JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Démonstration nouvelle d'une formule de M. William Thomson

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 445-450.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__445_0>

DÉMONSTRATION NOUVELLE

D'UNE

FORMULE DE M. WILLIAM THOMSON;

PAR M. J. LIOUVILLE.

M. William Thomson a donné dans un des numéros de ce Journal une formule curieuse que voici : Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des variables en nombre $n > 1$, et $g, h, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ des constantes réelles, les deux premières g et h positives. Désignons par Z l'intégrale, prise de $-\infty$ à $+\infty$ pour toutes les variables, de la formule différentielle

$$\frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{[g^2 + (\xi_1 - a_1)^2 + \ldots + (\xi_n - a_n)^2]^{\frac{n+1}{2}} [h^2 + (\xi_1 - b_1)^2 + \ldots + (\xi_n - b_n)^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

En posant

$$c = (a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2,$$

on aura

$$g.\mathrm{Z} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{[c + (g+h)^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

le signe Γ désignant à l'ordinaire l'intégrale eulérienne de seconde espèce.

M. W. Thomson donne de cette formule deux démonstrations fort élégantes. La démonstration nouvelle que je vais exposer paraît plus simple encore : elle repose d'ailleurs sur des principes complétement différents.

D'abord si l'on remplace par deux exposants positifs quelconques p, q les exposants $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$ qui figurent dans l'élément de l'intégrale Z, de manière que cette intégrale Z devienne

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{P^p Q^q},$$

en posant, pour abréger,

$$P = g^2 + (\xi_1 - a_1)^2 + \ldots + (\xi_n - a_n)^2,$$

et

$$Q = h^2 + (\xi_1 - b_1)^2 + \ldots + (\xi_n - b_n)^2,$$

l'intégrale multiple ainsi généralisée se réduira toujours à une intégrale simple.

En effet, on a

$$\frac{1}{P^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-\alpha P} \alpha^{p-1} \, d\alpha,$$

et

$$\frac{1}{Q^q} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{\infty} e^{-\beta Q} \beta^{q-1} \, d\alpha.$$

La substitution de ces valeurs dans l'intégrale Z introduira l'exponentielle

$$e^{-(\alpha P + \beta Q)},$$

et l'on aura

$$Z = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^{\infty} \alpha^{p-1} \, d\alpha \int_0^{\infty} \beta^{q-1} \, d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha P + \beta Q)} \, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Or l'exposant $\alpha P + \beta Q$ peut se mettre sous la forme

$$\alpha g^2 + \beta h^2 + \frac{c.\alpha\beta}{\alpha + \beta} + (\alpha + \beta)(\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_n^2),$$

en donnant à c la signification marquée plus haut et en posant

$$\xi_1 - \frac{\alpha a_1 + \beta b_1}{\alpha + \beta} = \zeta_1, \ldots, \qquad \xi_n - \frac{\alpha a_n + \beta b_n}{\alpha + \beta} = \zeta_n.$$

On peut substituer aux variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les variables $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$; les limites continueront à être $-\infty$, $+\infty$, et le produit $d\xi_1 \ldots d\xi_n$ sera remplacé par $d\zeta_1 \ldots d\zeta_n$. Cela posé, toutes les intégrations relatives à $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ s'effectueront séparément au moyen de la formule connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\zeta^2}\,d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}},$$

et il viendra

$$Z = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\alpha g^2 + \beta h^2 + \frac{c\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)} \frac{\alpha^{p-1}\beta^{q-1}\,d\alpha\,d\beta}{(\sqrt{\alpha+\beta})^n}.$$

Posons

$$\alpha = rt, \qquad \beta = r(1-t);$$

les limites pour r et t seront respectivement 0 et ∞, 0 et 1; le produit $d\alpha d\beta$ devra être remplacé par $r dr dt$, et l'intégration relative à r deviendra facile en se rappelant que

$$\int_0^\infty e^{-kr} r^{s-1}\,dr = \frac{\Gamma(s)}{k^s}.$$

On trouvera de la sorte

$$Z = \frac{(\sqrt{\pi})^n\,\Gamma\left(p+q-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} \int_0^1 \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}{[g^2 t + h^2(1-t) + ct(1-t)]^{p+q-\frac{n}{2}}}.$$

Nous voilà donc parvenus, quels que soient les exposants p et q, à une intégrale simple. Mais si l'on prend maintenant, avec M. Thomson,

$$p = \frac{n+1}{2}, \qquad q = \frac{n-1}{2},$$

on verra qu'en faisant

$$\frac{n}{2} - 1 = \mu,$$

on a

$$p - 1 = \mu + \frac{1}{2}, \quad q - 1 = \mu - \frac{1}{2}, \qquad p + q - \frac{n}{2} = \mu + 1:$$

l'intégrale relative à t dans la formule ci-dessus prendra donc alors la forme

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}\,dt}{[g^2 t + h^2(1-t) + ct(1-t)]^{\mu+1}},$$

et par conséquent elle sera égale à

$$\frac{\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{g.\Gamma(\mu+1)[c+(g+h)^2]^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

d'après ce que j'ai démontré récemment dans ce Journal (*voir* le cahier de *novembre*, page 421). Substituant après avoir remplacé μ par $\frac{n}{2}-1$, mettant d'ailleurs pour p et q leurs valeurs sous les Γ, puis réduisant et multipliant par g, on obtiendra pour $g.Z$ la valeur écrite plus haut, que M. Thomson a trouvée le premier.

Je viens de déduire la formule de M. Thomson de la valeur que j'ai donnée pour l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}dt}{[g^2t+h^2(1-t)+ct(1-t)]^{\mu+1}}.$$

Réciproquement la valeur de cette intégrale, prise même dans toute sa généralité, c'est-à-dire en y supposant μ soumis à la seule restriction que $\mu+\frac{1}{2}$ soit positif ou à partie réelle positive, pourrait se conclure de la formule de M. Thomson une fois admise et combinée avec le calcul par lequel j'ai réduit l'intégrale multiple qu'elle exprime à une intégrale simple. Il semble, il est vrai, au premier coup d'œil, qu'on ne puisse traiter ainsi que le cas de $\mu=\frac{n}{2}-1$, n étant un nombre entier; mais on passe de là, et même d'un cas particulier quelconque, au cas général, en différentiant à indices quelconques par rapport à c. La méthode est donc complète; mais elle est longue et peu naturelle: néanmoins c'est ainsi, je dois l'avouer, que j'ai d'abord procédé.

Ici vient s'offrir à nous une méthode nouvelle, et que l'on croira d'abord très-facile, pour la détermination de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}dt}{[g^2t+h^2(1-t)+ct(1-t)]^{\mu+1}}.$$

Puisque le calcul des différentielles à indices quelconques mène de suite d'un cas particulier pris à volonté au cas général, il suffirait d'avoir la valeur de notre intégrale pour $\mu = 0$, par exemple : en d'autres termes, il suffira de prouver que l'on a

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t}.dt}{[g^2 t + h^2(1-t) + ct(1-t)]\sqrt{1-t}} = \frac{\pi}{g\sqrt{c+(g+h)^2}},$$

puis de différentier par rapport à c. Or l'intégration, même indéfinie, peut alors s'effectuer ; elle s'effectuerait aussi pour $\mu = \frac{1}{2}$ et dans une infinité d'autres cas. Je doute pourtant que ceux qui essayeront de ces calculs les jugent préférables à la méthode que j'ai suivie dans le cahier de novembre.

Si l'on ne rencontrait pas si souvent, sans la chercher, la formule de Legendre et de Gauss

$$\Gamma(\rho)\Gamma\left(\rho+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2\rho}.\sqrt{\pi}.\Gamma(2\rho),$$

je ferais observer qu'elle se déduit de l'équation

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}dt}{[g^2t + h^2(1-t) + ct(1-t)]^{\mu+1}} = \frac{\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{g.\Gamma(\mu+1).[c+(g+h)^2]^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Prenez en effet $g = h = 1$ et $c = 0$; cette équation vous donnera

$$\int_0^1 t^{\mu+\frac{1}{2}}(1-t)^{\mu-\frac{1}{2}}dt = \frac{\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{2^{2\mu+1}\Gamma(\mu+1)};$$

or le premier membre est égal à

$$\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\mu+2)};$$

substituant cette valeur et simplifiant, on en conclut

$$\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)=2^{1-2(\mu+1)}.\sqrt{\pi}.\Gamma(2\mu+2),$$

et par suite, en posant $\mu=\rho-1$, on tombe sur la formule citée.

FIN DU TOME PREMIER (2^e^ SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, n° 12.