2b, \text{ que } \omega = 3,7676 bc, \quad I = 1,1559 bc^3 = \frac{\omega c^2}{3,2596}, \quad g_0 = -1,4668 \frac{P}{G'\omega}.$$

3°. Pour $m = 1 = \frac{2}{2}$, ou si (article précédent) le contour est le quadrilatère mixtiligne qui embrasse les autres figures à exposant pair, on a

$$(72) \quad F(\gamma, z) = -\frac{3Pz}{20GI} \left(z^2 + \frac{\gamma^2}{3} \right), \quad p_{yz} = 0, \quad p_{xz} = -\frac{P}{2I} \left(c^2 - z^2 + \frac{\gamma^2}{5} \right), \quad g_0 = -\frac{Pc^2}{2G'I};$$

les actions tangentielles sont nulles dans le sens γ .

4°. Pour le contour elliptique qui offre un cas plus compliqué puisque, comme nous avons vu, il ne peut pas être donné par une valeur de m indépendante du rapport $\frac{b}{c}$ des axes, il faut prendre pour m la valeur (62), ce qui, eu égard à ce qu'on a dans l'ellipse,

$$(73) \quad \omega = \pi bc, \quad I = \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{2} \int_0^c r^2 \cdot 2\pi r dr = \pi \frac{bc^3}{4} = \frac{\omega c^2}{4}.$$

donne

$$(74) \quad m = \frac{2 G c^2 + (1 - 2 \eta) G' b^2}{3 G c^2 + G' b^2}, \quad g_0 = -\frac{m P c^2}{2 G' I} = -\frac{2 P}{G' \omega} \cdot \frac{2 G c^2 + (1 - 2 \eta) G' b^2}{3 G c^2 + G' b^2},$$

$$(75) \quad F(y, z) = \frac{(2 - 3 \eta') G c^2 + (1 - 2 \eta - \eta') G' b^2}{3 G c^2 + G' b^2} \cdot \frac{2 P z^2}{3 G' \omega c^2} + \frac{(1 - 3 \eta) G c^2 + \eta G' b^2}{3 G c^2 + G' b^2} \cdot \frac{2 P y^2 z}{G \omega c^2},$$

$$(76) \quad p_{xy} = \frac{G c^2 + 2 \eta G' b^2}{3 G c^2 + G' b^2} \cdot \frac{4 P y z}{\omega c^2}, \quad p_{xz} = -\frac{4 P}{3 \omega} \left[1 - \frac{z^2}{c^2} + \frac{(1 - 6 \eta) G' b^2}{6 G c^2 + 2 G' b^2} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} - 3 \frac{y^2}{b^2} \right) \right].$$

La valeur de p_{xz} donne bien (38) $\int p_{xz} d\omega = -P$, vu que $\int y^2 d\omega = \frac{\omega b^2}{4}$, ce qui offre une vérification; et l'on a aussi $\int p_{xy} d\omega = 0$.

5°. Pour le contour circulaire, et la contexture étant supposée égale dans les deux sens transversaux, on a $b = c$, $G = G'$, $\eta = \eta'$, $\omega = \pi c^2$, $I = \frac{\omega c^2}{4}$, d'où (expressions 74, 75, 76)

$$(77) \quad \begin{cases} m = \frac{3 - 2\eta}{4}, & g_0 = -\frac{(3 - 2\eta) P c^2}{8 G I} = -\frac{(3 - 2\eta) P}{2 G \omega} = -1,4 \frac{P}{G \omega}, \text{ si } \eta = \frac{1}{10}, \\ F(y, z) = \frac{P(1 - 2\eta)}{2 G \omega c^2} (y^2 + z^2) z, \\ p_{xy} = \frac{P(1 + 2\eta)}{\omega c^2} y z, & p_{xz} = -P \frac{3 - 2\eta}{2 \omega} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) + P \frac{1 - 6\eta}{2 \omega} \frac{y^2}{c^2}. \end{cases}$$

On aurait la même expression de $g_0 = -\frac{(3 - 2\eta) P c^2}{8 G I} = -\frac{7}{10} \frac{P c^2}{G I}$

pour toutes les sections représentées par $\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{14}{6}} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$, c'est-à-dire (art. précéd.) pour toutes les courbes-contour de la série déterminée par la valeur $\frac{m}{1 - m} = \frac{7}{3}$ de l'exposant traité comme pair, série dont le cercle fait partie et répond au rapport $\frac{b}{c} = 1$ des axes.

6°. On a encore, si $G' = G$, $\eta' = \eta = 0,1$,

$$(78) \quad \begin{cases} \text{Pour une ellipse } c = 1,5 b, & g_0 = -\frac{P}{G \omega} \cdot \frac{4 c^2 + 1,6 b^2}{3 c^2 + b^2} = -1,368 \frac{P}{G \omega}, \\ \text{idem } c = 2 b, & \text{idem} = -1,354 \frac{P}{G \omega}. \end{cases}$$

En comparant ces valeurs de g_0 pour les divers contours, on voit que l'inclinaison de l'axe sur les sections est, ou exactement ou à peu près, les $\frac{7}{5}$ de ce qu'elle serait si la section en s'inclinant restait plane, ou si g_{xz} était constant en tous ses points en sorte qu'on eût (équation 38) $\omega p_{xz} = \omega G' g_{xz} = -P$.

20. Mêmes contours. Flèche complète de flexion.

Vu la valeur (58) $g_0 = -\frac{m P c^2}{2 G' I}$, la flèche de flexion (52) $-g_0 a + \frac{P a^3}{3 E I} = \frac{P a^3}{3 E I} \left(1 + \frac{3 m E c^2}{2 G' a^2} \right)$ a les valeurs suivantes si l'on suppose $G = G'$:

$$(79) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour la section circulaire et pour toute section } m = \frac{3-2\eta}{4} \left\{ \frac{P a^3}{3 E I} \left(1 + \frac{9-6\eta}{8} \frac{E c^2}{G' a^2} \right) = \frac{P a^3}{3 E I} \left(1 + \frac{21}{8} \frac{c^2}{a^2} \right) \text{ si } \eta = \frac{1}{10}, \frac{E}{G'} = \frac{5}{2} \right. \\ \\ \text{Pour une section elliptique et pour toute section } m = \frac{2c^2 + (1-2\eta)b^2}{3c^2 + b^2} \left\{ \frac{P a^3}{3 E I} \left(1 + \frac{6c^2 + 3(1-2\eta)b^2}{6c^2 + 2b^2} \frac{E c^2}{G' a^2} \right) = \frac{P a^3}{3 E I} \left(1 + \frac{15c^2 + 6b^2}{6c^2 + 2b^2} \frac{c^2}{a^2} \right) \text{ id.} \\ \\ \text{Pour toute section en fausse ellipse du 4° degré} \left\{ \frac{P a^3}{3 E I} \left(1 + \frac{6}{5} \frac{E c^2}{G' a^2} \right) = \frac{P a^3}{3 E I} \left(1 + 3 \frac{c^2}{a^2} \right) \text{ id.} \\ \\ \text{Pour la section symétrique du degré 9} = \frac{18}{2} \left\{ \frac{P a^3}{3 E I} \left(1 + \frac{27}{20} \frac{E c^2}{G' a^2} \right) = \frac{P a^3}{3 E I} \left(1 + \frac{27}{8} \frac{c^2}{a^2} \right) \text{ id.} \right. \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{quel que soit le rapport} \\ \text{de } c \text{ à } b. \end{array} \right.$$

Le second terme entre parenthèses rend la flèche *complète* en ce qu'elle représente la proportion de ce qu'on néglige dans la théorie ordinaire où l'on ne tient pas compte des glissements transversaux ou de l'inclinaison prise par les sections sur l'axe.

21. Mêmes contours. Surfaces courbes affectées par les sections primitivement planes. Leur topographie en général.

Si, dans l'équation générale (50) $u' = g_0 z' + F(y', z')$ de la surface affectée par les sections infléchies, nous mettons pour g_0 et pour la fonction F leurs valeurs (58) $-\frac{m P c^2}{2 G' I}$ et (54) relatives aux prismes

dont les sections ont des contours rendant F entière du troisième degré (art. 18), nous avons en ôtant, pour simplifier, les accents de y , z ,

$$(80) \quad u' = -\frac{P}{I} \left(\frac{m}{2G'} c^2 z - \frac{m-\eta'}{6G'} z^3 - \frac{1-\eta-m}{2G} y^2 z \right).$$

Désignons par u_m la valeur de l'ordonnée u' qui répond à $y = 0$, $z = -c$, valeur qui est ordinairement la plus grande de toutes dans les limites de la section, nous aurons

$$(81) \quad u_m = \frac{2m+\eta'}{3} \frac{Pc^3}{2G'I},$$

et l'équation de la surface peut être écrite

$$(82) \quad \frac{u'}{u_m} = -\frac{3m}{2m+\eta'} \frac{z}{c} + \frac{m-\eta'}{2m+\eta'} \frac{z^3}{c^3} + 3 \frac{G'}{G} \frac{1-\eta-m}{2m+\eta'} \frac{y^2}{c^2} \frac{z}{c}.$$

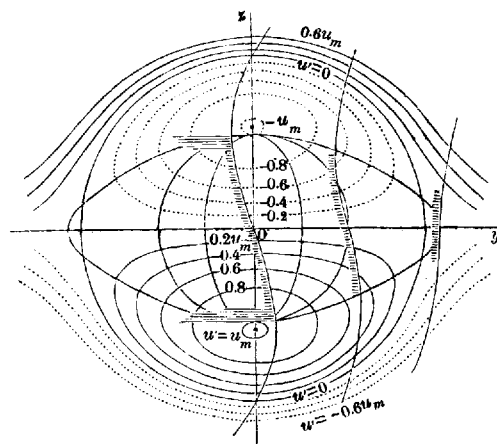
En donnant successivement à $\frac{y}{c}$ et à $\frac{z}{c}$ différentes valeurs 0,1, 0,2, 0,3, etc., cette équation fournit les expressions correspondantes de $\frac{u'}{u_m}$, et, par conséquent, autant qu'on veut des coupes de la surface par des plans perpendiculaires soit aux y , soit aux z ; on peut en déduire graphiquement, si on les a amplifiées convenablement dans le sens u' , une suite de coupes par des plans équidistants $u' = 0,1 u_m$, $u' = 0,2 u_m, \dots$, $u = u_m$ perpendiculaires aux u' ou à la tangente à l'axe fléchi du prisme, d'une manière plus facile qu'en résolvant par rapport à y les équations de ces dernières coupes. En les projetant toutes sur l'un de ces plans, le plan $u' = 0$ par exemple, on a une *topographie* complète de la surface.

Sa coupe par le plan $u' = 0$ normal à l'axe du prisme se compose à la fois de la ligne droite $z = 0$, des *fibres invariables* et d'une courbe

$$(83) \quad \frac{G}{G'} \frac{1-\eta-m}{m} \frac{y^2}{c^2} + \frac{m-\eta'}{3m} \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Cette courbe est un cercle dans la figure ci-après, qui est relative

au cas $m = 0,7$, $G = G'$, $\eta = \eta' = 0,1$, et où l'on a étendu les coupes



hors des contours des diverses sections circulaires ou ovales auxquelles elles conviennent (art. suivant), pour faire bien concevoir la forme de la surface. Elle est, plus généralement, une ellipse lorsque $1 - \eta - m$ et $m - \eta'$ sont de même signe, ou que m est compris entre η' et $1 - \eta$ (ou entre $0,1$ et $0,9$ quand $\eta = \eta' = 0,1$). Et les autres coupes, par des plans parallèles s'éloignant de

plus en plus de celui $u' = 0$, sont des courbes fermées de plus en plus petites, et intérieures les unes aux autres, comprises entre l'axe des y et l'une ou l'autre moitié de l'ellipse, savoir, la moitié supérieure répondant à des valeurs positives de z pour les valeurs négatives de u' , et la moitié inférieure répondant à des valeurs négatives de z pour les valeurs positives de u' . Elles se réduisent à un point de maximum tombant un peu hors du contour des sections, pour des valeurs de $\pm u'$ répondant à $\frac{du'}{dy} = 0$, $\frac{du'}{dz} = 0$, c'est-à-dire pour

$$(84) \quad y = 0, \quad z = \pm c \sqrt{\frac{m}{m - \eta'}}, \quad u' = \mp u_m \cdot \frac{2m}{2m + \eta'} \sqrt{\frac{m}{m - \eta'}}.$$

Les mêmes plans coupent encore la surface (82) suivant des courbes indéfinies situées au delà de la moitié de l'ellipse (83) opposée à la coupe fermée; et ces courbes indéfinies ont, de part et d'autre, l'axe des y pour asymptotes.

Mais ces dernières courbes n'appartiennent ordinairement qu'à un prolongement idéal de la surface hors du contour de la section, qui reste compris dans l'ellipse enveloppe (83) des courbes fermées, excepté dans les cas assez rares où l'on a $b > c \sqrt{\frac{G'}{G} \frac{m}{1 - \eta - m}}$, c'est-à-dire $b > c \sqrt{\frac{m}{0,9 - m}}$ si $G = G'$, $\eta = 0,1$, comme il arrive, par exemple, vers les extrémités du contour ovale le plus grand.

Lorsque $m > 1 - \eta$ et $> \eta'$ (ou lorsque $m > 0,9$ si $\eta = \eta' = 0,1$), la coupe $u' = 0$ se compose de la ligne droite $z = 0$ et de l'*hyperbole que représente alors l'équation* (83); toutes les autres coupes sont des courbes indéfinies, dont les parties comprises dans le contour de la section, se confondent ordinairement, à peu de chose près, avec des droites parallèles à l'axe des y .

Dans le cas particulier $m = 1 - \eta$, les coupes se réduisent toutes à des droites parallèles (*voy.* art. 23).

Les coupes de la même surface par des plans ($u' y$), c'est-à-dire par des plans perpendiculaires aux z ou parallèles à la fois à la ligne oy des fibres invariables et à la tangente u' à la courbe d'axe, sont des paraboles ayant leur axe de figure parallèle à cette tangente, ou situé dans le plan de flexion. On ne les a pas figurées.

On peut aussi considérer, parce qu'elles sont très-remarquables, les coupes de la même surface par des plans obliques passant tous par l'axe des y . Ces coupes, projetées sur le plan yz' normal à l'axe du prisme, sont *des ellipses toutes concentriques conaxiques et semblables* lorsque m (supposé $> \eta'$) est plus petit que $1 - \eta$: ce sont des hyperboles quand $m > 1 - \eta$ (ou lorsqu'il est compris entre 0,9 et 1, η étant $= 0,1$). Ce sont des cercles quand la section est circulaire.

Mais les coupes les plus intéressantes à considérer pour les conclusions mécaniques sont celles de la même surface courbe par *le plan de flexion* ($u' z$) ou (xz), et par les divers plans $y = \text{constante}$ qui lui sont parallèles.

On en a tracé et rabattu trois, celle $y = 0$, celle $y = c$, celle $y = 2c$, en donnant une certaine grandeur à u_m pour rendre leur forme bien sensible.

Ce sont des *paraboles cubiques*, courbées en doucine dont le point d'inflexion répond à $z = 0$ ou se trouve sur la ligne des fibres invariables; chacune de leurs moitiés a précisément, en petit, la même forme que prend l'axe fléchi du prisme s'il est encastré à un bout et sollicité à l'autre par la seule force perpendiculaire P . A partir de $y = 0$, la plus grande ordonnée de ces coupes diminue graduellement : elle s'annule pour $y = c \sqrt{\frac{G'}{G} \cdot \frac{m}{1 - \eta - m}}$; et, au delà, comme on voit par celle $m = c$, la coupe change de côté par rapport au plan yz .

Elles montrent bien que c'est au centre ($y = 0, z = 0$) que le glissement g_{xz} a la plus grande valeur.

Partout ailleurs qu'en ce point, l'inclinaison $\frac{du'}{dz}$ de ces coupes sur la tangente à la courbe d'axe n'est pas égale à l'inclinaison g_{xz} de la fibre sur la section, dans le sens z : elle en diffère de la petite quantité que mesure la deuxième expression (51) due, comme nous avons remarqué art. 17, à la variation légère des contractions transversales d'une section à l'autre; ce qui explique aussi pourquoi le maximum de u' (expression 84), ou *la coupe suivant un point*, tombe un peu hors de la section, ou répond à $z = \pm c \sqrt{\frac{m}{m-\eta}}$ au lieu de répondre aux sommets $z = \pm c, y = 0$ pour lesquels on a $g_{xz} = 0$ et la fibre normale à la section.

22. Suite. *Chaque surface courbe des sections est commune à une infinité de contours.*

Une circonstance digne de remarque, c'est que la surface courbe est la même pour toutes les sections ayant le même axe $2c$ dans le sens z , quel que soit leur axe $2b$ dans le sens y , pourvu que la constante m qui entre dans l'équation de leur contour ait la même valeur pour toutes, ou qu'elles fassent (art. 18) une même *série*; car b ne se trouve pas comme c et m dans l'équation générale (80) de cette surface. Il faut aussi, pour que les surfaces aient la même hauteur u_m et n'aient pas seulement les mêmes coupes, que la force P soit dans le même rapport $\frac{P}{I}$ avec le moment d'inertie. Mais ce n'est que dans le cas de la fausse

ellipse dont l'équation est $\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1-2\eta}{2\eta}} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, répondant à $m = 1 - 2\eta$, que les contours des sections dont le plan se courbe ainsi de même peuvent se déduire les uns des autres (art. 18, 23) en amplifiant ou réduisant les coordonnées parallèles à y dans le rapport des divers axes $2b$.

23. *Particularisation pour diverses sections. Cercle. Fausse ellipse. Sections à contour du neuvième degré qui se courbent exactement en cylindre à base de doucine du troisième degré.*

1°. Lorsque la section est circulaire, on a (expressions 77, 81, 82) en supposant $G = G'$, $\eta = \eta' = 0,1$,

$$(85) \quad m = 0,7, \quad u_m = \frac{Pc^3}{4GI}, \quad \frac{u'}{u_m} = -1,4\frac{z}{c} + 0,4\frac{z}{c} \cdot \frac{y^2 + z^2}{c^2}.$$

La figure donnée pour exemple art. 21 est, avons-nous dit, relative à ce cas. La coupe de la surface courbe par le plan yz ou $u' = 0$ normal à l'axe, est, avec la ligne $z = 0$ des fibres invariables, un cercle extérieur au contour de la section, et dont l'équation se réduit à

$$y^2 + z^2 = \frac{7}{2}c^2,$$

ou dont le rayon est $\sqrt{\frac{7}{2}} = 1,87083$ fois celui de la section.

La valeur maximum (84) de u' pour la partie de surface répondant aux courbes fermées est

$$u' = \mp \frac{1,4}{1,5} \sqrt{\frac{7}{6}} \cdot u_m = \mp 1,0081 u_m, \quad \text{pour } z = \pm c \sqrt{\frac{7}{6}} = \pm 1,0801 c,$$

en sorte qu'elle est, comme nous l'avons expliqué art. 21, un peu hors de la section dont la plus grande ordonnée $\mp z$ est $= c$.

La doucine suivant laquelle la surface est coupée par le plan xz de flexion $y = 0$ a pour équation

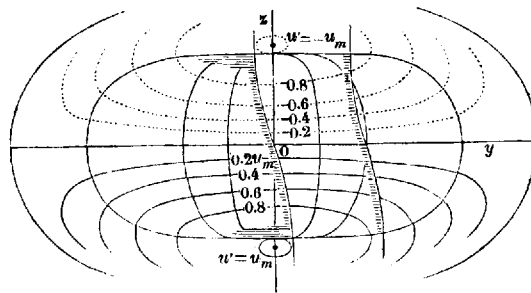
$$u' = -u_m \left(\frac{7}{5} \frac{z}{c} - \frac{2}{5} \frac{z^3}{c^3} \right).$$

La même surface est coupée par des plans obliques passant par la ligne des fibres invariables *suyant des courbes ayant toutes pour projections sur le plan yz normal à l'axe du prisme, des cercles concentriques, et qui peuvent être regardées comme étant ces cercles eux-mêmes*, vu la faible inclinaison de leurs plans sur celui yz . La déformation de la section a consisté ainsi en ce que les circonférences concentriques à

son contour n'ont fait qu'incliner légèrement et diversement leurs plans en tournant autour de la ligne des fibres invariables. *Et le contour de la section est resté une courbe plane.*

Conformément à la remarque de l'article précédent, cette même surface convient à tous les contours représentés par $\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{14}{6}} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$ qui ont le même demi-axe c , pourvu que $\frac{P}{I}$ soit le même aussi; car sans cela les surfaces auraient bien les mêmes coupes, mais à des hauteurs différentes et proportionnelles aux u_m qui varient comme $\frac{P}{I}$. Ceux de ces contours pour lesquels b n'excède pas c ou même $\frac{3}{2}c$ diffèrent fort peu des ellipses ayant les mêmes axes. Aussi cette surface convient encore, très-approximativement, aux sections elliptiques ayant le même demi-axe c et des demi-axes b quelconques plus petits que $1,5c$. C'est, au reste, ce qu'on verrait également en construisant les surfaces relatives à quelques-uns de ces contours elliptiques, ou les surfaces (50) $u' = g_0 z + F(y, z)$ avec la forme (75) pour F et les valeurs de c et b que nous venons de dire.

2°. Lorsque l'on considère des sections ayant pour contour la fausse



ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, la particularité que nous venons de signaler a lieu, non plus à peu près, mais exactement, conformément à la même observation de l'article précédent. Aussi la figure

ci-contre, qui donne pour le cas $\frac{m}{1-m} = 4$ ou $m = 0,8$, la forme de la surface courbe, dont l'équation est alors (si $G = G'$, $\eta = \eta' = 0,1$)

$$(86) \quad \frac{u'}{u_m} = -\frac{24}{17} \frac{z}{c} + \frac{7}{17} \frac{z^2}{c^2} + \frac{3}{17} \frac{z}{c} \frac{y^2}{c^2}; \quad \left(u_m = \frac{17}{30} \frac{Pc^3}{2GI}\right),$$

convient à toutes les fausses ellipses ayant même demi-axe c , et des demi-

s'est changé en une surface cylindrique ayant pour base la *doucine* ou parabole du troisième degré représentée en u' et z par l'équation (87).

24. Prisme rectangulaire. Transformation des conditions indéfinie et définies.

Quand la section est un rectangle, la fonction $F(y, z)$ (art. 16) ainsi que la constante g_0 , et, par suite, les valeurs des déplacements u , w , des glissements et des composantes de pression p_{xy} , p_{xz} ne peuvent être obtenus qu'en série transcendante.

Soient, en effet, $2b$ et $2c$ les côtés de cette section parallèlement aux y et aux z . La condition (33) $p_{xz} dy - p_{yz} dz = 0$ exprimant la nullité des actions longitudinales sur les faces latérales se partage d'elle-même en deux autres $p_{xz} = 0$ ou $g_{xz} = 0$ sur les faces parallèles aux xy , ou pour lesquelles $dz = 0$, et $p_{xy} = 0$ ou $g_{xy} = 0$ sur les faces parallèles aux xz , ou pour lesquelles $dy = 0$. Il faut donc chercher F et g_0 de manière à satisfaire (formules 46, 47, 48)

$$(88) \quad \text{à } G \frac{d^2 F}{dy^2} + G' \frac{d^2 F}{dz^2} = P \frac{1 - \eta - \eta'}{I} z \quad \text{partout,}$$

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à } F(y, z) = F(-y, z) \text{ aussi partout (vu la symétrie de la figure et} \\ \quad \text{du mode supposé de sollicitation),} \\ \text{à } F = 0 \text{ et } \frac{dF}{dz} = 0 \text{ aux points } y = 0, \quad z = 0, \end{array} \right.$$

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à } \frac{dF}{dz} = -g_0 - P \frac{\eta' c^2}{2 G' I} + P \frac{\eta y^2}{2 G I} \text{ pour } z = \pm c, \text{ quel que soit } y \\ \quad \text{entre } -b \text{ et } b, \\ \text{à } \frac{dF}{dy} = -\eta P \frac{yz}{G I} \text{ pour } y = \pm b, \text{ quel que soit } z \text{ entre } -c \text{ et } c. \end{array} \right.$$

On ne peut faire usage pour cela des procédés connus qu'autant que l'on réduit préalablement à zéro, par une transformation, le second membre de l'une de ces deux équations définies (90). On y arrive pour la deuxième, et l'on annule en même temps le second membre de l'équation différentielle indéfinie (88) en posant

$$F(y, z) = F_1(y, z) + B y^2 z + B' z^3,$$

F_1 étant une nouvelle fonction, et B, B' deux constantes dont on détermine la valeur, après substitution de cette expression pour $F(y, z)$ dans (88) et la seconde (90), de manière à produire la double annulation dont nous parlons.

Il en résulte

$$2B = -\frac{\eta P}{GI}, \quad 2GB + 6G'B' = \frac{P}{I}(1 - \eta');$$

d'où, en tirant les valeurs de B, B' et substituant,

$$(91) \quad F(y, z) = F_1(y, z) + P \frac{1 - \eta'}{6GI} z^3 - \frac{\eta P}{2GI} y^2 z,$$

F_1 devant satisfaire à ces conditions indéfinies et définies :

$$(92) \quad G \frac{d^2 F_1}{dy^2} + G' \frac{d^2 F_1}{dz^2} = 0 \text{ partout,}$$

$$(93) \quad F_1(-y, z) = F_1(y, z) \text{ aussi partout; et } F_1 = 0, \frac{dF_1}{dz} = 0 \text{ pour } y = 0, z = 0,$$

$$(94) \quad \begin{cases} \frac{dF_1}{dz} = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \frac{\eta P}{GI} y^2 \text{ pour } z = \pm c \text{ et } y \text{ quelconque entre } -b \text{ et } b, \\ \frac{dF_1}{dy} = 0 \text{ pour } y = \pm b \text{ et } z \text{ quelconque entre } -c \text{ et } c. \end{cases}$$

25. Intégration en série transcendante.

On satisfait à l'équation différentielle (92) $G \frac{d^2 F_1}{dy^2} + G' \frac{d^2 F_1}{dz^2} = 0$ en prenant pour F_1 une somme de termes

$$A e^{qz} e^{q'y}, \quad q \text{ et } q' \text{ étant liés par } Gq'^2 + G'q^2 = 0;$$

d'où $q' = \pm q \sqrt{\frac{G'}{G}} \cdot \sqrt{-1}$, ce qui donne pour l'intégrale générale, en remplaçant l'exponentielle imaginaire par sa valeur trigonométrique, faisant disparaître le $\sqrt{-1}$ par un choix d'autres coefficients, et désignant par $\sum$ une somme s'étendant à toutes les valeurs possibles de q ,

$$(95) \quad F_1 = \sum e^{qz} \left(A_q \cos qy \sqrt{\frac{G'}{G}} + A'_q \sin qy \sqrt{\frac{G'}{G}} \right).$$

Pour qu'on ait (93) $F(-y, z) = F(y, z)$, il faut que les sinus disparaissent ou que $A_q' = 0$. Et, pour avoir $F_1 = 0$ quand $y = 0, z = 0$, nous rendrons égaux les coefficients A_q des termes où q a la même valeur avec des signes différents, ce qui nous donnera

$$(96) \quad F_1 = \sum A_q (e^{qz} - e^{-qz}) \cos qy \sqrt{\frac{G'}{G}}.$$

Quant à la troisième condition (93) $\frac{dF_1}{dz} = 0$ pour $y = 0, z = 0$, on ne peut y satisfaire en même temps qu'aux précédentes qu'en posant une certaine relation entre tous les coefficients A ; elle nous servira, plus tard, à déterminer la constante g_0 .

La deuxième condition définie (94) $\frac{dF_1}{dy} = 0$ pour $y = \pm b$ deviendra ainsi

$$\mp \sum q \sqrt{\frac{G'}{G}} \cdot A_q (e^{qz} - e^{-qz}) \sin qb \sqrt{\frac{G'}{G}} = 0,$$

quel que soit z . On y satisfera en prenant les quantités q telles que $\sin qb \sqrt{\frac{G'}{G}} = 0$, d'où, n étant un nombre entier quelconque,

$$(97) \quad q = \frac{n\pi}{b} \sqrt{\frac{G'}{G}}.$$

Il faut mettre cette expression à la place de q dans la formule (96) $F_1 = \sum \dots$, et l'appliquer à toutes les valeurs de n , y compris $n = 0$, sans quoi l'intégrale ne serait pas générale et pourrait ne point donner ce qu'on cherche. Mais, d'après sa forme, on peut se borner aux termes répondant aux valeurs positives de n , puisque les termes provenant de valeurs égales au signe près s'y réunissent simplement en ajoutant leurs coefficients; et il convient, surtout si l'on considère que la différentiation mettra n en facteur sous le $\sum$, de n'appliquer ce signe qu'aux valeurs de n depuis $n = 1$, en ayant soin d'écrire, en dehors du $\sum$, le terme répondant à $n = 0$.

Afin de voir quel est ce terme, développons les deux exponentielles

pour une valeur de n ou de q supposée d'abord très-petite; nous aurons $A_q(e^{qz} - e^{-qz}) = A_q \cdot 2qz$ qui sera fini si l'on fait A_q infini en même temps qu'on fait q nul. Désignons ce terme par Kz , nous aurons pour notre intégrale générale

$$(98) \quad F_1 = Kz + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(e^{\frac{n\pi z \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} - e^{-\frac{n\pi z \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} \right) \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

Et la première condition définie (94) sera

$$(99) \quad K + \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\pi \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}} A_n \left(e^{\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \frac{nP}{GI} y^2 [*].$$

Pour en tirer la valeur générale de A_n , observons que lorsqu'on

[*] Observons que nous aurions pu remplir de suite la condition (93) $\frac{dF_1}{dz} = 0$ pour $y=0$, $z=0$, et réserver, au contraire, celle $F_1=0$ pour être remplie ultérieurement, en prenant $F_1 = \sum A_q (e^{qz} + e^{-qz}) \cos qy \sqrt{\frac{G'}{G}}$ au lieu de (96). Mais alors le premier membre de l'équation définie (99) eût été affecté du double signe $\pm$, parce que la différence des deux exponentielles prend un autre signe lorsqu'on fait $z = -c$ que lorsqu'on y fait $z = +c$: or il eût été alors impossible de rendre ce premier membre égal au second. Il n'y a donc, des deux conditions initiales $F_1=0$, $\frac{dF_1}{dz}=0$, que la première $F_1=0$ qui puisse être remplie pour chacun des termes (ou des couples de termes) de la série $\sum$. L'autre condition $\frac{dF_1}{dz}=0$ doit être remplie ultérieurement d'une autre manière, ou au moyen de l'ensemble de ces termes.

Observons aussi que nous aurions pu satisfaire à une partie des conditions en affectant de y les exposants réels de e , et de z les exposants imaginaires ou les multiplicateurs des arcs: mais il n'eût pas été possible de remplir la deuxième condition définie (94) $\frac{dF_1}{dy}=0$ par une infinité de valeurs de q , car il n'y en a qu'une seule, savoir $q=0$, qui annule $e^{qb} - e^{-qb}$.

L'expression trigonométrique choisie est donc la seule qui convienne à la question parmi celles qui résolvent l'équation différentielle indéfinie (92).

veut développer en une série de cosinus d'arcs dont les multiples sont les nombres naturels depuis 1, une fonction $\varphi(y)$ qui, comme la nôtre $-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \eta \frac{P}{GI} y^2$, ne change pas quand on change le signe de y et que l'on considère seulement dans sa partie comprise entre les limites $y = -b$ et $y = b$, il faut se servir de la formule d'Euler[*]

$$(100) \varphi(y) = \frac{1}{b} \int_0^b \varphi y' dy' + \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^b \varphi y' \cos \frac{n\pi y'}{b} dy' \right) \cos \frac{n\pi y}{b},$$

dont le terme constant provient de la valeur $n = 0$ comme l'on sait.

$$\text{Or } \frac{1}{b} \int_0^b \left(-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} \right) dy' = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \int_0^b y'^2 dy' &= \frac{b^2}{3}, & \frac{2}{b} \int_0^b \left(-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} \right) \cos \frac{n\pi y'}{b} dy' &= 0, \\ \int_0^b y'^2 \cos \frac{n\pi y'}{b} dy' &= \left[\frac{y'^2 b}{n\pi} \sin \frac{n\pi y'}{b} - \frac{2b}{n\pi} \left(\frac{-b}{n\pi} y' \cos \frac{n\pi y'}{b} + \frac{b^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi y'}{b} \right) \right]_0^b \\ &= \frac{2b^3}{n^2 \pi^2} \cos n\pi = -2 \frac{(-1)^{n-1} b^3}{n^2 \pi^2}; \end{aligned}$$

d'où

$$-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \eta \frac{P}{GI} y^2 = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \frac{\eta P b^2}{3GI} - \frac{\eta P}{GI} \left(\frac{2b}{\pi} \right)^2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

Égalant au premier membre $K + \sum_1^{\infty} \dots$ de (99), puis assimilant, dans

les deux membres, les parties constantes qui proviennent des termes répondant à $n = 0$, et assimilant de même, terme à terme, les parties affectées de $\cos \frac{n\pi y}{b}$, on obtient

$$(101) \begin{cases} K = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \frac{\eta P b^2}{3GI}, \\ A_n = -\frac{4b^3}{\pi^3} \sqrt{\frac{G'}{G}} \cdot \frac{\eta P}{GI} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \cdot \frac{1}{\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} + e - \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}}. \end{cases}$$

[*] *Disquisitio ulterior super seriebus*, tome XI (1798) des *Nova Acta Academiae Petropolitanae*, ou *Traité de Mécanique* de M. Poisson, 2^e édition, art. 326, p. 650.

Nous aurions pu arriver également à ces valeurs à la manière d'Euler et de Fourier, sans supposer connue la formule générale de développement (100), en intégrant d'abord de 0 à b les deux membres de l'équation de condition définie (99) $K + \sum \dots = \dots$, ce qui eût fait disparaître tous les termes du $\sum$, et donné pour résultat la valeur (101) de K que l'on vient d'écrire; puis, en intégrant aussi entre 0 et b les deux membres de la même équation de condition (99) multipliés, cette fois, par $dy \cos \frac{n\pi y}{b}$, car, comme on a $\int_0^b dy \cos \frac{n\pi y}{b} = 0$ et $\int_0^b \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n'\pi y}{b} dy = 0$ ou $\frac{b}{2}$, selon que n' est différent de n ou que $n' = n$, tous les termes tant hors du $\sum$ que sous le $\sum$ eussent disparu excepté un seul, ce qui eût donné la valeur (101) du coefficient A_n .

Substituant (101) à la place de K et A_n dans (98) $F_1 = Kz + \sum \dots$, nous avons pour la fonction cherchée

$$(102) \quad F_1(y, z) = \left(-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \frac{\eta P b^2}{3GI} \right) z - \frac{\eta P b^3}{GI} \sqrt{\frac{G'}{G}} \cdot \frac{4}{\pi^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \frac{e^{\frac{n\pi z \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} - e^{-\frac{n\pi z \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}}{e^{\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

Mais il reste, avons-nous dit, à faire remplir à cette fonction une dernière condition, savoir $\frac{dF_1}{dz} = 0$ pour $y = 0, z = 0$.

Nous disposerons, pour cela, de la constante encore indéterminée g_0 , et cela servira à nous faire connaître la valeur de ce glissement à l'origine. Nous aurons ainsi

$$(103) \quad g_0 = -\frac{Pc^2}{2G'I} \left[1 - \frac{G'}{G} \cdot \frac{2\eta b^2}{3c^2} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cdot \frac{2}{e^{\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}} \right) \right].$$

26. Expressions des déplacements des points du prisme rectangulaire.

Substituant cette valeur de g_0 dans celle (45) du déplacement w , et aussi dans l'expression (102) de $F_1(\gamma, z)$ qu'on vient d'écrire, puis ajoutant, d'après celle (91), $P \frac{1-\eta'}{6G'I} z^3 - \frac{\eta P}{2GI} \gamma^2 z$ pour avoir la valeur de $F(\gamma, z)$ à substituer dans u , nous aurons définitivement pour les valeurs des trois déplacements suivant les x, γ, z , en représentant en général par $\sinh \alpha$ et $\cosh \alpha$ les sinus et cosinus hyperboliques $\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$ et $\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$ de α :

$$(104) \left\{ \begin{aligned} u &= P \frac{2ax - x^2}{2EI} z + (1-\eta') \frac{Px^3}{6G'I} - \eta \frac{Py^2 z}{2GI} + \eta \frac{Pb^2 z}{GI} \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \cosh \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}} - \\ &\quad - \eta \frac{Pb^3}{GI} \sqrt{\frac{G'}{G}} \cdot \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi z \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \cos \frac{n\pi \gamma}{b}}{\cosh \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}}, \\ v &= -\eta \frac{P(a-x)}{GI} \gamma z; \\ w &= -\frac{Pc^2}{2G'I} \left[1 - \eta \frac{G'}{G} \cdot \frac{2b^2}{3c^2} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \cosh \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}} \right) \right] x - \\ &\quad - \frac{P}{2EI} \cdot \frac{3ax^2 - x^3}{3} + P \frac{a-x}{2I} \left(\frac{\eta \gamma^2}{G} - \frac{\eta' z^2}{G'} \right). \end{aligned} \right.$$

27. Pressions p_{xy}, p_{xz} . Vérification de ces résultats.

Ces valeurs (104) de u, v, w satisfont évidemment aux quatre équations générales (29) $\frac{du}{dx} = \frac{P(a-x)z}{EI}$, $\frac{dv}{dy} = -\varepsilon \frac{du}{dx}$, etc. de la question, et, aussi, à $u=0, v=0, w=0, \frac{du}{dz}=0$ pour $x=0, \gamma=0, z=0$, ainsi qu'à la condition de symétrie en vertu de laquelle u et w restent

les mêmes et ν change de signe sans changer de grandeur lorsqu'on met $-y$ pour y .

Pour vérifier les autres conditions qui sont (32) et (33), déduisons d'abord les composantes de pression $p_{xy} = G \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right)$ et $p_{xz} = G' \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right)$. Nous trouverons

$$(105) \quad \begin{cases} p_{xy} = \frac{\eta P}{I} \cdot \frac{4b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{G'}{G}} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \frac{\sinh \frac{n\pi z \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\cosh \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}}, \\ p_{xz} = -\frac{Pc^2}{2I} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) + \frac{\eta P b^2 G'}{3I G} \left(1 - \frac{3y^2}{b^2} - \frac{12}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \frac{\cosh \frac{n\pi z \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\cosh \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}} \right). \end{cases}$$

Indépendantes de x l'une et l'autre, elles remplissent bien les deux dernières conditions indéfinies (32) $\frac{dp_{xy}}{dx} = 0$, $\frac{dp_{xz}}{dx} = 0$, et il est bien facile de voir aussi qu'elles vérifient la première $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = \frac{Pz}{I}$.

Quant à la condition définie (33) $p_{xz} dy - p_{xy} dz = 0$ qui se décompose, avons-nous dit, en

$$p_{xy} = 0 \text{ pour } y = \pm b, \text{ et } p_{xz} = 0 \text{ pour } z = \pm c,$$

la première partie est évidemment remplie puisque $\sin \frac{n\pi y}{b}$ s'annule pour $b = \pm y$; et, quant à la seconde, l'expression (105) de p_{xz} se réduit, en y faisant $z = \pm c$, à

$$p_{xz} = \frac{\eta P b^2 G'}{3I G} \left(1 - \frac{3y^2}{b^2} - \frac{12}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos \frac{n\pi y}{b} \right),$$

qui est nulle, puisque, comme nous avons vu, on a, entre les limites $-b$ et b , $y^2 = \frac{b^2}{3} - \frac{4b^2}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos \frac{n\pi y}{b}$, égalité qui peut être vérifiée, du reste, en intégrant successivement les deux membres de 0 à b ,

après les avoir multipliés, la première fois par dy , la seconde fois par $dy \cos \frac{n\pi y}{b}$.

Si l'on multiplie par dy l'expression (105) de p_{xz} , et si on l'intègre de $-b$ à b , le $\sum$ disparaît, et même les deux termes $1 - \frac{3y^2}{b^2}$ de la parenthèse où il est contenu, en sorte qu'il reste, en divisant par $2b$, pour la composante moyenne de pression sur chaque bande parallèle aux y ,

$$(106) \quad \frac{1}{2b} \int_{-b}^b p_{xz} dy = -\frac{Pc^2}{2I} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right);$$

d'où, en multipliant par $2bdz$ et intégrant de nouveau,

$$\int_0^\omega p_{xz} d\omega = \int_{-c}^c dz \int_{-b}^b p_{xz} dy = -P,$$

ce qui doit être (égalité 38, art. 15) pour tous les prismes sollicités par des forces dont la composante totale dans le sens z est $-P$.

Quant à $\int p_{xy} d\omega = \int_{-c}^c dz \int_{-b}^b p_{xy} dy$, on le trouve nul, comme cela doit être, vu la symétrie de sollicitation par rapport au plan xz .

Ce sont deux vérifications de plus des formules qu'on vient de donner.

28. Glissement central. Courbe d'axe. Flèche de flexion.

Le glissement central $-g_0$ est donné par l'expression (103). En calculant la série $\sum$ qui y est contenue, nous avons trouvé, si $\eta = 0,1$:

Pour $\frac{c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}} =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	1,25	1,5	2	2,5	3
$-g_0 = \frac{Pc^3}{2G'I} \times$	0,67624	0,84918	0,90729	0,94031	0,96177	0,97101	0,98341	0,98934	0,99259.

Comme le terme $\frac{12}{\pi^2} \sum$ qui y entre a les valeurs successives

0,69648	0,43442	0,21775	0,10464	0,04785	0,02175	0,004537	0,000944	0,000196,
---------	---------	---------	---------	---------	---------	----------	----------	-----------

on peut l'effacer toutes les fois que $c\sqrt{G}$ est plus grand que $b\sqrt{G'}$, ou prendre

$$(107) \quad -g_0 = \frac{Pc^2}{2G'I} \left(1 - \frac{2\eta G' b^2}{3 G c^2} \right) = \frac{3}{2} \frac{P}{G'\omega} - \frac{\eta b^2}{c^2} \frac{P}{G\omega}.$$

Les déplacements des points de l'axe du prisme rectangle sont les valeurs (104) de u , v , w répondant à $y = 0$, $z = 0$, ou

$$(108) \quad u = 0, \quad v = 0, \quad -w = -g_0 x + \frac{P}{2EI} \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \right).$$

La troisième de ces expressions donne l'équation de la courbe d'axe, équation très-connue si l'on ôte le premier terme $-g_0 x$ que notre analyse ajoute.

La *flèche de flexion*, valeur de $-w$ pour $x = a$, sera, quand on pourra réduire $-g_0$ à (107), (vu que $\eta = \frac{\varepsilon G}{E}$, expression 44) :

$$f = \left(\frac{Pc^2}{2G'I} - \eta \frac{Pb^2}{3GI} \right) a + \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{Pa^3}{3EI} \left(1 + \frac{3E}{2G'} \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \right);$$

ou, si $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\frac{E}{G'} = \frac{5}{2}$:

$$(109) \quad f = \frac{Pa^3}{3EI} \left(1 + \frac{15c^2 - b^2}{4a^2} \right).$$

La théorie ordinaire ne tient pas compte du second terme entre parenthèses.

29. Surface courbe affectée par les sections transversales rectangulaires primitivement planes.

Si, dans l'équation générale (50) $u' = g_0 z + F(y, z)$ de cette surface rapportée au plan normal à l'axe fléchi du prisme, nous mettons pour la fonction F sa valeur donnée par (91) et (102), le g_0 disparaît et nous obtenons

$$(110) \quad u' = -\frac{Pc^3}{2G'I} \left[\left(1 - \frac{2\eta b^2 G'}{3 c^2 G} \right) \frac{z}{c} - \frac{1 - \eta' z^3}{3 c^3} + \eta \frac{b^2 G'}{c^2 G} \frac{y^2 z}{b^2 c} + \eta \left(\frac{2 b \sqrt{G'}}{\pi c \sqrt{G}} \right)^3 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \frac{\sinh n \pi \frac{z \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \cos n \pi \frac{y}{b}}{\cosh n \pi \frac{c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}} \right].$$

Les valeurs positives de u' répondent aux valeurs négatives de z et ont la même grandeur que celles négatives répondant aux valeurs égales et positives de z .

En appelant, comme à l'art. 21, u_m la valeur de u' pour $y = 0$, $z = -c$, et en désignant par $\tanh$ la tangente hyperbolique, on a

$$(111) \quad u_m = \frac{P c^3}{2 G' I} \left[\frac{2 + \eta'}{3} - \frac{2 \eta}{3} \frac{b^2 G'}{c^2 G} + \eta \left(\frac{2 b \sqrt{G'}}{\pi c \sqrt{G}} \right)^3 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \tanh \frac{n \pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \right],$$

expression où la série $\sum$ peut être écrite, eu égard à ce que $1 - \frac{1}{2^3} +$

$$\frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots = 0,901542677 :$$

$$0,9015427 - \left(1 - \tanh \pi \frac{c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \right) + \frac{1}{2^3} \left(1 - \tanh 2 \pi \frac{c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \right) - \frac{1}{3^3} \left(1 - \tanh 3 \pi \frac{c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \right) + \dots,$$

et dont le calcul n'exige généralement pas que l'on prenne plus de deux des parenthèses $(1 - \tanh)$. Nous avons obtenu ainsi, en supposant $\eta = \eta' = 0,1$,

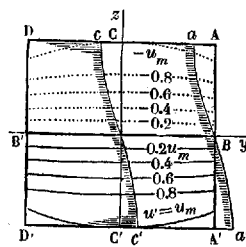
Pour $\frac{c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} =$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	∞
$u_m = \frac{P c^3}{2 G' I} \times$	0,602415	0,656498	0,677261	0,686241	0,690822	0,693454	0,700000

Nous avons aussi fait le calcul, plus compliqué, du rapport $\frac{u'}{u_m}$ pour une suite de valeurs de $\frac{y}{b}$ et $\frac{z}{c}$ croissant par dixièmes, pour le cas $b = c$, $G = G'$. Il suffit de prendre de deux à neuf termes du $\sum$ jusqu'à $\frac{z}{c} = 0,9$ inclusivement; et si, pour $\frac{z}{c} = 1$, il en faut prendre jusqu'à trente-cinq, le calcul s'abrège en remplaçant les tangentes hyperboliques par l'unité au delà du troisième terme du $\sum$. Voici les résultats :

Valeurs de $\frac{u'}{u_m}$ pour le cas $b = c$, $G = G'$, $\eta = \eta' = 0,1$.

Pour $\pm \frac{y}{b} =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$\pm \frac{y}{b} = 1,0$
Pour $-\frac{z}{c} = 0,0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$= 0,1$	0,1419	0,1429	0,1432	0,1437	0,1445	0,1455	0,1469	0,1485	0,1506	0,1533	0,1558
$0,2$	0,2829	0,2831	0,2837	0,2848	0,2863	0,2883	0,2910	0,2943	0,2983	0,3032	0,3088
$0,3$	0,4178	0,4181	0,4190	0,4205	0,4227	0,4257	0,4295	0,4344	0,4404	0,4476	0,4561
$0,4$	0,5448	0,5452	0,5463	0,5482	0,5510	0,5548	0,5598	0,5661	0,5740	0,5835	0,5948
$0,5$	0,6613	0,6617	0,6630	0,6651	0,6685	0,6730	0,6789	0,6865	0,6961	0,7078	0,7219
$0,6$	0,7648	0,7653	0,7667	0,7690	0,7726	0,7776	0,7842	0,7928	0,8039	0,8176	0,8344
$0,7$	0,8529	0,8533	0,8547	0,8571	0,8607	0,8658	0,8728	0,8821	0,8943	0,9098	0,9291
$0,8$	0,9230	0,9234	0,9246	0,9268	0,9302	0,9352	0,9421	0,9515	0,9642	0,9810	1,0028
$0,9$	0,9728	0,9731	0,9741	0,9759	0,9788	0,9831	0,9894	0,9982	1,0106	1,0278	1,0514
$1,0$	1,0000	1,0002	1,0008	1,0020	1,0040	1,0072	1,0122	1,0195	1,0303	1,0469	1,0700

Ces chiffres ont servi à tracer l'épure ci-contre. Les lignes hachées ont été construites avec des abscisses z et des ordonnées u' prises dans les colonnes $\frac{y}{b} = 0$ et $\frac{y}{b} = 1$ en choisissant arbitrairement $BA = c$ et $Cc = u_m$, et en répétant inversement ces courbes au-dessous de $B'B\gamma$.



En amplifiant, dans le sens u' , ces mêmes coupes ainsi que celles intermédiaires fournies par les autres colonnes, on déduit facilement de leurs intersections avec diverses parallèles à CC' , les coupes figurées de la même surface par une suite de plans équidistants $u' = \pm 0,2 u_m$, $u' = \pm 0,4 u_m, \dots$, $u' = \pm u_m$, qu'on a projetées toutes sur le plan primitif de la section dont le contour est le carré

$AA'D'D$.

Ces coupes, comme on voit, sont presque rectilignes et parallèles à l'axe des y jusqu'à $u' = \frac{1}{2} u_m$, ou dans la partie où les glissements g_{xz} sont les plus grands. Ensuite, elles s'infléchissent légèrement en tournant leur concavité vers cet axe, tandis que les coupes analogues des surfaces dans lesquelles se transforment les sections du deuxième et du quatrième degré considérées art. 18, 21 et 23, tournent leur convexité.

Cela est d'accord avec ce que nous avons vu (art. 23) pour la section du neuvième degré, se rapprochant ordinairement d'un rectangle à angles très-arrondis, et où les coupes sont toutes rectilignes et parallèles.

Pour une section rectangle où la largeur b serait moitié de l'épaisseur c , le parallélisme en question s'observerait d'ailleurs à peu près pour toutes les coupes.

Les portions des valeurs de u provenant de la série trigonométrique, quand $b < c$, ont peu d'influence, ainsi que les autres termes affectés de $\eta \frac{b^2}{c^2} = \frac{b^2}{10 c^2}$ environ : et l'on peut réduire alors, pour la pratique, les expressions (110), (111) à

$$(112) \quad u' = -\frac{P c^3}{2 G' I} \left(\frac{z}{c} - \frac{1 - \eta' z^3}{3 c^3} \right) = -\frac{3}{2} \frac{P c}{G' \omega} \left(\frac{z}{c} - \frac{1 - \eta' z^3}{3 c^3} \right); \text{ d'où } u_m = \frac{P c}{G' \omega} \left(1 + \frac{\eta'}{2} \right),$$

ce qui fournit pour coupes, au lieu des lignes légèrement courbes de la figure, des droites parallèles aux y passant à peu près aux points de celles-ci répondant à $y = \pm 0,7 b$.

En sorte que l'on peut souvent regarder approximativement les sections comme se changeant dans la surface cylindrique en *doucine* représentée par l'équation (112) [*].

30. Sections de forme quelconque.

Nous venons de reconnaître que la détermination des déplacements u , v , w satisfaisant aux conditions du mouvement de flexion défini art. 14, détermination ramenée par une première intégration (art. 16) à celle de la fonction F qui, elle-même, au moyen de la relation (91) applicable quelle que soit la forme de la section, se trouve ramenée

[*] C'est un résultat auquel nous arriverons directement et simplement dans une note de l'art. 31 relative à un prisme dont la base a sa dimension $2b$ très-petite par rapport à celle $2c$. Nous l'avons obtenue d'une autre manière (sauf le terme en η' négligé) aux art. 40 et 44 de notre Mémoire cité sur la torsion.

Nous renvoyons au même Mémoire, ou à l'art. 31 ci-après, pour la détermination de la forme nouvelle que prennent, par suite des contractions transversales, les contours des sections, forme qui n'a au reste aucune influence sur les résistances.

à celle de la fonction F_1 , devant satisfaire

$$(113) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à } G \frac{d^2 F_1}{dy^2} + G' \frac{d^2 F_1}{dz^2} = 0 \text{ partout,} \\ \text{à } F = 0 \text{ et } \frac{dF_1}{dz} = 0 \text{ aux points } y = 0, \quad z = 0, \\ \text{à } -G \frac{dF_1}{dy} \cdot \frac{dz}{dy} + G' \left(\frac{dF_1}{dz} + g_0 + \frac{Pz^2}{2G'I} - \frac{\pi P y^2}{GI} \right) = 0 \text{ sur le contour} \\ \text{des sections,} \end{array} \right.$$

pouvait se faire analytiquement d'une manière complète pour des sections rectangulaires, et aussi (art. 18, 19) pour des sections à contours curvilignes de forme extrêmement variée.

Cela montre suffisamment qu'avec des sections de forme absolument quelconque, les points des prismes peuvent toujours prendre des déplacements satisfaisant aux mêmes conditions, car la forme des contours peut bien influencer sur la difficulté de déterminer les valeurs de ces déplacements u, v, w , mais ne saurait rendre leur existence tantôt possible, tantôt impossible : elle peut compliquer analytiquement la dernière des conditions (113), à cause de $\frac{dz}{dy}$ qui dépend de l'équation du contour, mais elle n'augmente pas le nombre des conditions, et puisqu'elles peuvent être remplies pour certaines sections, il doit, statiquement, en être de même pour toutes; ce qu'on peut étendre au cas plus général des équations (39) à (42) relatives à un prisme dont la matière n'a de plans principaux d'élasticité que perpendiculairement à ses arêtes.

C'est, au reste, ce qu'on peut rendre sensible par une comparaison physique. La recherche de la fonction F_1 , satisfaisant aux conditions (113) qu'on vient d'écrire, n'est autre chose que la recherche des températures permanentes F_1 , qui seraient prises par les points du prisme, ou d'une de ses tranches de longueur finie ou infiniment petite, si l'on rendait les deux bases imperméables et si l'on faisait traverser les faces latérales par des *flux* constants de chaleur parallèles aux y et aux z , et ayant entre eux les relations auxquelles la dernière équation (113) assujettit les coefficients différentiels $\frac{dF_1}{dy}, \frac{dF_1}{dz}$ (représentant ces flux comme l'on sait), aux divers points du contour des sections; flux qui

sont les uns entrants, les autres sortants, et ceux-ci égaux à ceux-là non pas seulement au total, mais individuellement pour mêmes valeurs soit de y , soit de z , si le contour a une forme symétrique. Un pareil état permanent des températures s'établira toujours, quelle qu'ait été leur distribution initiale dans le prisme.

Il pourra toujours être rendu tel qu'on ait $F_1 = 0$ pour $y = 0$, $z = 0$, ou que la température soit zéro du thermomètre au centre de la section en ajoutant ou retranchant un même nombre de degrés en tous les points, ce qui n'empêchera pas l'état de se conserver, et l'on pourra disposer de l'indéterminée g_0 pour que cet état soit tel aussi qu'on ait $\frac{dF_1}{dz} = 0$ au même centre.

Nous regarderons donc comme établi qu'il existe, pour tout prisme, un mode d'application et de distribution sur ses deux bases, de forces ayant une résultante et un moment résultant donnés, tel que les dilatations longitudinales des fibres varient linéairement ou uniformément avec la distance quand on passe transversalement de l'une à l'autre, comme quand on considère divers points de chacune, et que les contractions transversales soient avec les dilatations dans les rapports qu'il faut pour que les fibres ne se pressent point l'une l'autre perpendiculairement à leur longueur; ou, autrement dit, pour que les formules usitées représentent exactement ces dilatations des fibres et les pressions sur les sections, aussi dans le sens longitudinal, ainsi que la courbure due à l'inégalité des mêmes dilatations. En sorte qu'on pourra toujours les appliquer, sauf à y joindre, au moyen d'autres formules, comme celles dont nous avons donné des exemples, ce qu'omet la théorie ordinaire et qui n'est pas toujours négligeable, savoir les effets dus aux glissements relatifs des sections ou des fibres, afin de déduire de leur combinaison les flèches complètes (art. 20 et 28), ainsi que les plus grandes dilatations qui ont lieu dans un sens oblique et qu'il convient de limiter pour garantir de toute altération, même éloignée, la cohésion de la matière (art. 3 ci-dessus et chapitre XII du Mémoire sur la torsion).

Ces modes d'application et de distribution des forces sur les bases sont donnés par les expressions (49), art. 17, de p_{xx} , p_{xy} , p_{xz} en particulier les deux dernières pour chaque forme de F , et en ajoutant

à la première, $p_{xx} = P \frac{a-x}{I} z$, un terme constant $\frac{Q}{\omega}$ lorsqu'il y a, outre la force transversale P , une traction longitudinale Q uniformément répartie que nous avons abstraite à l'art. 14 pour simplifier, et qui ne fait qu'ajouter $\frac{Q}{E\omega}$ aux dilatations $\frac{du}{dx}$. On pourrait même facilement, en raisonnant comme à l'art. 12, et en vertu du théorème général (art. 6) de composition des déplacements dus à différentes forces, modifier les résultats pour le cas où les faces latérales supporteraient la pression constante d'un fluide dont les effets ne soient pas censés précomptés comme ceux de la pression atmosphérique.

31. Démonstration directe et sans analyse des formules connues de la flexion des prismes, due à leurs seules dilatations longitudinales.

Une pareille démonstration de ces formules (1) qui peuvent être écrites

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{z}{\rho}, \quad p = E \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right),$$

quand on ajoute à la dilatation variable $\frac{z}{\rho}$ une dilatation générale ϑ_0 , et d'où l'on déduit (2)

$$Q = E\omega\vartheta_0, \quad M = \frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega$$

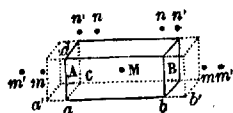
pour la traction totale Q et pour le moment de flexion M lorsque la ligne $z = 0$ passe au centre de gravité, est, avons-nous dit, très-désirable (art. 3) pour pouvoir les enseigner dans les cours qui ne comportent pas l'établissement préalable des formules différentielles et intégrales de la théorie de l'élasticité, et où il convient cependant de ne pas partir d'hypothèses gratuites et souvent fausses.

Pour y arriver, nous rechercherons, par le seul raisonnement, à quelles conditions les fibres dilatées d'un prisme n'exercent les unes sur les autres latéralement aucune action perpendiculaire à leur longueur ou aux arêtes, ce qui amènera nécessairement à parler des contractions transversales accompagnant alors leurs dilatations longitudinales; puis, après avoir montré que les bases très-petites de ces

fibres peuvent toujours, *en conservant leur contiguité*, être modifiées simultanément de manière que cette condition de nullité d'action normale soit remplie, quand les dilatations longitudinales varient linéairement ou uniformément en passant d'une fibre à l'autre dans deux sens transversaux, nous montrerons que si seulement les deux bases extrêmes du prisme sont supposées éprouver des tractions longitudinales variant suivant cette loi linéaire, avec ou sans actions tangentielles transversales distribuées d'une certaine manière, il en est nécessairement de même sur toutes les autres sections du prisme dont on suppose que les faces latérales n'éprouvent aucune action extérieure; que, par suite, on a exactement (même quand il y a des pressions latérales constantes comme celles d'un fluide), les formules connues de la flexion susceptibles d'être étendues *approximativement* aux cas où les forces agissant aux extrémités sont un peu autrement appliquées et distribuées, et qui sont à compléter, du reste, de toute manière, par les formules moins simples donnant les glissements, dans les cas où l'influence de ceux-ci n'est pas négligeable.

Supposons donc qu'un corps élastique homogène ait été divisé par la pensée en éléments parallélipèdes rectangles tous égaux, en substituant au besoin à sa surface généralement courbe une suite de petits plans. Après l'action de forces extérieures, les côtés de ces éléments se sont un peu allongés ou raccourcis, et même généralement inclinés les uns sur les autres de manière à rendre les parallélipèdes légèrement obliquangles. Les molécules du dedans de chacun se trouvant plus rapprochées ou plus écartées qu'auparavant de celles des éléments environnants, il s'engendre des actions moléculaires nouvelles dont les résultantes, prises à travers les diverses faces de contact de ces éléments, sont leurs pressions ou tractions mutuelles. La grandeur et la direction de ces pressions ou tractions dépend des proportions des petites dilatations ou contractions des côtés ainsi que des petites inclinaisons qu'ils peuvent avoir prises les uns sur les autres.

Si, par exemple, les côtés sont restés rectangulaires, et si l'un d'eux



ab est devenu ab' ou s'est dilaté sans que les deux autres ac , ad aient changé, comme les molécules m , m' , n , n' des éléments contigus, qui ont participé à ce mouvement, auront pris des positions

nouvelles telles que m' , m' , n' , n' , les molécules M de l'intérieur s'en seront toutes éloignées, mais plus de celles m , m situées au delà des faces A, B perpendiculaires à la dimension augmentée ab , que de celles n , n situées au delà des faces parallèles à ab . Si la dimension ab s'est contractée au lieu de s'être dilatée, les distances des molécules du dedans aux molécules du dehors de l'élément qu'on considère, auront au contraire toutes diminué, mais toujours plus à travers les faces A, B qu'à travers les quatre autres faces.

Toute dilatation d'un élément dans le sens d'une de ses trois dimensions développe ainsi des actions attractives, et produit des *tractions* ou *tensions* à travers ses six faces, et toute contraction produit à travers les mêmes faces des actions répulsives ou *pressions* proprement dites : mais ces tractions ou pressions engendrées sont plus fortes, *en les rapportant à l'unité superficielle des faces*, à travers celles perpendiculaires qu'à travers celles parallèles aux dimensions dilatées ou contractées. Et l'on pourra leur donner, en faisant varier les dilatations et contractions, telle grandeur qu'on voudra, dans les limites de la cohésion de la matière.

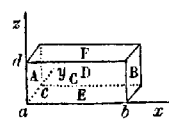
De plus, suivant le mode de contexture moléculaire, contexture grenue, fibreuse, lamelleuse, etc., et qui, bien que supposée la même en tous les points du corps homogène, peut être très-inégale en divers sens, les tractions ou pressions pourront avoir des directions plus ou moins obliques aux faces où elles s'exercent, même lorsque les éléments seront restés rectangulaires; à plus forte raison s'ils sont devenus, comme nous disions tout à l'heure, légèrement obliquangles. En sorte que ces résultantes d'actions peuvent même quelquefois être purement *tangentielles* ou se réduire à des espèces de frottement ou d'adhésion parallèle sur les mêmes faces.

Cette contexture de la matière peut, au reste, être telle que toute modification très-petite des petits prismes AB changeant ou ne changeant pas l'angle *dac* des faces latérales, mais n'altérant point la perpendicularité des arêtes ab sur les deux bases A, B, n'engendre jamais sur celles-ci que des actions *longitudinales* ou parallèles à ab , et sur les quatre faces latérales que des actions *transversales*, c'est-à-dire perpendiculaires aux mêmes arêtes; et que toute inclinaison très-petite des arêtes sur les bases ne développe que des actions tangentielles,

longitudinales sur les faces latérales et *transversales* sur les bases. Il suffit pour cela, comme il est facile de voir, que les molécules offrent dans leur arrangement une certaine symétrie par rapport à toutes les sections transversales ou parallèles aux faces A, B prises pour bases. *Et c'est cette sorte de contexture moléculaire que nous supposerons toujours.*

S'il y a à la fois dilatation des éléments dans un ou deux sens, et contraction dans l'autre ou dans les deux autres, il résulte du théorème de composition correspondante des forces et des petits déplacements (théorème dont nous ne reproduirons pas ici la démonstration donnée sans calcul à l'art 6), que les pressions sur les diverses faces seront résultantes de ce qui serait dû à ces deux modifications successivement opérées. Et il suit du même théorème que deux, trois, etc., petits changements égaux développeront des forces doubles, triples, etc., ou que *les forces sont proportionnelles aux petits changements*, soit de dimensions, soit d'angles dont elles proviennent, et que réciproquement elles peuvent produire.

Ces changements pourront donc être entre eux dans des rapports tels qu'il y ait, à travers quelques-unes des faces, par exemple les faces latérales, destruction mutuelle des forces, ou compensation entre les actions attractives et les actions répulsives, de sorte que ces quatre faces C, D, E, F d'un élément n'éprouvent ni pression ni traction de la part des éléments contigus, tandis que les autres, ou les bases A, B, en supportent d'aussi grandes qu'on veut. Ainsi, supposons que, tous les angles restant droits, il y ait par unité de longueur une dilatation δ dans le sens longitudinal ab , des dilatations $-\delta'$ (ou des contractions δ') dans les sens transversaux ac , ad , et que, d'après la contexture de la matière, toute dilatation dans un sens produise respectivement, sur l'unité des faces perpendiculaires et sur l'unité des faces parallèles, des tractions égales à cette dilatation multipliées par deux certains nombres n et e pour les premières et e seulement pour les secondes faces. On aura 1° sur les faces A, B perpendiculaires à a , b , des tractions



$ne\delta + e(-\delta') + e(-\delta')$; 2° sur les autres faces C, D, E, F, des tractions $ne(-\delta') + e(-\delta') + e\delta$. Celles-ci seront nulles si l'on a $\frac{\delta'}{\delta} = \frac{1}{n+1}$; et celles-là, ou les

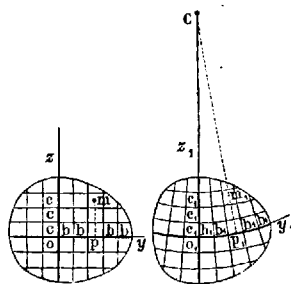
tractions sur les *bases*, auront alors pour valeur $\left(ne - \frac{2e}{n+1}\right)\delta$. En sorte que si l'on a $n = 3$, les *fibres latérales* n'éprouveront aucune action lorsque les contractions transversales δ' seront le $\frac{1}{4}$ de la dilatation longitudinale δ . Et les tractions sur les bases seront alors égales à la dilatation longitudinale δ multipliée par le nombre $e\left(n - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{5}{2}e$. C'est ce nombre, quel qu'il soit pour les divers cas, par lequel il faut multiplier la proportion de l'extension longitudinale d'un élément prismatique pour avoir la force de traction capable de la produire, pour l'unité superficielle de la base de l'élément, lorsque les faces latérales ne supportent aucune action perpendiculaire aux arêtes, qui est appelé en général *coefficient d'élasticité d'extension* de la matière dans ce sens des arêtes du petit prisme.

Ceci établi, soit un prisme à base quelconque divisé par deux systèmes de plans rectangulaires parallèles à ses arêtes, en *fibres* longitudinales prismatiques. Supposons ces fibres partagées elles-mêmes en éléments parallélipipèdes rectangles par des plans transversaux ou perpendiculaires aux mêmes arêtes, plans par rapport auxquels la contexture moléculaire est supposée jouir de la *symétrie* que nous avons définie par ses effets, et qui paraît avoir lieu très-souvent.

Je dis que si les dilatations longitudinales des fibres, aux points où elles traversent une même section transversale ω du prisme, ne varient que linéairement dans deux sens rectangulaires aussi transversaux, c'est-à-dire croissent ou décroissent uniformément avec les distances comptées dans ces deux sens sur ω , on pourra toujours transformer leurs bases, ou les petits rectangles dans lesquels cette section ω se trouve divisée, en figures qui, sans cesser d'être contiguës, auront précisément les formes et les dimensions qu'il faut pour que les faces latérales des fibres n'éprouvent aucune pression perpendiculaire aux arêtes.

En effet, supposons d'abord, pour simplifier : 1°. Que la matière offre également la symétrie par rapport aux deux autres systèmes de plans de séparation des éléments convenablement choisis, ou que les dilatations et contractions de leurs côtés n'engendrent, comme on a dit tout à l'heure, que des pressions perpendiculaires à leurs faces.

2°. Que la dilatation longitudinale ne varie que dans l'un des deux sens, celui oz , des lignes de division de la section ω , et que, pour une fibre quelconque dont la base a son centre en m , elle soit représentée par $\frac{z_1}{\rho}$, ρ étant une constante nécessairement très-grande par rapport à z_1 , qui est ce que devient la coordonnée $mp = z$, distance positive ou négative de m à une ligne de division oy dans l'autre sens. Représentons par ε et ε' les rapports constants ($\frac{1}{4}$ l'un et l'autre dans l'exemple pris tout à l'heure) qu'il doit y avoir entre les contractions transversales dans les sens oy et oz et la dilatation longitudinale de la fibre pour que les faces latérales n'éprouvent ni pression ni traction normale. Puis décrivons, sur un plan, un arc de cercle $o_1\gamma_1$ avec un rayon



$o_1C = \frac{\rho}{\varepsilon}$, et des arcs concentriques $c_1, c_1, c_1, \dots$ dont les petites distances consécutives $o_1c_1, c_1c_1, \dots$ soient égales aux côtés primitifs $oc, cc, cc, \dots$ des éléments réduits dans la proportion de ε' par suite des dilatations longitudinales de ceux-ci, ou multipliés par $1 - \varepsilon' \frac{z_1}{\rho}$. Si nous tirons, par le

centre C , des rayons aux points de division de l'arc $o_1\gamma_1$, en parties $o_1b_1, b_1b_1, \dots$, égales aux côtés $ob, bb, \dots$, des bases des mêmes éléments dans l'autre sens, nous aurons partagé le plan en quadrilatères mixtilignes pouvant être regardés comme rectilignes vu leur petitesse, et dont l'un quelconque ayant son centre m_1 à la distance m_1p_1 de l'arc $o_1\gamma_1$, aura dans le sens des arcs une largeur qui sera à la largeur primitive $bb = b_1b_1$ de l'élément correspondant comme $\frac{\rho}{\varepsilon} - m_1p_1$ est à $\frac{\rho}{\varepsilon}$, ou comme $1 - \varepsilon \frac{m_1p_1}{\rho}$ est à 1.

D'où il suit qu'en prenant $z_1 = m_1p_1$, les petits quadrilatères mixtilignes, comparés aux rectangles en même nombre qui servaient de bases aux éléments ou aux fibres, remplissent bien la condition voulue d'avoir précisément les dimensions que les déplacements doivent faire prendre à ceux-ci pour que les faces latérales ne supportent pas de

pressions normales, et, aussi, la forme nécessaire pour qu'elles n'éprouvent pas d'actions tangentielles transversales, puisque leurs angles sont restés droits. Et la possibilité énoncée de la transformation des uns dans les autres sans faire cesser leur contiguïté, se trouve en conséquence démontrée.

La construction qui fait voir cette possibilité s'opérerait aussi facilement si les dilatations étaient représentées par $\vartheta_0 + \frac{z_1}{\rho}$ au lieu de $\frac{z_1}{\rho}$; ou si les fibres coupant oy n'étaient pas de longueur invariable : on n'aurait qu'à prendre le centre C des arcs à une distance $\frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{1 - \varepsilon\vartheta_0}{1 + \vartheta_0}$ au lieu de $\frac{\rho}{\varepsilon}$, et les points de division $b_1, b_2, \dots$, du premier arc à des distances égales aux distances primitives $ob, bb, bb, \dots$, multipliées par $1 - \varepsilon\vartheta_0$.

Ou bien, après avoir tracé la figure comme si l'on avait la constante $\vartheta_0 = 0$, on contracterait tous les petits rectangles mixtilignes dans une proportion $\varepsilon\vartheta_0$ suivant les arcs, et $\varepsilon'\vartheta_0$ suivant les rayons, ce qui ne les empêcherait pas de rester contigus.

Si la dilatation variait linéairement dans les deux sens oz et oy à la fois, ou si elle était représentée par $\vartheta_0 + \frac{z_1}{\rho} + \frac{y_1}{\rho'}$, y_1 étant ce que devient la distance y de m à oz , on pourrait faire la construction d'abord comme si elle se réduisait à $\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}$, puis comme si elle se réduisait à $\frac{y_1}{\rho'}$, et définitivement en composant géométriquement ensemble les déplacements transversaux trouvés dans ces deux hypothèses, ce qui donnerait, comme il est facile de le voir, un réseau de quadrilatères curvilignes dans les deux sens, et toujours orthogonaux, satisfaisant ainsi aux conditions voulues.

Mais on peut, en négligeant les différences de $\frac{z_1}{\rho}$ à $\frac{z}{\rho}$, de $\frac{y_1}{\rho'}$ à $\frac{y}{\rho'}$ et les autres quantités très-petites du second ordre [*], construire le réseau

[*] Comme dz_1 est $= dz \left(1 - \varepsilon' \frac{z_1}{\rho} \right)$ lorsque la dilatation ne varie que dans le sens

d'une autre manière qui a l'avantage de s'appliquer également au cas général, supposé le cas ordinaire comme nous avons dit, où la matière du prisme n'a pour plans de symétrie que les sections transversales, et où, par suite, la nullité des actions mutuelles transversales des fibres exige que les côtés de leurs bases rectangulaires non-seulement se contractent, mais encore généralement s'inclinent légèrement l'un sur l'autre de quantités proportionnelles aux dilatations longitudinales [*].

Alors, comme les proportions des contractions des côtés sont $\frac{dy_1 - dy}{dy}$ et $\frac{dz_1 - dz}{dz}$, et comme $\frac{dy_1}{dz} + \frac{dz_1}{dy}$ est la petite inclinaison qu'ils ont prise l'un sur l'autre, ou le resserrement de deux des angles opposés des éléments superficiels, on devra avoir, $\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'}$ étant la dilatation longitudinale, et ε'' un nouveau nombre constant

$$(114) \quad dy_1 = dy \left[1 - \varepsilon \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'} \right) \right], \quad dz_1 = dz \left[1 - \varepsilon' \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'} \right) \right], \quad \frac{dy_1}{dz} + \frac{dz_1}{dy} = \varepsilon'' \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'} \right).$$

Si l'on intègre les deux premières de ces équations, il faut ajouter respectivement des fonctions arbitraires $f(z)$ et $f(y)$ à leurs intégrales; et, en substituant dans la troisième équation, elle devient

$$f'(z) - \varepsilon' \frac{z}{\rho} - \varepsilon'' \frac{z}{\rho} = -f'(y) + \varepsilon \frac{y}{\rho} + \varepsilon'' \frac{y}{\rho'} + \varepsilon'' \vartheta_0.$$

Elle est satisfaite en faisant les deux membres égaux à une même

z , on obtient, en intégrant, $\frac{z_1}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon'} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon' z}{\rho}} \right) = \frac{z}{\rho} - \frac{\varepsilon' z^2}{2 \rho^2} + \frac{\varepsilon'^2 z^3}{6 \rho^3} - \dots$ qui est bien réductible à $\frac{z}{\rho}$ en négligeant $\frac{z^2}{\rho^2}$, très-petit du second ordre.

[*] Ce cas de contexture à un seul plan de symétrie est plus étendu que celui que nous avons traité analytiquement à partir de la fin de l'art. 16. C'est celui des formules (7) de l'art. 9. La nullité des actions transversales p_{yy} , p_{zz} et p_{yz} sur les faces latérales ou parallèles aux x , exige bien, d'après ces formules comme d'après un raisonnement facile, que ϑ_y , ϑ_z et le resserrement d'angle g_{yz} ou la petite inclinaison mutuelle des côtés des bases des éléments soient dans des rapports constants avec ϑ_x , quelles que soient les inclinaisons g_{xy} , g_{xz} des arêtes sur les bases, car celles-ci n'engendrent sur les faces latérales que des pressions tangentielles p_{xy} , p_{xz} .

constante arbitraire ; et cette constante est égale à $\varepsilon''\partial_0$ si l'on suppose, pour abstraire les translations et les rotations générales, que le premier élément de la ligne oy est resté immobile ainsi que l'origine o , ou que l'on a $\frac{dz_1}{dy} = 0$ ainsi que $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ pour $y = 0$, $z = 0$. Il en résulte, pour satisfaire aux trois équations différentielles (114) exprimant les conditions à remplir afin que les fibres ne se sollicitent pas transversalement,

$$(115) \quad \begin{cases} y_1 = \varepsilon''\partial_0 z + (1 - \varepsilon\partial_0) y + \frac{\varepsilon''z^2 - 2\varepsilon yz}{2\rho} + \frac{\varepsilon'z^2 - \varepsilon y^2}{2\rho'}, \\ z_1 = (1 - \varepsilon'\partial_0) z + \frac{\varepsilon''y^2 - 2\varepsilon'yz}{2\rho'} - \frac{\varepsilon'z^2 - \varepsilon y^2}{2\rho}, \end{cases}$$

ce qui prouve que ces conditions sont très-compatibles entre elles, et ce qui donne les positions des points du nouveau réseau formé par les bases des éléments, ou les deux systèmes de lignes qui les limitent. Ainsi la seconde de ces expressions (115), en attribuant à z diverses valeurs constantes, donne les équations des lignes légèrement courbes dans lesquelles se sont changées les droites tracées primitivement sur la section ω parallèlement aux y : ce sont des paraboles dont le rayon de courbure est sensiblement constant et égal à l'inverse de $\frac{d^2 z_1}{dy^2} = \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\varepsilon''}{\rho'}$, et qui se confondent ainsi à très-peu près, lorsque $\frac{1}{\rho'} = 0$, avec les arcs de cercle trouvés ci-dessus, dont les rayons pouvaient être regardés comme égaux vu la grandeur supposée considérable de $\frac{\rho}{\varepsilon}$ par rapport à z ou z_1 . La première expression (115) donne de même pour les lignes de division qui étaient primitivement parallèles aux z , des paraboles ou des arcs de cercle dont le rayon est l'inverse de $\frac{\varepsilon'}{\rho'} + \frac{\varepsilon''}{\rho}$, et qui se réduisent à des lignes droites comme ci-dessus lorsque $\varepsilon'' = 0$, ou que les angles des petits rectangles doivent rester droits, si, en même temps, on a $\frac{1}{\rho'} = 0$, ou variation de la dilatation longitudinale avec la coordonnée z seule.

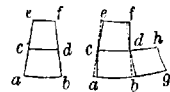
Toutes les fois donc (conformément à ce que nous avons avancé) qu'on aura un prisme dont la contexture offre par rapport aux sections

transversales une symétrie telle que le changement des dimensions de ses fibres ou éléments longitudinaux et l'altération des angles de leurs bases ne puissent engendrer sur celles-ci que des actions longitudinales, et sur les faces latérales que des actions parallèles à ces mêmes bases, si les dilatations longitudinales éprouvées par ces fibres ne varient que linéairement dans deux sens transversaux aux points où elles traversent une section quelconque, leurs bases pourront toujours prendre, sans cesser d'être contiguës, des formes telles que les fibres n'exercent les unes sur les autres latéralement aucune action perpendiculaire à leurs longueurs [*].

Ce lemme va nous conduire facilement à la démonstration cherchée des formules connues de la flexion pour les cas où elles sont rigoureuses.

[*] On peut voir que, réciproquement, l'action latérale des fibres ne peut être nulle dans le sens transversal qu'autant que leur dilatation longitudinale varie uniformément de l'une à l'autre avec la distance mutuelle mesurée au moins dans deux sens transversaux.

En effet, supposons d'abord la contexture symétrique par rapport à chacun des trois systèmes de plans de séparation des éléments. Leurs angles devront rester droits pour que les actions en question soient nulles. Or soient, après les déplacements sur une même section ω , $abdc$, $cdfe$ les bases de deux fibres contiguës : si les côtés ac et ce , bd et df ont des longueurs égales et s'ils sont restés rectilignes, il faut, pour que leurs



angles soient encore droits après la courbure que peuvent avoir prise les autres côtés, qu'il y ait la même différence de longueur entre ceux opposés ab et cd de la première base qu'entre ceux cd , ef de la seconde. La même équidifférence doit exister si ace , bdf sont devenus aussi légèrement courbes tout en conservant la perpendicularité à ab , cd , ef , car on peut les remplacer par les lignes ponctuées qui leur sont tangentes aux milieux c , d , sans changer la longueur des côtés perpendiculaires ab , fe que de quantités d'ordre négligeable. Et il doit y avoir équidifférence aussi dans l'autre sens, c'est-à-dire entre les côtés ac , bd , gh de la base $abdc$ et de celle $dbgh$ d'une troisième fibre contiguë à la première si l'on suppose $ab = bg$, $cd = dh$.

Comme les lignes maintenant équidifférentes étaient primitivement égales, on voit que les contractions subies par les côtés des bases des fibres doivent varier linéairement ou uniformément avec les distances de celles-ci, dans chacun des deux sens de division, pour qu'elles n'exercent les unes sur les autres par leurs faces latérales aucune action tangentielle transversale.

Or, pour qu'elles n'exercent par les mêmes faces non plus aucune action normale, il

Commençons en effet par le cas le plus simple, celui de la flexion *égale* ou *circulaire*, où les déplacements longitudinaux sont supposés tels que les sections transversales restent toutes planes et normales aux fibres également dilatées ou contractées d'un bout à l'autre et changées en arcs de cercle dont les centres se trouvent sur une même droite, intersection commune des plans nouveaux des sections; en sorte que si ϑ_0 est la dilatation de la fibre qui passe par les centres de gravité des sections, ρ son rayon ou sa distance à l'intersection dont nous parlons, et $\rho + z$ le rayon d'une autre fibre quelconque, on a $(1 + \vartheta_0) \frac{\rho + z}{\rho}$ pour la longueur nouvelle d'une portion de cette fibre égale primitivement à l'unité, et par conséquent

$$\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}$$

pour sa dilatation longitudinale (vu que ϑ_0 et $\frac{z}{\rho}$ sont supposés très-petits et leur produit négligeable). Et supposons les déplacements transversaux relatifs tels, sur toutes les sections ω , que les fibres n'exercent les unes sur les autres latéralement aucune action transversale, ce que nous venons de démontrer possible quand les dilatations longitudinales ont une pareille expression. En désignant par E le nombre que

faut, comme nous avons vu ci-dessus pour une pareille contexture, qu'il y ait un certain rapport constant entre les dilatations longitudinales des fibres et les contractions latérales dans les deux mêmes sens.

Donc, pour que les fibres d'un pareil prisme ne se sollicitent pas perpendiculairement à leur longueur, il est *nécessaire* que leurs dilatations longitudinales varient uniformément de l'une à l'autre dans les deux sens transversaux parallèles aux intersections des plans de symétrie de contexture.

En passant au cas plus général où il n'y a de plan de symétrie que perpendiculairement aux arêtes du prisme, on verra facilement que les trois équations différentielles (114) ne peuvent être d'accord entre elles, ou satisfaites par les mêmes valeurs de γ , et z , en γ et z si l'on ajoute des termes affectés des secondes puissances ou des puissances supérieures de γ ou z aux trinômes entre parenthèses $\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{\gamma}{\rho'}$ exprimant les dilatations longitudinales. On ne peut y ajouter qu'un terme en γz , n'empêchant pas la dilatation de varier uniformément dans le sens de chacune des coordonnées γ, z . Donc, etc.

nous avons tout à l'heure appelé coefficient d'élasticité d'extension, les actions toutes longitudinales exercées sur les éléments $d\omega$ des sections seront exprimées par

$$Ed\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right).$$

Les actions sur les deux bases extrêmes auront la même expression et les actions sur les faces latérales du prisme seront nulles.

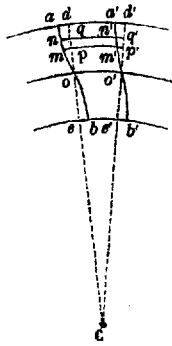
Réciproquement, comme le problème des petits déplacements relatifs des points d'un corps élastique est complètement déterminé lorsqu'on donne les forces extérieures qui y agissent, *Un prisme dont les faces latérales ne supportent aucune action et dont les bases extrêmes sont sollicitées par des tractions longitudinales $Ed\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right)$, c'est-à-dire des tractions (positives ou négatives) égales sur toutes deux aux points homologues, normales aux éléments $d\omega$ où elles s'exercent, et variant linéairement avec une même coordonnée transversale z , éprouvera précisément les déplacements tant longitudinaux que transversaux que nous venons de supposer, c'est-à-dire une incurvation en arc de cercle dans un plan parallèle aux arêtes et à z , avec des dilatations longitudinales $\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}$ partout, et, aussi partout dans l'intérieur, les mêmes tractions longitudinales $Ed\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right)$ que si ces fibres étaient isolées.* En sorte que les formules de la théorie ordinaire de la flexion s'y observeront exactement.

De plus, ses fibres éprouveront des contractions transversales $\varepsilon \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right)$, $\varepsilon' \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right)$ dans un sens perpendiculaire et dans un sens parallèle à z , en sorte que le contour de ses sections prendra le léger changement de forme qu'assigne la construction ci-dessus (et que l'on peut observer expérimentalement en fléchissant un parallépipède de caoutchouc).

Passons maintenant à un cas plus compliqué et bien plus habituel, celui de la flexion en arc non circulaire dont l'inégalité de courbure

d'un bout à l'autre du prisme est déterminée par des forces agissant transversalement ou tangentielllement aux sections.

En raisonnant comme tout à l'heure d'une manière d'abord inverse, nous ferons des hypothèses sur les déplacements en nous les donnant tels : 1° que les diverses sections ω se soient toutes infléchies et inclinées de la même manière sur les fibres, de sorte que les portions $mm' n' n$ de celles-ci comprises entre deux sections très-voisines aob ,



$a' o' b'$ aient après la flexion la même longueur que les portions $pp' q' q$ comprises entre deux plans doe , $d' o' e'$ menés normalement à la fibre centrale oo' par les centres de gravité o , o' des sections, et que les dilatations longitudinales puissent ainsi être toujours exprimées par $\vartheta_o + \frac{z}{\rho}$, ϑ_o étant la dilatation de la fibre oo' , ρ son rayon de courbure oC , et z la distance d'une fibre quelconque à la droite o menée par le centre de la section, parallèlement à l'intersection C des deux plans normaux ; 2° que les fibres se contractent latéralement

(ainsi qu'on l'a démontré possible toutes les fois que leur dilatation a une expression linéaire) de manière qu'elles ne se pressent pas l'une l'autre perpendiculairement à leur longueur, et que par conséquent la traction longitudinale sur l'élément $d\omega$ soit $E d\omega \left(\vartheta_o + \frac{z}{\rho} \right)$; ce qui n'empêche pas les mêmes fibres de pouvoir exercer les unes sur les autres des actions longitudinales analogues à des frottements sur leurs diverses faces latérales telles que mm' , nn' , etc., en vertu de leurs petits *glissements* les unes devant les autres ou des inclinaisons qu'ont prises leurs arêtes sur leurs bases $d\omega = mn$ ou $m' n'$; 3° que ϑ_o soit constant, en sorte que les diverses sections ω déjà sollicitées toutes tangentielllement par les mêmes forces transversales qui dépendent de ces inclinaisons, et dont nous appelons P la résultante constante supposée parallèle à oC ou aux z , soient aussi sollicitées toutes par des forces longitudinales ayant la même somme $E\omega\vartheta_o$; mais que l'on ait la courbure $\frac{1}{\rho}$ variable uniformément d'un bout à l'autre, et égale à $\frac{P(a-x)}{EI}$,

I exprimant le moment d'inertie $\int z^2 d\omega$ de la section ω autour de la

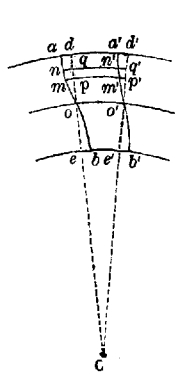
ligne o , et $P(a - x)$ le moment variable autour de la même ligne o , des forces extérieures qui agissent à l'extrémité du prisme; en sorte que ces forces sont tenues en équilibre de rotation par les tractions $Ed\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right)$ sur une même section, vu que le moment total de celles-ci est $\frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega$; 4° enfin que, d'après la forme courbe aob prise par toutes les sections, les actions tangentielles longitudinales soient nulles sur les faces latérales *extérieures* du prisme, et que, sur les faces mm' , nn' , etc., d'un élément quelconque de fibre, les différences qu'offrent ces actions tangentielles en vertu de ce que les inclinaisons des arêtes sur les bases ne sont pas les mêmes en m qu'en n , en m' qu'en n' , etc., se trouvent justement équilibrées par la différence due à la variation de $\frac{1}{\rho}$, des actions aussi longitudinales $Ed\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right)$ qui s'exercent en sens opposé sur les deux bases mn , $m'n'$ du même élément.

La compatibilité des trois premières de ces suppositions faites sur les déplacements est évidente d'elle-même; et comme elles assurent l'équilibre soit de translation, soit de rotation générale, de toute tranche comprise entre deux sections ω , elles se concilient aussi avec la quatrième dont l'accomplissement se réduit à choisir, parmi l'infinité des formes attribuables à la surface courbe des sections infléchies, celle qui produit l'équilibre *de détail*, ou de chaque élément de la tranche en particulier; forme qui doit toujours exister, bien qu'on ne puisse l'assigner pour chaque cas qu'à la suite d'une analyse plus ou moins compliquée, dont nous avons donné ci-dessus divers exemples [*].

[*] On peut déterminer cette forme immédiatement dans un cas simple, le cas où les sections supposées rectangulaires seraient assez étroites dans un sens perpendiculaire au plan de flexion oCo' pour que les coupes aob de leur surface courbe pussent être regardées comme les mêmes par tout plan parallèle à oCo' .

En effet, — u' étant la perpendiculaire abaissée de m sur le plan doe perpendiculaire lui-même à la tangente à la fibre centrale en o , $\frac{du'}{dz}$ est l'inclinaison de cette tangente sur la section au point m ; mais la fibre ou ligne matérielle mm' primitivement parallèle à la fibre centrale, a sur elle maintenant une légère inclinaison due à ce que les contractions dans le sens z ont été $\varepsilon' \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right)$ sur la section aob , et

Les déplacements des points du prisme étant tels qu'on vient de les supposer, ses faces latérales n'éprouveront aucune action, et ses deux bases



$\varepsilon' \left[\partial_0 + z \left(\frac{1}{\rho} + \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot mm' \right) \right]$ sur celle $a' o' b'$, ce qui a rapproché le point m' plus que le point m de la fibre centrale oo' , de

$\varepsilon' \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot mm' \cdot \int_0^z z dz$, et donne ainsi en divisant par mm' et intégrant, $-\frac{\varepsilon' z^2}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{\rho}$ pour l'inclinaison de mm' sur cette fibre centrale;

ce qui fait au total $\frac{du'}{dz} - \frac{\varepsilon' z^2}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{\rho}$ pour l'inclinaison prise par la

fibre mm' sur la section ω à laquelle elle était primitivement perpendiculaire.

Appelant G' le coefficient par lequel il faut multiplier cette inclinaison ou ce *glissement* pour avoir, par unité superficielle, la résistance qu'il développe, et $2b$ la petite largeur de la section dont $2c$ représente la hauteur doe , on a pour l'équilibre de translation longitudinale d'une tranche $mm' n' n$ de cette largeur $2b$,

$$G' \cdot 2b dx \frac{d}{dz} \left(\frac{du'}{dz} - \frac{\varepsilon' z^2}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{\rho} \right) dz = -2b dz \frac{d \cdot E \left(\partial_0 + \frac{z}{\rho} \right)}{dx} dx;$$

ou, comme $\frac{EI}{\rho} = P(a-x)$, $\frac{d}{dx} \frac{1}{\rho} = -\frac{P}{EI} = -\frac{3P}{E\omega c^2}$;

$$G' \frac{d}{dz} \left(\frac{du'}{dz} + \frac{\varepsilon' z^2}{2} \frac{3P}{E\omega c^2} \right) = \frac{3Pz}{\omega c^2};$$

d'où, intégrant de manière que, pour $z=c$, l'inclinaison $\frac{du'}{dz} + \frac{\varepsilon' z^2}{2} \frac{3P}{E\omega c^2}$ de la fibre sur la section soit nulle :

$$G' \left(\frac{du'}{dz} + \frac{\varepsilon' z^2}{2} \frac{3P}{E\omega c^2} \right) = \frac{3P(z^2 - c^2)}{2\omega c^2};$$

ou, intégrant de nouveau de manière que $u' = 0$ pour $z = 0$,

$$u' = -\frac{3Pc}{2G'\omega} \left[\frac{z}{c} - \left(1 - \frac{\varepsilon' G'}{E} \right) \frac{z^3}{3c^3} \right],$$

comme nous avons déjà trouvé art. 29, expression (112).

Cet exemple suffirait pour convaincre, s'il en était besoin, que le problème de la forme courbe des sections n'impose pas, quel que soit le contour, plus de conditions qu'on n'en peut remplir, et qu'il a par conséquent toujours une solution.

extrêmes seront sollicitées par des forces longitudinales $E d\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right)$ et par des forces tangentielles ou transversales qui dépendent de la forme nouvelle des surfaces des sections primitivement planes.

Réciproquement, comme les déplacements relatifs sont produits d'une manière unique par des forces extérieures données, *Un prisme dont les faces latérales ne sont soumises à aucune action et dont les deux bases extrêmes supportent à la fois, 1° dans le sens longitudinal, des tractions (positives ou négatives) qui varient linéairement ou qui sont exprimables par $E d\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho_1} \right)$, $E d\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho_2} \right)$, la constante ϑ_0 ayant une même valeur sur les deux bases, mais celles $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ ayant généralement des valeurs différentes dont l'une des deux peut être nulle, et la coordonnée transversale z étant, du reste, comptée et dirigée de la même manière sur l'une et sur l'autre; 2° dans un sens transversal ou tangentiel, des actions qui ont mêmes grandeurs et directions aux points homologues de ces deux bases dont nous appelons a la distance, et une résultante P ayant avec le quotient $\frac{1}{a} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right)$ un rapport déterminé qui dépend de la forme et de la grandeur des sections [*], ainsi que le mode de distribution des mêmes actions; ce prisme, dis-je, prendra dans toutes ses parties des dilatations longitudinales $\vartheta_0 + \frac{z}{\rho}$, $\frac{1}{\rho}$ variant uniformément le long de l'axe entre ses valeurs extrêmes $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$; les éléments $d\omega$ de chaque section intérieure supporteront des actions*

[*] Ce rapport est $E \int z^2 d\omega$, ou plus généralement $E \sqrt{(\int z^2 d\omega)^2 + (\int yz d\omega)^2}$, car $\frac{1}{a} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right)$ n'est autre chose que ce que nous désignons dans la note précédente par $\frac{1}{dx} \frac{d}{dx} \frac{1}{\rho}$; et, P_x et P_y étant les composantes de P dans le sens z et dans le sens d'une autre coordonnée y perpendiculaire à z , enfin $a - x$ la distance de ω à la seconde extrémité du prisme, l'équilibre de rotation autour des lignes z , y passant par o , s'exprime par $-P_x(a-x) = \int E d\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right) z$, $-P_y(a-x) = \int E d\omega \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right) y$, d'où $P_x = E \int z^2 d\omega \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{\rho}$, $P_y = E \int yz d\omega \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{\rho}$.

normales ou longitudinales $E d\omega \left(\lambda_0 + \frac{z}{\rho} \right)$, et précisément les mêmes actions tangentielles que chacune des deux bases extrêmes; actions dont la résultante P doit produire, avec un bras de levier égal à la distance de chaque base à une section quelconque, un moment capable de contre-balancer justement celui des actions longitudinales autour du même axe tracé sur cette section par son centre.

En sorte que, pour un pareil mode de sollicitation, on aura exactement les formules connues de la théorie ordinaire de la flexion des prismes, accompagnée d'extension de la fibre centrale; formules ne donnant jamais, au reste, comme nous avons dit, que la partie des déplacements due aux dilatations longitudinales des fibres, et auxquelles il faut joindre, pour avoir les autres parties et en tirer les conditions complètes de résistance, les formules un peu plus compliquées et que l'analyse seule peut fournir, qui donnent les déplacements dus aux petits glissements des tranches ou des fibres l'une devant l'autre; déplacements le plus souvent négligeables, mais qui dans quelques cas augmentent sensiblement la *flèche* de flexion, ainsi que la dilatation maximum, alors de sens oblique, qu'il convient de limiter pour prévenir les ruptures.

32. Conclusion. *Observation générale pour le cas où le mode d'application et de distribution des forces extérieures vers les extrémités est différent de celui qui rend tout à fait exactes les formules auxquelles conduit la méthode mixte.*

Ainsi que nous avons dit art. 3, si le mode de sollicitation est différent, ou si des forces ayant à chaque extrémité même résultante géométrique et même moment résultant que celles dont nous venons de parler, y sont appliquées et distribuées d'une autre manière, les résultats ci-dessus pourront être toujours employés comme représentant très-approximativement l'état du prisme, supposé n'éprouver dans l'intervalle aucune action extérieure.

En effet, si, sur deux sections quelconques de ce prisme, extrêmes ou non, la distribution des forces a lieu comme on a dit, l'analyse précédente prouve qu'elle aura lieu, par cela seul, de la même manière sur toutes les sections intermédiaires. L'état que ces formules dé-

terminent est ainsi pour les diverses sections considérées à partir de chaque extrémité, ce qu'est l'état *permanent* d'un écoulement d'eau, ou l'état de *règlement* du mouvement d'une machine, etc., pour les divers instants considérés à partir de l'état initial : c'est un état limite qui se continue de lui-même une fois qu'il est atteint quelque part, et vers lequel converge jusque-là l'état réel du prisme fléchi, quel que soit le mode d'application de forces données vers les extrémités, à mesure que l'on considère des sections moins proches de celles-ci, car ici le *règlement* s'opère par l'espace et non par le temps.

C'est une remarque que nous avons eu l'occasion de faire ailleurs pour les divers cas de torsion et même pour celui d'extension d'un prisme par des forces qui le tirent aux deux bouts, cas dont la formule très-simple et admise par tout le monde sans difficulté est cependant subordonnée, pour être exacte, aussi à la condition d'une distribution déterminée des forces de traction.

La *convergence* est-elle prompte, ou l'état-limite de distribution intérieure qui tend à s'opérer s'opère-t-il en effet sensiblement à de très-petites distances? C'est ce que l'analyse ne peut encore révéler (art. 3), mais ce dont plusieurs faits d'expérience ne permettent pas de douter. Que, par exemple, on pince avec des tenailles un prisme en caoutchouc, on verra que l'impression produite s'étend à peine de part et d'autre à une distance égale à sa plus grande profondeur : elle paraît absolument nulle au delà. On observe quelque chose de semblable en étendant transversalement quelque part une lanière de cette même substance. En général, les déplacements produits dans les diverses parties d'un prisme par des forces qui se font équilibre par l'intermédiaire d'une de ses parties, deviennent tout à fait négligeables hors cette partie, à de très-petites distances des points où les forces s'exercent.

Or, quel que soit le système des forces qui agissent à chaque extrémité d'un prisme pour le fléchir, le tordre, l'allonger, etc., on peut toujours le remplacer par deux autres systèmes, l'un de forces ayant même résultante géométrique et même moment résultant que les forces données, mais appliquées et distribuées de manière à engendrer des déplacements exactement représentés par les formules; l'autre système se composant de forces ayant une résultante et un moment nuls, c'est-à-dire de forces se faisant équilibre sur une portion très-

courte du prisme, et pouvant être négligées comme nous venons de dire quant à leurs effets sur le reste de ce solide.

On peut donc regarder tout au moins pour la pratique les déplacements produits par des forces extérieures, appliquées et distribuées d'une manière quelconque vers les extrémités des prismes, comme représentées par les formules que l'on tire des équations différentielles de l'équilibre d'élasticité traitées par la méthode que nous appelons mixte, méthode qui fournit des valeurs rigoureuses dans un cas, et, dans tous les autres, des limites promptement atteintes hors des petites portions où les forces s'exercent, et que les constructeurs ont toujours soin de renforcer ou de garnir de fourrures.

En sorte que si l'on parvient un jour à déterminer analytiquement d'une manière complète l'état intérieur d'un prisme pour des forces agissant d'une manière quelconque vers leurs extrémités, tout porte à prévoir que les formules excessivement compliquées auxquelles on arrivera retomberont dans celles dont nous venons de parler lorsque, pour les rendre applicables, on les débarrassera des termes peu influents, causes de leur complication et expression des effets, rapidement évanouissants, de systèmes en équilibre ou n'apportant rien à la résultante ni au moment total qu'il suffit ainsi de considérer seuls pour chaque extrémité.

