

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

LÉOPOLD KRONECKER

**Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 1 (1856), p. 385-391.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1856\\_2\\_1\\_\\_385\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__385_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR

# QUELQUES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

ET SUR

LES NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

En exprimant les fonctions symétriques d'un nombre quelconque de quantités en fonction des sommes de puissances semblables des mêmes quantités, on obtient en général des formules assez compliquées. Par cette raison, je ne crois pas inutile d'indiquer quelques fonctions symétriques pour lesquelles ces formules deviennent très-simples.

Si l'on désigne  $n$  quantités quelconques par  $a, b, c, \dots$ , la somme des expressions de la forme

$$(\pm a \pm b \pm c \pm \dots)^k,$$

qu'on obtient en faisant toutes les combinaisons des signes  $\pm$ , sera évidemment une fonction symétrique des quantités  $a, b, c, \dots$ . De même, si l'on prend la somme de toutes les expressions de la forme

$$\pm (\pm a \pm b \pm c \pm \dots)^k,$$

le signe placé en dehors des parenthèses étant le produit des signes placés au dedans, cette somme sera une fonction symétrique des quantités  $a, b, c, \dots$ . Ces deux sommes étant désignées respectivement par  $P_k$  et  $R_k$ , je vais établir les formules qui font connaître les expressions  $P_k$  et  $R_k$  en fonction des sommes de puissances semblables des quantités  $a, b, c, \dots$ , mêmes.

## § I.

Soit

$$(I) \quad F(x) = (e^{ax} + e^{-ax})(e^{bx} + e^{-bx})(e^{cx} + e^{-cx}) \dots$$

En développant ce produit, on aura

$$F(x) = \sum e^{x(\pm a \pm b \pm c \pm \dots)},$$

où le signe de sommation s'étend à toutes les combinaisons des signes  $\pm$  dans l'exposant. Le second membre développé en série donne

$$F(x) = 2^n + P_1 x + P_2 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + P_3 \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

où les lettres  $n, P_1, P_2, P_3, \dots$ , ont le sens indiqué plus haut. Or il est évident que l'expression  $P_k$  s'annule pour les valeurs impaires du nombre  $k$ : ainsi l'on a

$$(II) \quad F(x) = 2^n + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{P_{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k} x^{2k}.$$

D'un autre côté, en différentiant le logarithme du produit (I), on obtient

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = a \cdot \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} + b \cdot \frac{e^{bx} - e^{-bx}}{e^{bx} + e^{-bx}} + c \cdot \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{e^{cx} + e^{-cx}} + \dots,$$

$F'(x)$  étant la dérivée de  $F(x)$ . Développons les divers termes du second membre en séries, et désignons par  $S_k$  la somme des puissances semblables  $k^{ièmes}$  des quantités  $a, b, c, \dots$ . Il vient alors

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{2^2(2^2-1)}{1 \cdot 2} B_1 S_2 x - \frac{2^4(2^4-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_2 S_4 x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_3 S_6 x^5 - \dots,$$

ou, en employant le signe de sommation,

$$(III) \quad F'(x) = F(x) \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k} B_k S_{2k} x^{2k-1},$$

où les lettres  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , désignent les nombres de Bernoulli conformément à l'usage. En portant dans cette formule les expressions de

F (x) et F' (x) tirées de la formule (II), on aura

$$(IV) \left\{ \begin{aligned} & \sum \frac{2^k \cdot P_{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2^k} \cdot x^{2k-1} \\ & = \left\{ 2^n + \sum \frac{P_{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2^k} x^{2k} \right\} \cdot \sum (-1)^{k-1} \cdot \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2^k} \cdot B_k \cdot S_{2k} \cdot x^{2k-1}, \end{aligned} \right.$$

où toutes les sommations s'étendent aux valeurs de  $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$ .

Si l'on fait

$$x = y \cdot \sqrt{-1}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2^k} \cdot B_k \cdot S_{2k} &= s_{2k}, \\ \frac{(-1)^k}{2^n} \cdot \frac{P_{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2^k} &= p_{2k}, \end{aligned}$$

la formule (IV) se change en celle-ci :

$$\sum s_{2k} \cdot y^{2k-1} + \left( \sum p_{2k} \cdot y^{2k} \right) \cdot \left( \sum s_{2k} \cdot y^{2k-1} \right) + \sum 2^k \cdot p_{2k} \cdot y^{2k-1} = 0.$$

En égalant à zéro le coefficient de  $y^{2m-1}$ ,  $m$  étant un nombre quelconque, on obtient la relation suivante :

$$s_{2m} + s_{2m-2} \cdot p_2 + s_{2m-4} \cdot p_4 + \dots + s_2 \cdot p_{2m-2} + 2^m \cdot p_{2m} = 0,$$

qui a précisément la forme des formules de Newton. On en conclut le théorème que voici :

*En désignant par  $P_k$  la somme des expressions de la forme*

$$(\pm a \pm b \pm c \pm \dots)^k,$$

*et par  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , les  $2m$  racines de l'équation*

$$\begin{aligned} & 2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots 2^m \cdot z^{2m} - P_2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2^m \cdot z^{2m-2} \\ & + P_4 \cdot 5 \cdot 6 \dots 2^m \cdot z^{2m-4} - \dots \pm P_{2m} = 0, \end{aligned}$$

*on a l'égalité*

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2^\mu \cdot (\alpha^{2^\mu} + \beta^{2^\mu} + \gamma^{2^\mu} + \dots) \\ & = 2^{2^\mu} (2^{2^\mu} - 1) \cdot B_\mu \cdot (a^{2^\mu} + b^{2^\mu} + c^{2^\mu} + \dots), \end{aligned}$$

*la lettre  $\mu$  désignant un nombre entier positif quelconque  $\leq m$ .*

Par suite, on peut faire usage des formules connues, qui déterminent les coefficients d'une équation en fonctions des sommes de puissances semblables des racines, pour en déduire immédiatement les formules cherchées.

## § II.

Soit

$$(V) \quad \Phi(x) = (e^{ax} - e^{-ax})(e^{bx} - e^{-bx})(e^{cx} - e^{-cx}) \dots$$

En développant ce produit, on aura

$$\Phi(x) = \sum [\pm e^{x(\pm a \pm b \pm c \pm \dots)}],$$

le signe placé devant la lettre  $e$  étant le produit des signes contenus dans l'exposant. En développant en série et en conservant la définition que nous avons donnée de la lettre  $R_k$  plus haut, il vient

$$(VI) \quad \Phi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{R_k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \cdot x^k.$$

Or il est visible que les séries qu'on peut substituer aux divers facteurs du produit (V) commencent respectivement par

$$2ax, 2bx, 2cx, \dots,$$

et que ces séries ne contiennent que les puissances impaires de  $x$ . Par suite, le développement de  $\Phi(x)$  doit commencer par le terme

$$2^n \cdot a \cdot b \cdot c \dots x^n,$$

et il ne contiendra que les puissances paires ou impaires de  $x$ , suivant que le nombre  $n$  est pair ou impair. L'équation (VI) pourra donc s'écrire de la manière suivante :

$$(VII) \quad \Phi(x) = x^n \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_{n+2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+2k)} \cdot x^{2k},$$

et, d'après ce que nous venons d'observer, on aura d'ailleurs l'égalité (VIII)

$$R_n = 2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot a \cdot b \cdot c \dots$$

D'un autre côté, en différenciant le logarithme du produit (V), on obtient

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = a \cdot \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{ax} - e^{-ax}} + b \cdot \frac{e^{bx} + e^{-bx}}{e^{bx} - e^{-bx}} + c \cdot \frac{e^{cx} + e^{-cx}}{e^{cx} - e^{-cx}} + \dots,$$

$\Phi'(x)$  étant la dérivée de  $\Phi(x)$ . En développant en séries les divers termes du second membre et en conservant la notation employée plus haut,

$$S_k = a^k + b^k + c^k + \dots,$$

on aura

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{n}{x} + \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{2^{2k} \cdot B_k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k} \cdot S_{2k} \cdot x^{2k-1}.$$

En portant dans cette formule les expressions de  $\Phi(x)$  et  $\Phi'(x)$  tirées de l'équation (VII), on obtient

$$(IX) \left\{ \begin{aligned} x^{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(n+2k) R_{n+2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+2k)} \cdot x^{2k} &= n \cdot x^{n-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_{n+2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+2k)} \cdot x^{2k} \\ + x^n \cdot \left( \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{R_{n+2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+2k)} \cdot x^{2k} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{2^{2k} \cdot B_k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k} \cdot S_{2k} \cdot x^{2k-1} \right). \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait

$$\begin{aligned} \varpi_{2k} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+2k)} \cdot \frac{R_{n+2k}}{R_n}, \\ \sigma_{2k} &= (-1)^k \cdot \frac{2^{2k} \cdot B_k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2k} \cdot S_{2k}, \end{aligned}$$

l'équation (IX) se change en celle-ci :

$$(X) \left\{ \begin{aligned} x^{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_n}{1 \cdot 2 \dots n} (n+2k) \varpi_{2k} \cdot x^{2k} \\ = n \cdot x^{n-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{R_n}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \varpi_{2k} \cdot x^{2k} - x^n \cdot \left( \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{R_n}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \varpi_{2k} \cdot x^{2k} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{k=\infty} \sigma_{2k+2} \cdot x^{2k+1} \right), \end{aligned} \right.$$

où toutes les sommations commencent par la valeur  $k=0$ .

Supposons maintenant qu'aucune des quantités  $a, b, c, \dots$ , ne soit égale à zéro. Alors l'équation (VIII) fait voir que la valeur de  $R_n$  est différente de zéro. On peut donc dégager l'équation (X) du facteur commun  $\frac{x^{n-1} \cdot R_n}{1 \cdot 2 \dots n}$ . Cela fait, cette équation peut s'écrire comme il suit :

$$\sum 2k \cdot \varpi_{2k} \cdot x^{2k} + \left( \sum \varpi_{2k} \cdot x^{2k} \right) \cdot \left( \sum \sigma_{2k+2} \cdot x^{2k+2} \right) = 0.$$

En égalant à zéro le coefficient de  $x^{2m}$ ,  $m$  étant un nombre quelconque, on obtient la relation

$$\sigma_{2m} + \sigma_{2m-2} \cdot \varpi_2 + \sigma_{2m-4} \cdot \varpi_4 + \dots + \sigma_2 \cdot \varpi_{2m-2} + 2m \cdot \varpi_{2m} = 0.$$

En comparant cette relation avec les formules de Newton, on en déduit le théorème suivant :

*En désignant par  $R_k$  la somme des expressions de la forme*

$$\pm (\pm a \pm b \pm c \dots)^k,$$

*et par  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , les  $2m$  racines de l'équation*

$$(n+1)(n+2)\dots(n+2m) \cdot R_n \cdot z^{2m} + (n+3)(n+4)\dots(n+2m) R_{n+2} \cdot z^{2m-2} \\ + (n+5)(n+6)\dots(n+2m) \cdot R_{n+4} \cdot z^{2m-4} + \dots + R_{n+2m} = 0,$$

*on a l'égalité*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2\mu \cdot (\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu} + \dots) \\ = (-1)^\mu \cdot 2^{2\mu} \cdot B_\mu \cdot (a^{2\mu} + b^{2\mu} + c^{2\mu} + \dots)$$

*pour toutes les valeurs de  $\mu = 1, 2, \dots, m$ .*

On peut donc se servir des formules connues, par lesquelles les coefficients d'une équation s'expriment en fonctions des sommes de puissances semblables des racines, pour en déduire immédiatement les expressions des quantités

$$\frac{R_{n+1}}{R_n}, \quad \frac{R_{n+2}}{R_n}, \dots,$$

en fonction des sommes de puissances semblables des quantités  $a, b,$

$c, \dots$ . Donc les expressions  $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$  étant nulles, et la valeur de  $R_n$  se trouvant déterminée par l'équation (VIII), le problème proposé est résolu.

### § III.

En attribuant des valeurs spéciales aux quantités  $a, b, c, \dots$ , les deux théorèmes que je viens d'énoncer fournissent des formules pour les nombres de Bernoulli. Par exemple, en supposant que  $a, b, c, \dots$ , soient les diverses racines de l'équation  $x^{2m} = 1$ , on sait que les sommes  $a^{2\mu} + b^{2\mu} + c^{2\mu} + \dots$  s'annulent,  $\mu$  étant  $< m$ , et que la somme  $a^{2m} + b^{2m} + c^{2m} + \dots$  est égale à  $2m$ . Par suite, les quantités  $P_2, P_4, \dots, P_{2m-2}$ , ainsi que les quantités  $R_{2m+2}, R_{2m+4}, \dots, R_{4m-2}$  se réduiront à zéro. Puis en observant que le produit  $a.b.c\dots$ , c'est-à-dire le produit de toutes les racines de l'équation  $x^{2m} = 1$ , est égal à  $-1$ , la formule (VIII) donne

$$R_{2m} = -2^{2m}.1.2.3\dots 2m.$$

Donc, en vertu des deux théorèmes énoncés ci-dessus, les quantités  $P_{2m}$  et  $R_{n+2m}$  se trouveront déterminées comme il suit :

$$\begin{aligned} (-1)^m.P_{2m} &= -2^{4m}.(2^{2m}-1).B_m, \\ (1.2.3\dots 2m)^2.R_{4m} &= (-1)^{m+1}.2^{2m}.1.2.3\dots 4m.R_{2m}.B_m. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit pour les nombres de Bernoulli les formules curieuses que voici :

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{(-1)^{m+1}}{2^{4m}(2^{2m}-1)} \cdot \sum (\pm a \pm b \pm c \pm \dots)^{2m}, \\ B_m &= \frac{(-1)^m}{2^{4m}.(2m+1)(2m+2)\dots 4m} \cdot \sum [\pm (\pm a \pm b \pm c \dots)^{4m}], \end{aligned}$$

les lettres  $a, b, c, \dots$ , désignant toutes les diverses racines de l'équation  $x^{2m} = 1$ .

