JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales définies multiples, et démonstration nouvelle d'une célèbre formule de Gauss concernant les fonctions gamma de Legendre

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 82-88.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__82_0>

Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales définies multiples, et démonstration nouvelle d'une célèbre formule de Gauss concernant les fonctions gamma *de Legendre;*

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. L'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-\left(\alpha^2+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)} d\alpha$$

est, comme on sait, égale à

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2k},$$

k désignant une quantité quelconque positive ou nulle. En y remplaçant α par $\sqrt{\alpha}$ et doublant sa valeur, on a donc

$$(1)\qquad \int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1} d\alpha = \sqrt{\pi} e^{-2k}.$$

J'ignore si l'on a remarqué déjà que la formule

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = 2^{1-\mu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu),$$

où $\Gamma(\mu)$ désigne, suivant la notation de Legendre, l'intégrale eulérienne de seconde espèce

$$\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{\mu-1}\,d\alpha,$$

est une conséquence immédiate de l'équation (1). Il suffit de multiplier les deux membres de l'équation (1) par $k^{\mu-1}\,dk$, puis d'intégrer de $k=0$ à $k=\infty$. Cela donne en effet, en changeant l'ordre des intégrations pour α et k,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{\frac{1}{2}-1}d\alpha\int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{\alpha}}k^{\mu-1}dk = \sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-2k}k^{\mu-1}dk.$$

Or on a

$$\int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{\alpha}}k^{\mu-1}dk = \frac{1}{2}\alpha^{\frac{\mu}{2}}\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{\frac{\mu}{2}-1}d\beta = \frac{1}{2}\alpha^{\frac{\mu}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)$$

et

$$\int_0^\infty e^{-2k}k^{\mu-1}dk = \frac{\Gamma(\mu)}{2^\mu}.$$

Substituant et multipliant par 2, on arrive à la formule citée.

2. Je me propose, dans cette Note, d'étendre la même analyse à la démonstration de la formule générale que l'on doit à Gauss :

$$\text{(A)}\qquad \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-\mu}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\mu).$$

Je regarde comme connue l'équation d'Euler

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

qu'on établit aisément par différents moyens. Mais j'ai besoin de trouver d'abord les valeurs d'une classe d'intégrales multiples, très-remarquables du reste en elles-mêmes, et qui peuvent être appliquées utilement à la recherche des intégrales de certaines équations aux différences partielles.

Ainsi pour le cas de $n = 3$, c'est-à-dire pour démontrer la formule

$$\text{(B)}\qquad \Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+2}{3}\right) = 3^{\frac{1}{2}-\mu}.2\pi.\Gamma(\mu),$$

je me sers de l'intégrale double

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\beta+\frac{k^3}{\alpha\beta}\right)}\alpha^{\frac{1}{3}-1}\beta^{\frac{2}{3}-1}d\alpha\, d\beta,$$

dont je prouve que la valeur est

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)e^{-3k},$$

ou

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-3k}.$$

Admettant en effet qu'on a

$$(2)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\beta+\frac{k^3}{\alpha\beta}\right)}\alpha^{\frac{1}{3}-1}\beta^{\frac{2}{3}-1}\,d\alpha\,d\beta=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-3k},$$

multipliez les deux membres par $k^{\mu-1}dk$ et intégrez de $k=0$ à $k=\infty$. L'intégration par rapport à k s'effectuera sous les signes $\int$ en observant que

$$\int_0^\infty e^{-\frac{k^3}{\alpha\beta}}k^{\mu-1}dk=\frac{1}{3}(\alpha\beta)^{\frac{\mu}{3}}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right),$$

et le premier membre deviendra

$$\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)}\alpha^{\frac{\mu+1}{3}-1}\beta^{\frac{\mu+2}{3}-1}\,d\alpha\,d\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+2}{3}\right);$$

quant au second membre, on trouve

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int_0^\infty e^{-3k}k^{\mu-1}dk,$$

ou

$$\frac{2\pi}{3^\mu\sqrt{3}}\Gamma(\mu).$$

De là

$$\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+2}{3}\right)=\frac{2\pi}{3^\mu\sqrt{3}}\Gamma(\mu),$$

et, en multipliant par 3, la formule (B).

En général, l'intégrale définie à $(n - 1)$ variables

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \alpha_2^{\frac{2}{n}-1} \cdots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_{n-1},$$

que je désignerai par R, a pour valeur

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk},$$

et il suffit de multiplier par $k^{\mu-1}\,dk$ les deux membres de l'équation qui exprime ce fait, puis d'intégrer de $k = 0$ à $k = \infty$, pour obtenir la formule (A).

3. Le calcul qui conduit à cette formule (A) peut être présenté autrement, en s'appuyant toujours sur la valeur de notre intégrale R, mais en partant, non plus de cette intégrale, mais du produit

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right),$$

qu'on peut mettre sous forme d'intégrale multiple, savoir

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})} \alpha^{\frac{\mu}{n}-1} \alpha_1^{\frac{\mu+1}{n}-1} \cdots \alpha_{n-1}^{\frac{\mu+n-1}{n}-1}\, d\alpha\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1}.$$

Substituons en effet, dans cette intégrale, à la variable α une autre variable k ayant les mêmes limites, en posant

$$\alpha = \frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}},$$

ce qui donne

$$\alpha^{\frac{\mu}{n}-1}\,d\alpha = \frac{nk^{\mu-1}\,dk}{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})^{\frac{\mu}{n}}}:$$

le résultat de la substitution contiendra notre intégrale R; car il peut s'écrire

$$n\int_0^\infty \mathrm{R}\,k^{\mu-1}\,dk.$$

Si donc on admet que

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk},$$

il deviendra

$$n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty e^{-nk} k^{\mu-1}\, dk,$$

c'est-à-dire

$$n^{\frac{1}{2}-\mu} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\mu);$$

d'où résultera de suite la formule (A).

4. La formule

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk},$$

ou, si l'on veut,

$$R = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) e^{-nk},$$

se démontre, au surplus, bien simplement.

Pour mieux faire comprendre notre méthode, revenons d'abord sur le cas de $n = 2$. Alors

$$R = \int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1}\, d\alpha;$$

donc

$$\frac{dR}{dk} = -2k \int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1} \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Substituons à la variable α une autre variable β en posant

$$\alpha = \frac{k^2}{\beta}, \quad \text{d'où} \quad \frac{k^2}{\alpha} = \beta \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{d\beta}{\beta}.$$

Les limites pour β seront ∞ et o, ou bien o et ∞ en changeant le signe de $d\beta$. On aura par suite

$$\frac{dR}{dk} = -2 \int_0^\infty e^{-\left(\beta + \frac{k^2}{\beta}\right)} \beta^{\frac{1}{2}-1}\, d\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dR}{dk} = -2R,$$

et partant

$$R = Ce^{-2k}.$$

La constante C se détermine en posant $k = 0$; elle est égale à $\sqrt{\pi}$. On a donc bien

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha + \frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1} d\alpha = \sqrt{\pi}\, e^{-2k}.$$

Soit à présent $n = 3$, ou

$$R = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha+\beta+\frac{k^3}{\alpha\beta}\right)} \alpha^{\frac{1}{3}-1} \beta^{\frac{2}{3}-1} d\alpha\, d\beta.$$

En différentiant par rapport à k, on a

$$\frac{dR}{dk} = -3k^2 \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha+\beta+\frac{k^3}{\alpha\beta}\right)} \alpha^{\frac{1}{3}-1} \beta^{\frac{2}{3}-1} d\alpha\, d\beta.$$

Substituons à la variable α une autre variable γ, en posant

$$\alpha = \frac{k^3}{\beta\gamma}, \quad \text{d'où} \quad \frac{k^3}{\alpha\beta} = \gamma, \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{d\gamma}{\gamma}.$$

Les limites pour γ seront encore 0 et ∞, à la condition de changer le signe de $d\gamma$. Il nous viendra donc

$$\frac{dR}{dk} = -3 \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(\beta+\gamma+\frac{k^3}{\beta\gamma}\right)} \beta^{\frac{1}{3}-1} \gamma^{\frac{2}{3}-1} d\beta\, d\gamma.$$

L'intégrale placée au second membre est encore R : seulement α et β sont remplacés par β et γ, ce qui n'importe en rien. Dès lors on a

$$\frac{dR}{dk} = -3R,$$

d'où

$$R = Ce^{-3k}.$$

En posant $k = 0$, on trouve d'ailleurs

$$C = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right):$$

on a donc bien

$$R = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)e^{-3k},$$

comme le donne, pour $n = 3$, notre formule.

Prenant enfin la valeur générale de R, savoir

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \alpha_2^{\frac{2}{n}-1} \cdots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_{n-1},$$

différentions-la par rapport à k. La valeur de la dérivée sera

$$-nk^{n-1}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \alpha_2^{\frac{2}{n}-1} \cdots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} \frac{d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_{n-1}}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}.$$

Substituons à la variable α_1 une autre variable α_n, en posant

$$\alpha_1 = \frac{k^n}{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n},$$

et la valeur de $\frac{dR}{dk}$ se présentera sous cette autre forme

$$-n\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n+\frac{k^n}{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n}\right)} \alpha_2^{\frac{1}{n}-1} \alpha_3^{\frac{2}{n}-1} \cdots \alpha_n^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_2\, d\alpha_3 \ldots d\alpha_n.$$

L'intégrale en facteur est précisément R : seulement les indices de α sont tous ici plus grands d'une unité qu'ils n'étaient d'abord, ce qui est indifférent. On a donc

$$\frac{dR}{dk} = -nR,$$

d'où

$$R = Ce^{-nk}:$$

en posant $k = 0$, il vient d'ailleurs

$$C = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

La formule

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk}.$$

est donc démontrée.