JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. JULLIEN

Mémoire sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 425-444.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__425_0>

MÉMOIRE

SUR

LE MOUVEMENT DE LA TERRE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ;

PAR LE PÈRE M. JULLIEN, S. J.

La théorie du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité a été considérée jusqu'ici comme un des points les plus difficiles de la Mécanique céleste. Dernièrement M. Poinsot a montré comment la méthode des couples conduit par une voie simple et lumineuse à des formules qui représentent le mouvement de l'axe terrestre d'une manière approchée, quant à ses traits les plus apparents; mais l'analyse difficile de Laplace est restée la voie la plus simple pour arriver aux formules qui représentent le phénomène dans tous les détails que l'observation peut saisir [*].

Le problème de la détermination du mouvement de la Terre autour de son centre prenant de jour en jour plus d'intérêt, à mesure que l'astronomie stellaire se développe, il m'a paru utile de chercher une solution plus simple que celles qui ont été données jusqu'ici. La méthode des couples m'a fourni cette solution : sans avoir recours à d'autre théorème que celui de la composition des couples suivant la loi du parallélogramme, j'arrive, par des calculs très-simples, non-seulement aux formules de Laplace, mais aussi aux formules plus com-

[*] Si je n'éprouvais pas de la répugnance à intervenir dans les travaux des autres en les chargeant de notes, j'aurais plus d'une observation à présenter sur ce Mémoire. Qu'il me soit du moins permis de dire que la méthode de Laplace devient très-facile quand on l'expose avec de légers changements, en profitant de quelques remarques de Poisson, ainsi que je l'ai fait dans un des Cours du Collége de France, à l'époque déjà bien ancienne où j'étais le suppléant de M. Biot. J'ai dû m'occuper alors de la plupart des grandes questions de la physique mathématique et de la mécanique céleste, et tout naturellement j'ai traité de la précession des équinoxes. On retrouverait sans peine dans les Thèses des candidats au doctorat ès sciences de nombreuses traces de mon enseignement. (J. LIOUVILLE.)

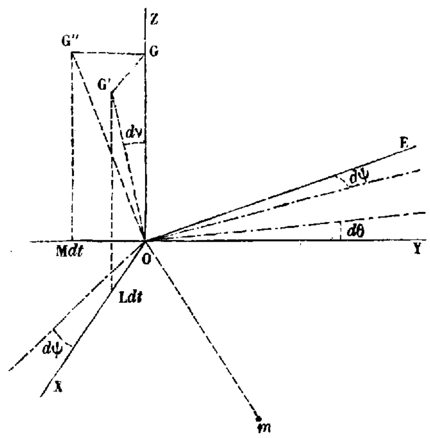
plètes données par Bessel, dont les astronomes se servent actuellement dans les recherches qui exigent la plus grande précision.

I.

Je reprends la question dès le principe.

Dans le calcul du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, on peut sans erreur appréciable considérer les masses du Soleil et de la Lune comme réunies à leurs centres de gravité respectifs. On est donc conduit à calculer les moments de l'attraction exercée sur la Terre par un point matériel fort éloigné autour des axes principaux d'inertie qui se coupent au centre de gravité du corps attiré.

Dans toute la suite des calculs, nous regarderons comme positives les rotations qui s'effectuent de droite à gauche, suivant l'usage des astronomes; nous étendrons cette convention aux moments des forces et aux moments des couples. Nous ne ferons d'abord aucune hypothèse sur la constitution de la Terre.



Soient

OX, OY, OZ trois axes coordonnés dirigés suivant les axes principaux d'inertie de la Terre relatifs au centre de gravité;

x', y', z' les coordonnées d'une molécule de la Terre;

dm' la masse de cette molécule;

x, y, z les coordonnées du point attirant, lequel est très-éloigné de l'origine;

r la distance de ce point au centre de gravité de la Terre;

r' la distance du même point à la molécule dm';

m le produit de la masse du même point par la constante qui mesure l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance;

X, Y, Z les composantes de l'attraction exercée par le point sur la Terre, dirigées suivant les axes OX, OY, OZ;

L, M, N les moments de cette attraction autour des axes OX, OY, OZ.

Nous avons d'abord

$$X = m\int \frac{x - x'}{r'^3}\,dm', \quad Y = m\int \frac{y - y'}{r'^3}\,dm', \quad Z = m\int \frac{z - z'}{r'^3}\,dm',$$

les intégrales s'étendant à toutes les molécules de la Terre. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} L &= Zy - Yz = mz\int \frac{y'}{r'^3}\,dm' - my\int \frac{z'}{r'^3}\,dm', \\ M &= Xz - Zx = mx\int \frac{z'}{r'^3}\,dm' - mz\int \frac{x'}{r'^3}\,dm', \\ N &= Yx - Xy = my\int \frac{x'}{r'^3}\,dm' - mx\int \frac{y'}{r'^3}\,dm'. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3}\left[1 - \left(2\frac{x}{r}\frac{x'}{r} + 2\frac{y}{r}\frac{y'}{r} + 2\frac{z}{r}\frac{z'}{r} - \frac{x'^2}{r^2} - \frac{y'^2}{r^2} - \frac{z'^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{3}{2}};$$

si nous développons la puissance fractionnaire par la formule du binôme, et que nous négligions dans ce développement les termes qui contiennent les secondes puissances des rapports très-petits $\frac{x'}{r}$, $\frac{y'}{r}$, $\frac{z'}{r}$ vis-à-vis des rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ qui sont comparables à l'unité, il reste

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + 3\,\frac{xx' + yy' + zz'}{r^2}\right).$$

Substituant cette valeur dans les expressions des moments L, M, N, et nommant A, B, C les moments d'inertie principaux de la Terre autour des axes OX, OY, OZ, il vient

$$L = \frac{3m(C - B)}{r^5}\,yz, \quad M = \frac{3m(A - C)}{r^5}\,zx, \quad N = \frac{3m(B - A)}{r^5}\,xy.$$

II.

Actuellement, ayons égard à ce que l'observation et la théorie nous apprennent sur la constitution de la Terre.

Le centre de gravité de la Terre étant supposé fixe, le mouvement du globe est une rotation autour d'un axe qui paraît absolument fixe dans ce corps, bien qu'il se déplace d'une manière sensible dans l'espace. De plus, la forme de la Terre diffère peu de la forme sphérique; et rien ne porte à croire que les éléments de masse situés à une même distance du centre aient des densités fort inégales. Nous pouvons donc admettre que les différences entre les moments d'inertie principaux, et par suite les moments L, M, N, sont peu considérables vis-à-vis de la masse de la Terre. Or, si l'axe de rotation de la Terre était réellement fixe dans ce corps, et les moments L, M, N tout à fait nuls, l'axe de rotation serait un axe principal d'inertie, suivant la propriété caractéristique dont jouissent les axes principaux d'inertie d'être axes permanents de rotation. D'après cela, nous pouvons supposer, sans qu'il en résulte une erreur sensible, que la rotation de la Terre s'effectue autour d'un axe principal d'inertie.

La figure de la Terre est celle d'un solide de révolution autour de son axe de rotation; et tout porte à croire que les deux axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité qui sont situés dans le plan de l'équateur, ont des moments égaux. Nous prendrons l'équateur pour plan XOY, et nous poserons

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}.$$

L'aplatissement de la Terre vers les pôles nous conduit à supposer encore

$$\mathrm{C} > \mathrm{A}.$$

Ainsi nous avons

$$\mathrm{L} = \frac{3m(\mathrm{C}-\mathrm{A})}{r^5} yz, \quad \mathrm{M} = -\frac{3m(\mathrm{C}-\mathrm{A})}{z^5} zx, \quad \mathrm{N} = 0.$$

III.

Dorénavant, nous prendrons l'axe OX constamment dirigé vers l'équinoxe de printemps, et l'axe OY dirigé du côté du solstice d'été. Ces deux axes ne cesseront pas d'être axes principaux d'inertie de la Terre.

Nous déterminerons le mouvement par la méthode de la composition des couples. Les couples L et M, en agissant pendant l'instant infiniment petit dt, communiquent à la Terre deux vitesses de rotation infiniment petites autour des axes OX et OY. Les quantités de mouvement qui naissent de ces vitesses de rotation ont pour moments autour des mêmes axes les produits Ldt et Mdt; car les moments des forces effectives sont égaux aux moments des forces appliquées.

Ainsi, les quantités de mouvement que possède la Terre à la fin de l'instant dt, considérées comme des forces et transportées à l'origine, donnent naissance à trois couples autour des trois axes OX, OY, OZ. Les deux premiers couples ont leurs moments égaux à $\mathrm{L}dt$, $\mathrm{M}dt$; le troisième est le couple des quantités de mouvement qui animaient la Terre au commencement de l'instant considéré. Si l'on représente par G le moment de ce dernier couple, et que l'on nomme ρ la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe, on a

$$\mathrm{G} = \rho\,\mathrm{C}.$$

Ces trois couples se composent en un seul. Si l'on convient de représenter chaque couple par une droite dirigée suivant l'axe et proportionnelle au moment, le couple résultant dont il s'agit sera représenté en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède rectangle construit sur les axes OX, OY, OZ avec des longueurs proportionnelles à $\mathrm{L}dt$ $\mathrm{M}dt$, G. Les deux premières arêtes du parallélipipède étant infiniment petites en comparaison de la troisième, la diagonale fera un angle infiniment petit avec la troisième arête, et, par suite, elle aura même longueur. D'ailleurs la direction de la diagonale sera celle de l'axe de révolution du globe terrestre à la fin de l'instant dt, puisque nous admettons que la rotation de la Terre s'effectue à chaque instant autour de son axe de figure. Les attractions du Soleil et de la Lune dévient donc l'axe de la Terre, à chaque instant, sans changer la vitesse de rotation autour de cet axe.

Nous étudierons isolément le déplacement qui serait produit par chacun des couples moteurs, si ce couple agissait seul. La somme algébrique de ces déplacements sera le déplacement résultant de l'action simultanée de tous ces couples aux quantités près de l'ordre du carré des moments des couples accélérateurs. Mais avant d'entreprendre cette étude, il est convenable de mettre les produits $\mathrm{L}dt$, $\mathrm{M}dt$ sous une forme nouvelle.

IV.

Soient

a la distance moyenne de la Terre au Soleil;

e l'excentricité de l'orbitre terrestre;

n le moyen mouvement de la Terre dans son orbite;

v la longitude géocentrique du Soleil;

ϖ la longitude du périgée;

h le rapport de la masse de la Terre à celle du Soleil.

La théorie du mouvement elliptique appliquée au mouvement apparent du Soleil autour du centre de la Terre, donne les formules

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)}, \quad r^2 dv = na^2\sqrt{1-e^2}\,dt, \quad m(1+h) = n^2 a^3.$$

On en tire

$$\frac{m}{r^3}dt = \frac{n[1+e\cos(v-\varpi)]}{(1+h)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}dv,$$

et, par suite,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{L}\,dt &= \frac{3n(\mathrm{C}-\mathrm{A})}{(1+h)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{yz}{r^2}[1+e\cos(v-\varpi)]\,dv, \\ \mathrm{M}\,dt &= -\frac{3n(\mathrm{C}-\mathrm{A})}{(1+h)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{zx}{r^2}[1+e\cos(v-\varpi)]\,dv. \end{aligned} \right.$$

Ces formules s'appliquent à la Lune comme au Soleil, en conservant aux lettres qui y figurent la même signification relativement à la Terre.

V.

Action du Soleil.

Il nous faut substituer aux coordonnées rectangulaires du Soleil la distance r, la longitude v et l'obliquité θ de l'équateur XOY sur l'écliptique XOE.

Les formules de transformation sont les suivantes :

$$x = r\cos v, \quad y = r\cos\theta\sin v, \quad z = r\sin\theta\sin v.$$

Elles donnent

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{yz}{r^2} &= \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\cos 2v), \\ \frac{zx}{r^2} &= \frac{1}{2}\sin\theta\sin 2v. \end{aligned} \right.$$

1°. *Couple* L. — Composant d'après la loi du parallélogramme le couple $L\,dt$ avec le couple G, on obtient un nouveau couple dont l'axe OG′ représente la position que prendrait l'axe terrestre à la fin de l'instant dt, si le couple L agissait seul. Ainsi, par l'effet du couple L, l'axe terrestre ou la perpendiculaire à l'équateur tourne pendant l'instant dt d'un angle infiniment petit dv autour du rayon OY de l'équateur. Ce rayon étant perpendiculaire à l'intersection de l'équateur et de l'écliptique, il s'ensuit que la rotation dv a pour unique effet de déplacer l'intersection de l'équateur sur l'écliptique sans changer l'angle des deux plans.

Soit $d\psi$ l'angle dont la ligne des équinoxes a rétrogradé en tournant dans le plan de l'écliptique.

Cet angle est le même que l'angle décrit par la projection de l'axe terrestre sur l'écliptique; car cette projection est constamment perpendiculaire à la ligne des équinoxes. Il s'ensuit qu'on a l'équation

$$d\psi = \frac{dv}{\sin\theta}.$$

D'ailleurs, en négligeant les puissances de dv supérieures à la première, le triangle GOG′ donne

$$dv = \frac{L\,dt}{G};$$

par conséquent,

$$d\psi = \frac{L\,dt}{G\sin\theta} \quad \text{ou} \quad d\psi = \frac{L\,dt}{\rho\,C\sin\theta}.$$

Si l'on substitue ici les valeurs (1) et (2) en négligeant le rapport h dont la valeur est au plus $\frac{1}{350000}$, et que l'on pose, pour abréger,

$$\frac{3}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{n}{\rho}\frac{C-A}{C} = H,$$

il vient

$$d\psi = H\cos\theta\,(1-\cos 2v)\,[1+e\cos(v-\varpi)]\,dv.$$

Soit prise l'origine du temps à l'équinoxe de printemps pour une année déterminée, et soit ψ l'angle dont la ligne des équinoxes a rétrogradé sur le plan de l'écliptique depuis l'origine du temps.

Cet angle ψ sera fourni par l'intégration de l'équation précédente;

mais, comme cet angle varie avec une extrême lenteur, on pourra sans erreur sensible négliger dans ce calcul les variations de l'angle θ, lesquelles ne s'élèvent pas à plus de $10''$ de part et d'autre de la valeur moyenne. On pourra négliger encore parmi les termes périodiques de l'intégrale ceux qui contiennent en facteur l'excentricité e.

Si donc on remplace l'angle variable θ par un angle constant θ', dont la valeur soit comprise entre les valeurs extrêmes de l'angle θ, on obtient

$$\psi = \mathrm{H} \cos\theta' \left(v - \frac{1}{2}\sin 2v\right),$$

ou bien, puisque la longitude v est égale à nt plus les termes périodiques qui contiennent l'excentricité en facteur,

$$(3) \qquad \psi = \mathrm{H}n \cos\theta'.t - \frac{1}{2}\mathrm{H} \cos\theta' \sin 2v.$$

Cet angle ψ mesure la *précession solaire* des équinoxes. Il se compose de deux parties : l'une croît proportionnellement au temps, c'est la *précession solaire moyenne ;* l'autre se reproduit périodiquement de six mois en six mois, et par suite elle est beaucoup moins sensible que la précession moyenne.

2°. *Couple* M. — Composant le couple $\mathrm{M}\,dt$ avec le couple G, on obtient un nouveau couple dont l'axe OG″ représente la position que prendrait l'axe terrestre à la fin de l'instant dt, si le couple M agissait seul. On voit que l'effet de ce couple pendant l'instant dt se réduit à faire varier l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique, d'un angle

$$\mathrm{GOG}'' = d\theta = \frac{\mathrm{M}\,dt}{\mathrm{G}} = -\mathrm{H} \sin\theta \sin 2v [1 + e\cos(v - \varpi)]\,dv.$$

En intégrant avec le même degré d'approximation que dans le calcul de l'angle ψ, on trouve

$$(4) \qquad \theta = \theta' + \frac{1}{2}\mathrm{H} \sin\theta' \cos 2v,$$

pourvu que l'on attribue une valeur convenable à la constante θ'.

La différence $\theta - \theta'$ mesure la *nutation solaire* de l'axe terrestre. Cette nutation a une période semi-annuelle ; elle est peu sensible.

VI.

Action de la Lune.

Occupons-nous maintenant de la Lune. Conservons aux lettres qui figurent dans les formules précédentes la même signification relative à la Terre; mais marquons de l'indice 1 celles qui se rapportent à la Lune, de manière que, par exemple, h étant le rapport de la masse de la Terre à celle du Soleil, h_1 soit le rapport de la masse de la Terre à celle de la Lune.

En outre, nommons i l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique, et λ la longitude du nœud ascendant de la Lune.

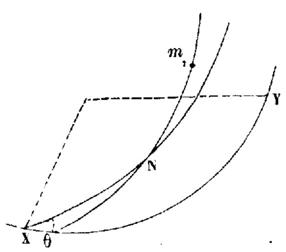
Nous avons, d'après les formules (1),

$$L_1\, dt = \frac{3n_1(C-A)}{(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{y_1 z_1}{r_1^2}[1+e_1\cos(v_1-\varpi_1)]\, dv_1,$$

$$M_1\, dt = -\frac{3n_1(C-A)}{(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{z_1 x_1}{r_1^2}[1+e_1\cos(v_1-\varpi_1)]\, dv_1,$$

x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées de la Lune par rapport aux axes OX, OY, OZ.

Il nous faut exprimer ces coordonnées en fonction de la longitude de la Lune. Pour cela, figurons une sphère décrite du centre de gravité de la Terre comme centre avec un rayon égal à l'unité, et marquons sur cette sphère la trace m_1 du rayon vecteur de la Lune, l'équateur XY, l'écliptique XN et l'orbite lunaire Nm_1. L'arc XN sera la longitude du nœud, et la somme des deux arcs XN, Nm_1 non situés dans un même plan sera la longitude de la Lune, ou v_1.



Nous cherchons les valeurs des coordonnées en vue de les substituer dans les expressions de $\frac{L_1\, dt}{G}$ et de $\frac{M_1\, dt}{G}$, lesquelles contiennent en facteur le produit $\frac{1}{1+h_1}\frac{n_1}{\rho}\frac{C-A}{C}$ qui est certainement très-petit. Il est donc inutile de calculer ces valeurs fort exactement. Aussi nous négligerons dans ce calcul le cube de l'angle i, angle dont la valeur est à peu près $5^\circ 9'$ ou $\frac{1}{11}$ du rayon.

Soient x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées de la Lune, prises par rapport à trois axes dont l'origine est au centre de la Terre, et qui sont dirigés, le premier suivant la direction OX de l'équinoxe de printemps, le second suivant une perpendiculaire située dans le plan de l'écliptique, et le troisième suivant une perpendiculaire à l'écliptique.

Nous avons d'abord

$$\begin{aligned}
x'_1 &= r_1 \left[\cos\lambda\cos(v_1-\lambda) - \sin\lambda\sin(v_1-\lambda)\cos i\right] \\
&= r_1 \left[\cos v_1 + \frac{i^2}{2}\sin\lambda\sin(v_1-\lambda)\right], \\
y'_1 &= r_1 \left[\sin\lambda\cos(v_1-\lambda) + \cos\lambda\sin(v_1-\lambda)\cos i\right] \\
&= r_1 \left[\sin v_1 - \frac{i^2}{2}\cos\lambda\sin(v_1-\lambda)\right], \\
z'_1 &= r_1\, i\sin(v_1-\lambda);
\end{aligned}$$

puis, par les formules de transformation des coordonnées en géométrie plane,

$$\begin{aligned}
x_1 &= x'_1, \\
y_1 &= y'_1\cos\theta - z'_1\sin\theta, \\
z_1 &= y'_1\sin\theta + z'_1\cos\theta.
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à substituer les expressions précédentes de x'_1, y'_1, z'_1, dans ces dernières formules, et nous aurons les valeurs cherchées.

Actuellement, nous devons calculer les produits $\frac{y_1 z_1}{r_1^2}$, $\frac{z_1 x_1}{r_1^2}$ qui figurent dans les expressions des moments des couples accélérateurs; et, dans ce calcul, nous devons encore négliger les puissances de i supérieures à la seconde. Nous trouvons

$$\begin{aligned}
\frac{y_1 z_1}{r_1^2} &= \sin\theta\cos\theta\sin^2 v_1 + i(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin v_1\sin(v_1-\lambda) \\
&\quad - i^2\sin\theta\cos\theta\cos\lambda\sin v_1\sin(v_1-\lambda) - i^2\sin\theta\cos\theta\sin^2(v_1-\lambda), \\
\frac{z_1 x_1}{r_1^2} &= \sin\theta\sin v_1\cos v_1 + i\cos\theta\cos v_1\sin(v_1-\lambda) \\
&\quad - \frac{i^2}{2}\sin\theta\sin(v_1-\lambda)\cos(v_1+\lambda).
\end{aligned}$$

1°. *Couple* L_1. — Si l'on nomme ψ l'angle dont rétrograde la ligne des équinoxes pendant le temps t, en vertu de l'action du couple L_1, on a l'équation

$$d\psi = \frac{L_1\,dt}{G \sin\theta}.$$

Posant

$$\frac{3}{2(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{n_1}{\rho}\,\frac{C-A}{C} = H_1,$$

cette équation peut s'écrire

$$d\psi = \frac{2H_1}{1+h_1}\,\frac{y_1 z_1}{r_1^2 \sin\theta}\left[1 + e_1\cos(v_1 - \varpi_1)\right]dv_1;$$

et il faut concevoir que le rapport $\frac{y_1 z_1}{r_1^2}$ soit ici remplacé par la valeur obtenue précédemment.

Dans l'intégration qui doit donner l'angle ψ, nous pourrons regarder comme constants, non-seulement l'angle θ, mais aussi l'angle i; car l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique varie extrêmement peu. Nous négligerons encore les termes périodiques qui sont multipliés par l'excentricité e_1; en sorte que nous pourrons remplacer v_1 par $n_1 t +$ const. Quant à la longitude du nœud λ, nous savons qu'elle diminue d'une circonférence en 18 ans $\frac{2}{3}$ environ, d'un mouvement à peu près uniforme; par suite, nommant $-\alpha$ la vitesse angulaire moyenne du nœud, nous pourrons remplacer λ par $-\alpha t +$ const.

Ceci posé, il suffit de remplacer, dans l'expression de $d\psi$, les produits de sinus variables par les cosinus de la somme et de la différence des arcs, et l'intégration se fera immédiatement. Mais, parmi les termes périodiques de la différentielle, outre que nous négligerons ceux qui sont multipliés par e_1, nous négligerons encore ceux qui dépendent de v_1 et qui sont multipliés par i; car l'intégrale de ces termes aura en diviseur le nombre n_1, tandis que l'intégrale des termes dépendant seulement de λ aura en diviseur le nombre α, lequel est beaucoup plus petit que n_1.

La différentielle $d\psi$ se réduit donc à la valeur suivante :

$$(5)\quad d\psi = \frac{H_1}{1+h_1}\left[\begin{array}{c}\cos\theta' - \cos\theta'\cos 2v_1 + i\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\cos\lambda \\ -\frac{i^2}{2}\cos\theta'(3+\cos 2\lambda)\end{array}\right]dv_1.$$

L'intégrale est

$$(6)\quad \psi = \frac{H_1}{1+h_1}\left[\begin{array}{c}n_1\left(1-\frac{3i^2}{2}\right)\cos\theta'.t - \frac{1}{2}\cos\theta'\sin 2v_1 - i\frac{n_1}{\alpha}\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\sin\lambda \\ +\frac{i^2}{4}\frac{n_1}{\alpha}\cos\theta'\sin 2\lambda\end{array}\right].$$

Cet angle ψ mesure la *précession lunaire* des équinoxes; le premier terme croît proportionnellement au temps, il mesure la *précession lunaire moyenne.* Parmi les autres termes, le plus sensible est le terme en $\sin\lambda$, c'est-à-dire celui dont la période est égale à la durée de la révolution du nœud de la Lune.

2°. *Couple* M_1. — Si l'on nomme $d\theta$ la variation de l'obliquité de l'équateur qui est due à l'action du couple M_1 pendant l'instant dt, on a

$$d\theta = \frac{M_1\,dt}{G}.$$

En opérant comme pour le calcul de ψ, on réduit la différentielle $d\theta$ à la valeur suivante :

$$(7)\quad d\theta = \frac{H_1}{1+h_1}\left(-\sin\theta'\sin 2v_1 + i\cos\theta'\sin\lambda - \frac{i^2}{2}\sin\theta'\sin 2\lambda\right)dv_1;$$

et, si l'on détermine convenablement la constante θ', l'intégrale est

$$(8)\quad \theta = \theta' + \frac{H_1}{1+h_1}\left(\frac{1}{2}\sin\theta'\cos 2v_1 + i\frac{n_1}{\alpha}\cos\theta'\cos\lambda - \frac{i^2}{4}\frac{n_1}{\alpha}\sin\theta'\cos 2\lambda\right).$$

La différence $\theta - \theta'$ mesure la *nutation lunaire* de l'axe terrestre. le terme en $\cos\lambda$ est le plus sensible; l'ensemble de ce terme et du terme en $\sin\lambda$ qui figure dans la formule (6), exprime que l'axe terrestre décrit une petite ellipse sur la sphère céleste. Le centre de cette ellipse marque constamment la position moyenne de l'axe terrestre, qui est définie par l'angle θ' et par la précession moyenne totale. Le grand axe de l'ellipse est constamment dirigé vers le pôle de l'écliptique; la courbe est décrite en sens contraire de la rotation de la Terre autour de son axe, elle est parcourue dans le même temps que le nœud de la Lune fait le tour de l'écliptique, et d'un mouvement tel, que l'anomalie excentrique λ croît proportionnellement au temps

VII.

Correction due au déplacement de l'écliptique.

En égalant l'angle ψ à la somme des deux parties (3) et (6), et égalant de même l'angle $\theta - \theta'$ à la somme des deux parties (4) et (8), on obtient des formules qui représentent avec exactitude le mouvement de l'axe terrestre pendant un petit nombre d'années. Mais si l'on veut des formules qui représentent pendant deux ou trois siècles tout ce que les observations les plus exactes peuvent accuser relativement au mouvement de rotation de la Terre, il est nécessaire d'avoir égard au déplacement de l'écliptique produit par l'attraction des planètes.

Comme l'écliptique se déplace fort peu pendant le petit nombre de siècles que l'on prétend embrasser, il n'y a pas lieu de recommencer les calculs qui ont été faits en considérant ce plan comme fixe; il suffira de corriger légèrement les formules par des termes additionnels.

Dans ce calcul, nous continuerons de rapporter le mouvement de l'axe terrestre au plan fixe qui coïncide avec l'*écliptique vraie* à l'origine du temps t. Nous appellerons ce plan fixe l'*écliptique fixe*. L'angle ψ sera toujours l'angle dont l'intersection de l'équateur et de l'écliptique fixe a rétrogradé sur ce dernier plan, depuis l'époque prise pour origine du temps. θ désignera toujours l'angle compris entre l'équateur et l'éclitique fixe. En outre, nous nommerons γ l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, et β l'angle qui sépare les traces de l'équateur et de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe.

1°. *Action du Soleil.* — Le mouvement du Soleil autour de la Terre sur l'écliptique mobile est tout semblable au mouvement de la Lune autour de la Terre dans l'hypothèse d'une écliptique immobile. Par conséquent, des calculs tout pareils à ceux du paragraphe précédent conduisent à des formules semblables aux formules (5) et (7), sauf que i est remplacé par γ, et λ par β, outre que l'indice 1 est supprimé. Dans ces formules, les termes indépendants de γ sont ceux qu'on a déjà obtenus en supposant l'écliptique immobile, les termes en γ^2 peuvent être négligés sans erreur appréciable; donc les termes qu'il faut ajouter aux valeurs (3) et (4) des angles ψ et θ, quand on veut avoir égard au déplacement de l'écliptique, se réduisent aux intégrales des seuls termes qui contiennent la première puissance de γ dans les formules correspondantes aux formules (5) et (7). Ces termes additionnels sont

$$\text{pour l'angle } \psi,\quad \mathrm{H}n\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\int \gamma\cos\beta\, dt,$$

$$\text{pour l'angle } \theta,\quad \mathrm{H}n\cos\theta'\int \gamma\sin\beta\, dt.$$

Or la théorie des inégalités séculaires du mouvement des planètes autour du Soleil donne les relations

$$\gamma\cos(\beta-\psi) = \sum k\cos(gt+\delta),$$

$$\gamma\sin(\beta-\psi) = \sum k\sin(gt+\delta),$$

dans lesquelles k, g, δ représentent des constantes qui dépendent des différentes planètes perturbatrices, et $\sum$ indique une somme relative à toutes ces planètes.

On tire de ces relations

$$\gamma\cos\beta = \sum k\cos(gt+\psi+\delta),$$

$$\gamma\sin\beta = \sum k\sin(gt+\psi+\delta).$$

Les coefficients k étant tous très-petits, on peut remplacer l'angle ψ par sa valeur moyenne dans les expressions de $\gamma\cos\beta$ et de $\gamma\sin\beta$. D'après l'observation, ou d'après les formules obtenues en supposant l'écliptique immobile, cette valeur moyenne augmente à peu près de $50'',3$ en une année.

Si donc on prend l'année pour unité de temps, les angles ψ et θ qui résultent de l'action du Soleil, quand on a égard au déplacement de l'écliptique, sont donnés par les formules

$$(9)\quad \begin{cases} \psi = \mathrm{H}\, n \cos\theta' . t - \frac{1}{2}\mathrm{H}\cos\theta' \sin 2v \\ \quad + \mathrm{H}n \frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'} \sum \frac{k}{g + 50'',3} \sin[(g + 50'',3)t + \delta], \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \theta = \theta' + \frac{1}{2}\mathrm{H}\sin\theta' \cos 2v \\ \quad - \mathrm{H}\, n \cos\theta' \sum \frac{k}{g + 50'',3} \cos[(g + 50'',3)t + \delta]. \end{cases}$$

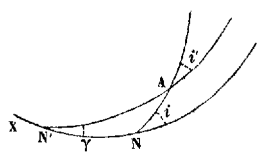
2°. *Action de la Lune.* — Soient i' l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique vraie, et λ' la longitude du nœud de la Lune, comptée sur l'écliptique vraie.

Les seuls termes des formules (5) et (7) qui soient altérés par le déplacement de l'écliptique, sont ceux qui contiennent les angles i et λ. Quand on néglige le carré de l'angle γ et le produit $i\gamma$, les termes en i^2 ne subissent pas d'autre altération que le changement de i et de λ en i' et en λ'; les termes

$$\frac{\mathrm{H}_1}{1 + h_1} i \frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'} \cos\lambda\, dv_1, \quad \frac{\mathrm{H}_1}{1 + h_1} i \cos\theta' \sin\lambda\, dv_1$$

éprouvent une altération plus complexe. Pour la calculer, il faut exprimer les produits $i\cos\lambda$ et $i\sin\lambda$ en fonction de i', λ', γ et β.

Soient XN′N l'écliptique fixe, NA l'orbite lunaire, N′A l'écliptique vraie, X l'équinoxe, pris sur l'écliptique fixe.



On a

$$\overline{\mathrm{XN'}} = \beta, \quad \overline{\mathrm{XN}} = \lambda, \quad \overline{\mathrm{XN'}} + \overline{\mathrm{N'A}} = \lambda'.$$

Le triangle NAN′ donne les relations

$$\cot\overline{\mathrm{AN}} \sin\overline{\mathrm{AN'}} = \cos\overline{\mathrm{AN'}} \cos i' + \sin i' \cot\gamma,$$
$$\cot\overline{\mathrm{AN'}} \sin\overline{\mathrm{AN}} = \cos\overline{\mathrm{AN}} \cos i' - \sin i' \cot i.$$

Dans le calcul dont on s'occupe, on peut négliger les secondes puissances des petits angles i et i'. Alors $\overline{\mathrm{AN}}$ devient égal à $\lambda' - \lambda$, et, par suite, les deux relations précédentes peuvent s'écrire

$$i' \sin(\lambda' - \lambda) = \gamma \sin(\lambda - \beta),$$
$$i' \sin(\lambda' - \beta) = i \sin(\lambda - \beta).$$

Sous cette forme, on en déduit facilement les valeurs cherchées,

$$i \cos\lambda = i' \cos\lambda' + \gamma \cos\beta,$$
$$i \sin\lambda = i' \sin\lambda' + \gamma \sin\beta.$$

D'après cela, les termes en question deviennent

$$\frac{\mathrm{H}_1}{1+h_1}\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}(i'\cos\lambda' + \gamma\cos\beta)\,dv_1, \quad \frac{\mathrm{H}_1}{1+h_1}\cos\theta'(i'\sin\lambda' + \gamma\sin\beta)\,dv_1.$$

Les angles ψ et θ qui résultent de l'influence de la Lune, quand on a égard au déplacement de l'écliptique, sont donc

$$(11)\quad \psi = \frac{\mathrm{H}_1}{1+h_1}\left\{\begin{aligned} &n_1\left(1+\frac{3i'^2}{2}\right)\cos\theta'.t - \frac{1}{2}\cos\theta'\sin 2v_1 - i'\frac{n_1}{\alpha}\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\sin\lambda' + \frac{i'^2}{4}\frac{n_1}{\alpha}\cos\theta'\sin 2\lambda' \\ &+ n_1\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\sum\frac{k}{g+50'',3}\sin[(g+50'',3)t+\delta] \end{aligned}\right\},$$

$$(12)\quad \theta = \theta' + \frac{\mathrm{H}_1}{1+h_1}\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sin\theta'\cos 2v_1 + i'\frac{n_1}{\alpha}\cos\theta'\cos\lambda' - \frac{i'^2}{4}\frac{n_1}{\alpha}\sin\theta'\cos 2\lambda' \\ &- n_1\cos\theta'\sum\frac{k}{g+50'',3}\cos[(g+50'',3)t+\delta) \end{aligned}\right\}.$$

VIII.

Si l'on réunit les parties obtenues séparément (9) et (11), (10) et (12), on a la représentation complète du mouvement de l'axe terrestre par les formules

$$\begin{aligned} \psi = {} & (c+c')t - \frac{b}{\sin\theta'}\sin\Omega - \mathrm{F}\cos\theta'\sin 2\odot - \mathrm{F}'\cos\theta'\sin 2☾ \\ & + \mathrm{G}\cos\theta'\sin 2\Omega + \mathrm{K}\frac{\cos 2\theta'}{\sin\theta'}\sum\frac{k}{g+50'',3}\sin[(g+50'',3)t+\delta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta = {} & \theta' + a\cos\Omega + \mathrm{F}\sin\theta'\cos 2\odot + \mathrm{F}'\sin\theta'\cos 2☾ - \mathrm{G}\sin\theta'\cos 2\Omega \\ & - \mathrm{K}\cos\theta'\sum\frac{k}{g+50'',3}\cos[(g+50'',3)t+\delta], \end{aligned}$$

dans lesquelles on a remplacé λ', ν et ν_1 par les signes communément employés ☊, ☉ et ☾, et l'on a posé

$$c = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n^2\cos\theta'}{\rho(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad c' = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n_1^2\left(1-\frac{3i'^2}{2}\right)\cos\theta'}{\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$a = \frac{3}{2}\frac{C-A}{A}\frac{n_1^2 i'\cos\theta'}{\alpha\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad b = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\frac{n_1^2 i'\cos 2\theta'}{\alpha\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F = \frac{3}{4}\frac{C-A}{C}\frac{n}{\rho(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad F' = \frac{3}{4}\frac{C-A}{C}\frac{n_1}{\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$G = \frac{3}{8}\frac{C-A}{C}\frac{n_1 i'^2}{\alpha\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad K = \frac{3}{2}\frac{C-A}{C}\left[\frac{n^2}{\rho(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{n_1^2}{\rho(1+h_1)(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Les sommes

$$\sum \frac{k}{g+50'',3}\sin[(g-50'',3)t+\delta],$$

$$\sum \frac{k}{g+50'',3}\cos[(g+50'',3)t+\delta],$$

peuvent être remplacées par leurs développements suivant les puissances ascendantes des temps bornés aux premières et secondes puissances; car les constantes k, g, sont de très-petites quantités. On reconnaît aisément que, dans le développement de la seconde somme, le coefficient de la première puissance du temps est nécessairement nul. En effet, l'expression de ce coefficient est $-\sum k\sin\delta$; or, si l'on pose $t=0$ dans l'équation

$$\gamma\sin(\beta-\psi) = \sum k\sin(gt+\delta),$$

qui, comme nous l'avons vu, sert à définir les constantes k et δ, le premier membre de cette équation devient nul, puisque l'écliptique vraie coïncide alors avec l'écliptique fixe, et le second membre se réduit à $\sum k\sin\delta$.

Si l'on veut réduire les formules en nombres, il faudra s'aider de l'observation du phénomène pour calculer le rapport des moments d'inertie de la Terre $\frac{C-A}{C}$, qui n'est point connu d'ailleurs. On pourra, par exemple, égaler l'expression analytique du coefficient du temps dans la valeur trouvée de ψ, à la précession moyenne qui résulte de l'observation ; puis on tirera de cette équation une valeur du rapport $\frac{C-A}{C}$ que l'on substituera dans les autres coefficients des formules.

D'après Bessel, si l'on prend l'origine du temps au commencement de l'année 1750, on a

$$\begin{aligned}
\psi &= 50'',37572\,t - 0'',0001217945\,t^2 - 16'',78332 \sin \Omega \\
&\quad - 1'',33589 \sin 2\odot - 0'',20128 \sin 2☾ + 0'',20209 \sin 2\Omega, \\
\theta &= 23^\circ\,28'\,18'',0 + 0'',0000984233\,t^2 + 8'',97707 \cos \Omega \\
&\quad + 0'',57990 \cos 2\odot + 0'',08738 \cos 2☾ - 0'',08773 \cos 2\Omega.
\end{aligned}$$

Si l'on se propose de construire des formules qui représentent le mouvement de l'axe terrestre d'année en année, on conservera au temps une même valeur entière, pendant toute la durée d'une année, dans les développements des deux termes qui proviennent du déplacement séculaire de l'écliptique, et, pour plus de rigueur, dans les autres coefficients on remplacera l'angle θ par sa valeur initiale augmentée de la valeur du terme séculaire

$$-\,K\cos\theta' \sum \frac{k}{g + 50'',3} \cos\left[(g + 50'',3)\,t + \delta\right]$$

pour l'année considérée. De cette manière, les formules seront réduites, pour chaque année, à la forme

$$\begin{aligned}
\psi &= D\,t + D' \sin\Omega + D'' \sin 2\odot + D''' \sin 2☾ + D^{\text{IV}} \sin 2\Omega, \\
\theta &= E + E' \cos\Omega + E'' \cos 2\odot + E''' \cos 2☾ + E^{\text{IV}} \cos 2\Omega,
\end{aligned}$$

et les termes séculaires donneront la correction annuelle des coefficients D, D',..., E, E',.... C'est ainsi que sont disposées les formules données dans les recueils astronomiques. (Voir le *Nautical Almanach*, p. v.)

Enfin il peut être utile de rapporter le mouvement de la Terre à l'écliptique vraie.

Pour cela, nommons Ψ l'angle dont la ligne des équinoxes a rétrogradé sur l'écliptique vraie pendant le temps t, Θ l'angle compris entre l'équateur et l'écliptique vraie, et considérons l'équateur, l'écliptique fixe et l'écliptique vraie comme trois grands cercles tracés sur une sphère de rayon égal à l'unité.

Quand on néglige le carré de l'inclinaison mutuelle des deux écliptiques, la différence $\psi - \Psi$ est égale à la projection sur l'écliptique vraie du petit arc intercepté sur l'équateur par les deux écliptiques; sa valeur est donc

$$\cot\Theta \,.\, \gamma \sin\beta, \quad \text{ou bien} \quad \cot\theta' \,.\, \gamma \sin\beta,$$

en négligeant le produit $\gamma(\Theta - \theta')$.

Le triangle formé par les trois grands cercles considérés donne

$$\cos\Theta = \cos\theta \cos\gamma - \sin\theta \sin\gamma \cos\beta,$$

ou bien, en négligeant le carré de γ et le carré de la différence $\Theta - \theta$,

$$\theta - \Theta = -\gamma \cos\beta.$$

On a donc finalement

$$\Psi = \psi - \cot\theta' \sum k \sin[(g + 50'',3)\,t + \delta],$$

$$\Theta = \theta + \sum k \cos[(g + 50'',3)\,t + \delta].$$

Quand on prend l'origine du temps au commencement de l'année 1750, les formules numériques réduites aux termes du premier et du second degré par rapport au temps, sont, d'après Bessel,

$$\Psi = \psi - 0'',17926\,t + 0'',0002660294\,t^2,$$
$$\Theta = \theta - 0'',48368\,t - 0'',0000027229 5\,t^2.$$

Une discussion complète des formules n'entre point dans l'objet de ce Mémoire; le peu que nous en avons dit doit suffire. Notre but unique était d'arriver à ces résultats connus, d'une manière plus simple qu'on ne l'avait fait jusqu'ici. Il nous paraît atteint, puisque toute la méthode se réduit à des compositions de couples suivant la loi du parallélogramme, et que tout le calcul consiste dans des intégrations immédiates [*].

En réfléchissant sur la marche que nous avons suivie, on reconnaît facilement que le succès est dû, d'une part à ce que tout rayon de l'équateur, et par conséquent la ligne des équinoxes, est un axe principal d'inertie de la Terre relatif au centre; de l'autre, à ce que les termes d'un degré supérieur par rapport aux moments des forces accélératrices sont tout à fait négligeables.

---

[*] Lorsque j'écrivais ce Mémoire, je n'avais point connaissance du travail de M. Peters (*Numerus constans nutationis ex ascensionibus rectis stellæ Polaris in specula Dorpatensi ab anno* 1822 *ad* 1838 *observatis deductus*), dans lequel l'habile astronome a complété les formules de Bessel, en tenant compte de petites quantités qui, en effet, ne sont point tout à fait négligeables dans l'état actuel de l'Astronomie. Je me propose d'indiquer prochainement dans une Note complémentaire les légères modifications qu'il faut apporter aux calculs exposés dans le présent Mémoire pour arriver aux formules de M. Peters, et même à des formules plus exactes encore, si jamais le besoin s'en fait sentir. J.