JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. PROUHET

Mémoire sur quelques formules générales d'analyse

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 321-344.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__321_0>

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES D'ANALYSE;

PAR M. E. PROUHET.

(Présenté à l'Académie des Sciences le 8 mars 1852.)

PREMIÈRE PARTIE.

Définition et formation de quelques systèmes combinatoires. — Propriétés qui tiennent à l'ordre et au classement des combinaisons.

1. Si l'on considère mn quantités disposées de la manière suivante :

$$
(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{array}{llllll}
a_0^1 & a_0^2 & a_0^3 & a_0^4 \ldots & a_0^m, \\
a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \ldots & a_1^m, \\
a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \ldots & a_2^m, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & a_{n-1}^3 & a_{n-1}^4 \ldots & a_{n-1}^m,
\end{array} \right.
$$

et qu'on les combine m à m en ayant soin de ne prendre à chaque fois qu'un seul terme dans la même ligne verticale, on aura ce que j'appellerai un *système combinatoire*. Le nombre des éléments de chaque combinaison sera m, et n sera dit la *base* du système.

2. Un système prendra le nom de *système de polynômes* lorsque les éléments de chaque combinaison seront ajoutés les uns aux autres. Ce sera un *système de produits*, si les éléments sont combinés par voie de multiplication successive.

Dans cette première Partie, je traiterai des combinaisons, abstraction faite des opérations qui peuvent lier leurs éléments entre eux.

3. Dans le tableau (A), la lettre a est accompagnée de deux nombres. Je réserverai le nom d'*indice* au nombre inférieur, et celui de *numéro* au nombre supérieur.

Je conviendrai de ranger les éléments de chaque combinaison d'après la grandeur des numéros, en allant toujours du plus petit numéro au plus grand. De cette manière, une combinaison sera déterminée si l'on connaît dans quel ordre les indices s'y succèdent. Aussi représenterons-nous quelquefois une combinaison par les indices de ses éléments écrits dans leur ordre entre parenthèses. Par exemple

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\lambda)$$

indiquera la combinaison

$$a_\alpha^1\, a_\beta^2\, a_\gamma^3 \ldots a_\lambda^m,$$

et représentera le polynôme

$$a_\alpha^1 + a_\beta^2 + a_\gamma^3 + \ldots + a_\lambda^m$$

s'il s'agit d'un système de polynômes.

4. On obtiendra évidemment toutes les combinaisons que nous venons de définir en développant le produit

$$(a_0^1 + a_1^1 + a_2^1 + \ldots + a_{n-1}^1)(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)\ldots(a_0^m + a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m),$$

d'où il suit que n^m est le nombre total des combinaisons de m éléments dans le système dont la base est n.

Si plusieurs colonnes du système se répétaient, en sorte qu'il y eût α colonnes d'une espèce, β colonnes d'une autre espèce, etc., toutes les combinaisons *distinctes* du système s'obtiendraient en développant le produit

$$(a_0^1 + a_1^1 + a_2^1 + \ldots + a_{n-1}^1)^\alpha (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)^\beta \ldots (a_0^m + a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m)^\lambda,$$

et le coefficient numérique de chaque terme indiquerait combien de fois la combinaison correspondante entre dans le système.

5. Les combinaisons du système (A) peuvent se partager en classes de la manière suivante :

1°. Les combinaisons dans lesquelles la somme des indices est n ou un multiple de n;

2°. Les combinaisons dans lesquelles cette somme est un multiple de n augmenté de 1 ;

3°. Les combinaisons dans lesquelles cette somme est un multiple de n augmenté de 2;

Et ainsi de suite. Il y aura donc en tout n classes, que nous désignerons par les nombres 0, 1, 2,..., $n-1$.

6. Chacune des n classes comprend le même nombre de combinaisons.

En effet, si l'on change dans les combinaisons une fois formées

$$a_0^1,\ a_1^1,\ a_2^1,\ldots,\ a_{n-1}^1$$

respectivement en

$$a_1^1,\ a_2^1,\ a_3^1,\ldots,\ a_0^1,$$

les combinaisons de la classe h se changent en autant de combinaisons distinctes de la classe $h+1$. Il ne peut donc y avoir moins de combinaisons de cette dernière classe que de la précédente. Une permutation inverse montrerait qu'il ne peut y en avoir moins. Donc ce nombre est le même pour chaque classe.

Ainsi chaque classe renferme $n^m : n$ ou n^{m-1} combinaisons.

7. Nous supposerons dans tout ce qui va suivre que l'on range les combinaisons à la suite les unes des autres, de manière que si l'on vient à effacer les lettres et leurs numéros, en ne laissant subsister que les indices, ceux-ci considérés comme chiffres du système de numération dont la base est n, forment la suite naturelle des nombres de 0 à $n^m - 1$.

Cette disposition aura l'avantage de mettre en évidence les principales propriétés d'un système. Et d'abord on voit que le rang de chaque combinaison indiquera sa classe et sa composition.

Soient, par exemple,

$$n = 10 \quad \text{et} \quad m = 5.$$

Comme la première combinaison du système est (00000), la 3257^e

sera

$$(03256), \quad \text{ou} \quad a_0^1\, a_3^2\, a_2^2\, a_5^4\, a_6^5,$$

et appartiendra à la 6^e classe puisque

$$0 + 3 + 2 + 5 + 6 = 16 \equiv 6 \,(\text{mod. } 10).$$

Pour avoir la 50^e combinaison du système dans lequel $m=3$, $n=4$, il faut préalablement exprimer 49 dans le système de numération dont la base est *quatre*. On trouve 201. La combinaison demandée est donc

$$(201) \quad \text{ou} \quad a_2^1\, a_0^2\, a_1^3.$$

On voit que nos combinaisons forment comme un système de numération, où la valeur des chiffres dépendrait de leur position d'après une loi tout à fait quelconque.

8. Lorsqu'on veut simplement savoir à quelle classe appartiennent les diverses combinaisons d'un système, on peut y parvenir sans être obligé d'exprimer un nombre dans un système de numération inusité.

Pour fixer les idées, supposons que $n = 10$. L'ordre d'une combinaison est alors le reste de la division par 10 du nombre qui indique son rang (la première combinaison étant indiquée par ..0000, la seconde par ..0001, et ainsi de suite). Or ce reste augmente d'une unité quand on passe d'un nombre au suivant, excepté lorsque le premier nombre est terminé par 9, 99, 999, etc. Dans ces derniers cas, le reste de la division par 10 augmente respectivement de 2, 3, 4,..., unités.

D'après cela, pour partager en classes les combinaisons formées dans le système décimal et en les supposant rangées comme il a été dit plus haut (n° **7**), il suffira d'écrire en cercle les chiffres 0, 1, 2,..., 9, et de prendre ces nombres à partir de 0 en suivant le cercle, avec le soin d'avancer d'un rang à chaque tour, de deux rangs à chaque dizaine de tours, de trois rangs à chaque centaine, et ainsi de suite. Ces chiffres, écrits sous les combinaisons au fur et à mesure qu'ils seront lus sur le cercle, indiqueront la classe à laquelle chaque combinaison appartient.

Une règle analogue s'applique évidemment à un système quelconque, et l'on aura, par exemple, dans le cas de $n=3$, $m=3$, le résultat suivant :

Rang de la combinaison.	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12	13, 14, 15	16, 17, 18	19, 20, 21	22, 23, 24	25, 26, 27
Indice de la classe.	0, 1, 2	1, 2, 0	2, 0, 1	1, 2, 0	2, 0, 1	0, 1, 2	2, 0, 1	0, 1, 2	1, 2, 0

9. Il résulte de cette loi que si l'on s'arrête dans le système à un rang marqué par un multiple de n, on aura jusque-là autant de combinaisons de la classe 0 que de la classe 1, que de la classe 2, etc.

10. Supposons toujours les combinaisons rangées comme il a été dit au n° **7**, et représentées par la suite des nombres (0 compris) exprimés dans le système de numération dont la base est n. Les n^{m-1} premières combinaisons commencent par a_0^1; les n^{m-1} suivantes par a_1^1, et ainsi de suite. Le système se partage donc en n groupes dont chacun renferme n^{m-1} combinaisons dans lesquelles le premier élément est commun.

0	0	0
0	0	1
0	0	2
0	1	0
0	1	1
0	1	2
0	2	0
0	2	1
0	2	2
1	0	0
1	0	1
1	0	2
1	1	0
1	1	1
1	1	2
1	2	0
1	2	1
1	2	2
2	0	0
2	0	1
2	0	2
2	1	0
2	1	1
2	1	2
2	2	0
2	2	1
2	2	2

Chacun de ces groupes partiels peut être regardé comme un système de combinaisons de $m-1$ éléments, et se partage de même en n groupes. Il y aura donc dans tout le système n^2 de ces nouveaux groupes.

Et en général, i étant moindre que m, le système se pourra partager en n^i groupes de n^{m-i} combinaisons ayant les i premiers éléments communs. Chacun de ces groupes constitue un système dont la base est n, mais à $m-i-1$ éléments, en ne considérant que comme un seul élément l'ensemble des $i+1$ premiers, ensemble qui ne peut avoir que n valeurs différentes.

Par exemple, dans le système ternaire que représente le tableau ci-contre, il y a trois groupes principaux, séparés par un trait double, dans lesquels le premier élément est commun; on peut considérer chacun d'eux comme formant un système de même base à 2 éléments. Chacun de ces groupes se subdivise à son tour en trois groupes secondaires dont les combinaisons ne diffèrent que par le dernier élément, et qui peuvent être considérés comme formant des systèmes de même base, mais à 1 seul élément.

11. Prenons, dans le tableau (A), i éléments quelconques appartenant à des colonnes différentes; amenons-les sur la première ligne horizontale, et, par une permutation entre les colonnes, faisons en sorte qu'ils occupent, sur cette ligne, les i premières places. En opérant sur le tableau ainsi modifié comme si chaque élément avait l'indice et le numéro qui convient à sa place actuelle, on formera encore toutes les combinaisons du système, et quoique l'ordre nouveau soit très-différent du premier, quelques-unes des conséquences précédentes subsisteront encore.

Ainsi les n premières combinaisons ne différant que par le dernier élément, appartiendront à n classes différentes : il en sera de même des n suivantes, etc. ; en s'arrêtant à un rang marqué par un multiple de n, on aura donc encore un nombre égal de combinaisons de chaque classe.

En second lieu, les n^{m-i} premières combinaisons, et elles seront les seules, commenceront par les i éléments considérés : comme n^{m-i} est un multiple de n (à moins que $i = m$), et que, d'ailleurs, rien n'empêche, une fois les combinaisons formées, de mettre chaque élément à la place indiquée par son numéro, on aura le principe suivant.

12. *Dans tout système dont* n *est la base et* m *le nombre des éléments,* i *étant moindre que m, il existe* $\mathrm{n}^{\mathrm{m}-\mathrm{i}}$ *combinaisons également réparties entre les* n *classes, et dans lesquelles* i *indices pris à volonté occupent la même place.*

13. Comme ce principe est important, nous en présenterons une autre démonstration en prenant un exemple particulier.

Supposons qu'on demande combien il y a, dans le système décimal, de nombres de 8 chiffres qui renferment 5 millions 3 mille et 4 centaines.

Si l'on efface dans un nombre qui satisfait à ces conditions les chiffres 5, 3 et 4, il restera un nombre de cinq chiffres ; et réciproquement, un nombre de cinq chiffres étant donné, en y intercalant convenablement les chiffres 5, 3 et 4, on obtiendra un nombre remplissant les conditions demandées.

Par conséquent, il y aura autant de nombres de 8 chiffres où les chiffres 5, 3, 4 occupent des places déterminées, qu'il y a de nombres de 5 chiffres (00000 compris), c'est-à-dire 10^5.

Si l'on écrit les nombres de huit chiffres qui remplissent ces conditions dans l'ordre croissant, il est visible que les dix premiers appartiendront à des classes différentes : de même les dix suivants, etc.

DEUXIÈME PARTIE.

Des systèmes de polynômes.

§ I.

Propriétés générales des systèmes de polynômes.

14. Avant d'examiner les propriétés des systèmes de polynômes, et afin de ne pas compliquer les énoncés, nous conviendrons de quelques notations.

B, C, D,..., L désigneront des systèmes analogues à A, et qui s'obtiennent en remplaçant dans le tableau A, *a* par *b*, *c*,..., *l*.

$\sum (\mathrm{ABC}\ldots\mathrm{L})_\mu$ ou $\sum_\mu$: somme des produits obtenus en multipliant entre eux les polynômes de même rang et de la classe μ des systèmes A, B,..., L.

$\sum \mathrm{T}_\mu$: ensemble des termes qui, dans $\sum_\mu$, renferment tous les indices appartenant à un polynôme de la classe μ, numérotés comme dans ce polynôme.

$\sum \mathrm{A}^i_\mu$: somme des puissances $i^{\text{èmes}}$ des polynômes de la classe μ et du système A.

$\mathcal{A}_\mu$: produit de tous les termes d'un polynôme de la classe μ et du système A.

$\mathcal{A}'_\mu$: produit des termes d'un polynôme de l'ordre μ par l'un des termes de ce polynôme.

Nous désignerons, à l'exemple de plusieurs auteurs, le produit

$$1.2.3\ldots m$$

par Πm.

Les autres notations seront expliquées en leur lieu.

15. Théorème fondamental. — A, B,..., L *désignant i systèmes de polynômes de même base et du même nombre de termes, on a*

$$\sum (\mathrm{ABC}\ldots\mathrm{L})_\mu = \sum (\mathrm{ABC}\ldots\mathrm{L})_\nu \tag{1}$$

pour $i < m$, *et*

$$(2)\qquad \sum(\mathrm{ABC}\ldots\mathrm{L})_\mu - \sum \mathrm{T}_\mu = \sum(\mathrm{ABC}\ldots\mathrm{L})_\nu - \sum \mathrm{T}_\nu$$

pour $i \overline{\overline{>}} m$.

Un terme faisant partie de $\sum_\mu$ peut être représenté par

$$\mathrm{T} = abc\ldots l,$$

chacune de ces lettres ayant un indice et un numéro que nous n'écrivons pas pour plus de simplicité.

Les indices sont i nombres égaux ou inégaux pris parmi ceux qui entrent dans un polynôme de la classe μ : les numéros sont aussi i nombres égaux ou inégaux pris parmi les m nombres $1, 2, 3, \ldots, m$.

Or, si l'on suppose d'abord i moindre que m, il existe dans chaque système autant de polynômes de l'ordre μ que de l'ordre ν, où ces i indices sont surmontés des mêmes numéros (**12**). Par conséquent, si le terme T entre un certain nombre de fois dans $\sum_\mu$, il entrera le même nombre de fois dans $\sum_\nu$, ce qui démontre l'égalité (1).

Si l'on a

$$i \overline{\overline{>}} m,$$

tous les termes T, où ne se retrouveront pas les m indices d'un polynôme de l'ordre μ, numérotés comme dans ce polynôme, entreront à la fois dans $\sum_\mu$ et dans $\sum_\nu$. Ces deux sommes ne peuvent donc différer que par les termes dont l'ensemble a été désigné par $\sum \mathrm{T}_\mu$ et $\sum \mathrm{T}_\nu$, ce qui démontre l'égalité (2).

16. Lorsqu'une fonction des combinaisons d'une classe (polynômes ou produits) ne changera pas quand on y substituera les combinaisons de même rang de toute autre classe, nous représenterons, pour abréger, cette fonction par le symbole $\mathfrak{z}(\mu)$, qui indiquera qu'elle est indépendante de la classe μ. Nos deux égalités fondamentales pourront donc s'écrire comme il suit :

$$(1) \qquad \textstyle\sum_\mu = \mathfrak{s}(\mu), \qquad (i < m),$$

$$(2) \qquad \textstyle\sum_\mu - \sum \mathrm{T}_\mu = \mathfrak{s}(\mu), \qquad (i \geqq m).$$

17. Lorsque i est égal à $m - 2$, les égalités comprises dans la formule (1) se partagent en d'autres plus simples.

En effet, chaque système se compose de n systèmes partiels dans lesquels les polynômes de l'ordre μ et ceux de l'ordre ν forment des classes différentes. Par suite, l'égalité $\sum_\mu = \sum_\nu$ doit être une conséquence de n égalités semblables, relatives à chacun des systèmes partiels. Une pareille décomposition aurait lieu à fortiori pour $i < m - 2$.

Pour éclaircir tout cela par un exemple, ne considérons qu'un seul système dans lequel $n = 2$, $m = 3$. Ce système pourra être représenté par le tableau suivant :

		Polynômes	Classe.
Système complet.	1er système partiel.	0 0 0	0
		0 0 1	1
		0 1 0	1
		0 1 1	0
	2e système partiel.	1 0 0	1
		1 0 1	0
		1 1 0	0
		1 1 1	1

La supposition de $i = 1$ dans l'égalité (1) donne

$$(000) + (011) + (101) + (110) = (001) + (010) + (100) + (111).$$

Or cette égalité est une conséquence des deux suivantes :

$$(000) + (011) = (001) + (010),$$
$$(101) + (110) = (100) + (111),$$

égalités qui sont relatives aux deux systèmes partiels dans lesquels le système complet se décompose.

18. Corollaire I. — *Si les systèmes* A, B, C,..., L *sont identiques, on aura les formules*

$$(3)\qquad \sum \overset{m-i}{\mathrm{A}_\mu} = \mathfrak{z}(\mu),$$

$$(4)\qquad \sum \overset{m}{\mathrm{A}_\mu} - \Pi m \sum \mathcal{A}_\mu = \mathfrak{z}(\mu),$$

$$(5)\qquad \sum \overset{m+1}{\mathrm{A}_\mu} - \frac{\Pi(m+1)}{2} \sum \mathcal{A}'_\mu = \mathfrak{z}(\mu),$$

conséquences immédiates du théorème fondamental et des formules qui servent à développer les puissances des polynômes.

19. Les formules (4) et (5) sont déduites de la formule (2) en y faisant $i = m$ et $i = m + 1$. Le développement de T_μ en fonction symétrique des termes de A_μ devenant de plus en plus compliqué à mesure que i augmente, nous nous contenterons toujours de ces deux cas particuliers.

Toutefois ce développement, quand on ne considère qu'un seul système, peut être prolongé autant que l'on veut en ayant égard à la règle suivante.

En définitive, il s'agit de trouver dans le développement de

$$(a + b + c + \ldots + l)^{m+k},$$

a, b, c,..., l représentant, pour abréger, les m éléments qui entrent dans un polynôme de l'ordre μ, tous les termes tels que

$$\mathrm{N} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$$

dans lesquels aucun des exposants α, β,..., λ n'est égal à zéro, et par suite on aura

$$\mathrm{T}_\mu = \sum\!\!\!\sum \frac{\Pi(m+k)}{\Pi\alpha . \Pi\beta \ldots \Pi\lambda} a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda,$$

le double signe $\sum\!\!\!\sum$ indiquant que l'on doit étendre la somme à toutes les valeurs qui satisfont à l'égalité

$$\alpha + \beta + \gamma \ldots + \lambda = m + k,$$

et en outre permuter entre eux tous les termes a, b, c,..., l.

Pour avoir $\sum T_\mu$, il faudra opérer de la même manière sur tous les polynômes de l'ordre μ.

20. Corollaire II. — *Si l'on pose*

$$\varphi(x) = p_0 x^i + p_1 x^{i-1} + \ldots + p_i,$$

on aura

$$(6) \quad \sum \varphi(A_\mu) = \mathfrak{z}(\mu), \qquad i < m,$$

$$(7) \quad \sum \varphi(A_\mu) - \Pi m p_0 \sum \mathcal{A}_\mu = \mathfrak{z}(\mu), \qquad i = m,$$

$$(8) \quad \sum \varphi(A_\mu) - \frac{\Pi(m+1)}{2} p_0 \sum \mathcal{A}'_\mu - \Pi m p \sum \mathcal{A}_\mu = \mathfrak{z}(\mu), \quad i = m+1.$$

21. Si l'on suppose

$$\varphi(x) = (x+h)^i,$$

on aura

$$(9) \quad \sum (A_\mu + h)^{m-i} = \mathfrak{z}(\mu),$$

$$(10) \quad \sum (A_\mu + h)^m - \Pi m \sum \mathcal{A}_\mu = \mathfrak{z}(\mu),$$

$$(11) \quad \sum (A_\mu + h)^{m+1} - \frac{\Pi(m+1)}{2} \sum \mathcal{A}'_\mu - mh \Pi m \sum \mathcal{A}_\mu = \mathfrak{z}(\mu).$$

On serait arrivé au même résultat en augmentant de h tous les termes d'une colonne dans le tableau (A) et appliquant les formules du n° **18**.

22. Si l'on a

$$\varphi(x) = x(x+\rho)(x+2\rho)\ldots[x+(i-1)\rho] = x^{i|\rho},$$

il en résultera

$$(12) \quad \sum A_\mu^{m-i|\rho} = \mathfrak{z}(\mu),$$

$$(13) \quad \sum A_\mu^{m|\rho} - \Pi m \sum \mathcal{A}_\mu = \mathfrak{z}(\mu),$$

$$(14) \quad \sum A_\mu^{m+i|\rho} - \frac{\Pi(m+1)}{2} \sum \mathcal{A}'_\mu - \frac{m(m+1)}{2} \rho \Pi m \sum \mathcal{A}_\mu = \mathfrak{z}(\mu).$$

Ces formules ressemblent à celles du n° **18**, et offrent un nouvel exemple de l'analogie qui existe entre les factorielles et les puissances.

§ II.

Applications diverses.

23. Telles sont les principales propriétés des systèmes de polynômes. On conçoit qu'on pourra en déduire d'autres moins générales, mais non moins intéressantes, en particularisant les quantités qui entrent dans leur formation.

En premier lieu, supposons tous les éléments du tableau (A) égaux à leur indice, mais représentant, suivant le rang qu'ils occupent, des unités du premier, du deuxième, du troisième ordre dans le système dont la base est n. On obtiendra évidemment les n^m premiers nombres de la suite naturelle, o compris.

Et si, après avoir ainsi choisi les éléments du système, on les multiplie tous par h et qu'on les augmente de α, les polynômes formeront une progression arithmétique commençant à $m\alpha$ et ayant h pour raison. On peut d'ailleurs disposer de α et de h de manière à obtenir une progression donnée. On a donc ce théorème.

n^m nombres en progression arithmétique peuvent être considérés comme les valeurs numériques des polynômes de m termes, dans le système dont la base est n, et rangés dans l'ordre adopté (n° **7**).

De sorte que les théorèmes démontrés dans le paragraphe précédent fournissent, entre les termes des progressions arithmétiques, de curieuses relations.

Soient, par exemple, les 16 nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16.$$

On peut les considérer comme appartenant à un système dont la base est 2 et le nombre des éléments 4. D'après la règle donnée (n° **8**), ils ont respectivement pour indices

$$0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0.$$

On aura donc

$$1+4+6+7+10+11+13+16=2+3+5+8+9+12+14+15,$$
$$1+4^2+6^2+7^2+10^2+11^2+13^2+16^2=2^2+3^2+5^2+8^2+9^2+12^2+14^2+15^2,$$
$$1+4^3+6^3+7^3+10^3+11^3+13^3+16^3=2^3+3^3+5^3+8^3+9^3+12^3+14^3+15^3.$$

24. Les nombres polygones étant des fonctions entières et du second degré d'une indéterminée, jouissent, d'après la remarque faite (n° **20**), des mêmes propriétés que les progressions arithmétiques. Par exemple, si l'on prend 16 nombres polygones consécutifs, la somme de 8 d'entre eux sera égale à la somme des 8 autres. Si l'on en prend 64, la somme des carrés de 32 de ces nombres sera égale à la somme des carrés des 32 autres, etc. : propriétés qu'il serait bien difficile de démontrer directement.

25. Imaginons un système binaire ainsi composé :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0, \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5,\ldots, & a_m. \end{array}$$

Il est facile de voir que, dans cet exemple, les polynômes de l'ordre 0 se réduisent aux sommes des termes de la seconde ligne pris en nombre pair; et les polynômes de l'ordre 1, aux sommes de ces termes pris en nombre impair.

On aura donc

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a_1+a_2+\ldots+a_m)^{m-i}-\sum(a_2+a_3+\ldots+a_m)^{m-i} \\ &+\sum(a_3+\ldots+a_m)^{m-i} \text{ etc. } =0, \end{aligned} \right.$$

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a_1+a_2+\ldots+a_m)^{m}-\sum(a_2+a_3+\ldots+a_m)^{m} \\ &+\sum(a_3+\ldots+a_m)^{m} \text{ etc. } =\Pi\, m\, a_1 a_2\ldots a_m, \end{aligned} \right.$$

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a_1+a_2+\ldots+a_m)^{m+1}-\sum(a_2+a_3+\ldots+a)^{m+1} \\ &+\sum(a_3+\ldots+a_m)^{m+1} \text{etc.} =\frac{\Pi\,(m+1)}{2}\, a_1 a_2\ldots a_m(a_1+a_2+\ldots+a_m). \end{aligned} \right.$$

C'est ainsi que l'on aurait (en changeant la notation pour simplifier)

$$(a+b+c)^2-(a+b)^2-(a+c)^2-(b+c)^2+a^2+b^2+c^2=0,$$
$$(a+b+c)^3-(a+b)^3-(a+c)^3-(b+c)^3+a^3+b^3+c^3=6abc,$$
$$(a+b+c)^4-(a+b)^4-(a+c)^4-(b+c)^4+a^4+b^4+c^4=12abc(a+b+c).$$

On aurait encore, en considérant deux ou trois systèmes analogues,

$$(a+b+c)(a'+b'+c')-(a+b)(a'+b')-(a+c)(a'+c')$$
$$-(b+c)(b'+c')+aa'+bb'+cc'=0,$$

$$(a+b+c)(a'+b'+c')(a''+b''+c'')-(a+b)(a'+b')(a''+b'')-\text{etc.}$$
$$+aa'a''+bb'b''+cc'c''=ab'c''+ac'b''+\text{etc.}$$

26. Si l'on suppose

$$a_1=a_2=a_3\ldots=a_m,$$

on aura les identités suivantes qui sont bien connues :

$$(18)\quad m^{m-i}-m(m-1)^{m-i}+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^{m-i}-\ldots=0,$$

$$(19)\quad m^m-m(m-1)^m+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m-\ldots=\Pi m,$$

$$(20)\quad m^{m+1}-m(m-1)^{m+1}+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^{m+1}-\ldots=\Pi m\frac{m(m+1)}{2}.$$

27. Considérons le système binaire

$$\begin{matrix} a, & a, & a,\ldots, & a, \\ b, & b, & b,\ldots, & b, \end{matrix}$$

en lui appliquant la formule (1) on trouvera

$$(21)\quad (ma)^i-m[(m-1)a+b]^i+\frac{m(m-1)}{1.2}[(m-2)a+b]^i-\text{etc.}=0,$$

pour $i<m$.

Cette formule comprend la formule (18) comme cas particulier. On généralisera aussi sans peine les formules (19) et (20).

TROISIÈME PARTIE.

Des systèmes de produits.

§ I.

Théorèmes généraux sur les dérivées.

28. Nous supposerons dans ce qui va suivre que les quantités inscrites au tableau

$$(A)\qquad \begin{cases} a_0^1 & a_0^2 & a_0^3 & \ldots & a_0^m, \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^m, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & a_{n-1}^3 & \ldots & a_0^m, \end{cases}$$

sont des fonctions d'une certaine variable x. Nous continuerons à représenter par $\mathcal{A}_\mu$ le produit des termes d'un polynôme de la classe μ, c'est-à-dire un produit de la classe μ : $d^i \mathcal{A}_\mu$ sera la dérivée $i^{ème}$ de ce produit, et $\sum d^i \mathcal{A}_\mu$ représentera la somme de toutes les dérivées de cet ordre obtenues en opérant sur tous les produits de la même classe.

29. D'après notre théorème fondamental (n° **15**), on a, en supposant que plusieurs systèmes se répètent,

$$\sum (\mathrm{A}^\alpha\, \mathrm{B}^\beta\, \mathrm{C}^\gamma \ldots \mathrm{L}^\lambda)_\mu = \sum (\mathrm{A}^\alpha\, \mathrm{B}^\beta\, \mathrm{C}^\gamma \ldots \mathrm{L}^\lambda)_\nu\,,$$

toutes les fois que la somme $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda$, qui marque le nombre des systèmes considérés, est moindre que m.

Soient

$$\mathrm{T},\quad \mathrm{S}$$

deux termes *identiques* pris dans les deux membres de cette égalité. Admettons que ceux des facteurs de $\mathcal{A}_\mu, \mathcal{B}_\mu, \ldots, \mathcal{L}_\mu$, qui n'entrent pas dans T, y soient rétablis avec l'exposant o, et opérons de la même manière à l'égard de S.

Cela posé, pour avoir les termes,

$$\mathrm{T}', \quad \mathrm{S}',$$

qui correspondent à T et à S dans les expressions

$$\sum d^\alpha \mathcal{A}_\mu d^\beta \mathcal{B}_\mu \ldots d^\lambda \mathcal{L}_\mu, \quad \sum d^\alpha \mathcal{A}_\nu d^\beta \mathcal{B}_\nu \ldots d^\lambda \mathcal{L}_\nu,$$

il suffira de regarder, suivant les règles connues, les exposants des facteurs de T et de S comme indiquant, non plus des puissances, mais des dérivées prises par rapport à x, en remplaçant $d^0 k$ par k.

Il suit de là que T′ et S′ diffèrent par les facteurs affectés de la caractéristique d^0, mais qu'ils deviendront égaux si on les divise, le premier par $\mathcal{A}_\mu \mathcal{B}_\mu \ldots \mathcal{L}_\mu$, le second par $\mathcal{A}_\nu \mathcal{B}_\nu \ldots \mathcal{L}_\nu$. On aura donc

$$\frac{\mathrm{T}'}{(\mathcal{A}\mathcal{B}\ldots\mathcal{L})_\mu} = \frac{\mathrm{S}'}{(\mathcal{A}\mathcal{B}\ldots\mathcal{L})_\nu},$$

et, par suite,

$$(22) \qquad \sum\left(\frac{d^\alpha \mathcal{A}}{\mathcal{A}}\cdot\frac{d^\beta \mathcal{B}}{\mathcal{B}}\cdots\frac{d^\lambda \mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right)_\mu = \sum\left(\frac{d^\alpha \mathcal{A}}{\mathcal{A}}\cdot\frac{d^\beta \mathcal{B}}{\mathcal{B}}\cdots\frac{d^\lambda \mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right)_\nu$$

pourvu que l'on ait

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda < m.$$

30. La même analyse convient mot pour mot au cas où les éléments des divers systèmes considérés sont des fonctions de plusieurs variables, d^α indiquant alors, soit α dérivations opérées successivement par rapport à ces variables, soit une différentielle totale de l'ordre α. Si, en outre, on suppose que plusieurs systèmes deviennent identiques, le THÉORÈME FONDAMENTAL de cette troisième Partie pourra s'énoncer ainsi :

$$(22\ bis) \qquad \sum\left[\left(\frac{d^\alpha \mathcal{A}}{\mathcal{A}}\right)^{\mathrm{a}}\left(\frac{d^\beta \mathcal{B}}{\mathcal{B}}\right)^{\mathrm{b}}\cdots\left(\frac{d^\lambda \mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right)^{\mathrm{l}}\right]_\mu = \mathfrak{s}(\mu),$$

à condition que l'on ait

$$\mathrm{a}\alpha + \mathrm{b}\beta + \ldots + \mathrm{l}\lambda < m,$$

et que les opérations indiquées par la lettre d restent les mêmes quand on passe d'une classe à une autre.

31. Si l'on suppose, dans la formule (22),

$$\alpha = \beta = \ldots = \lambda = i, \qquad \alpha + \beta + \ldots + \lambda = ki,$$

et tous les systèmes identiques, on aura

$$(23) \qquad \sum \left(\frac{d^i \mathcal{A}}{\mathcal{A}}\right)_\mu^k = \mathfrak{z}(\mu),$$

pourvu que l'on ait

$$ik < m.$$

32. Si l'on suppose

$$k = 1,$$

la formule (23) devient

$$(24) \qquad \sum \left(\frac{d^{m-i} \mathcal{A}}{\mathcal{A}}\right)_\mu = \mathfrak{z}(\mu).$$

On trouvera ensuite

$$(25) \qquad \sum \left(\frac{d^m \mathcal{A}}{\mathcal{A}}\right)_\mu - \Pi m \sum a_\mu = \mathfrak{z}(\mu),$$

$$(26) \qquad \sum \left(\frac{d^{m+1} \mathcal{A}}{\mathcal{A}}\right)_\mu - \frac{\Pi(m+1)}{2} \sum a'_\mu = \mathfrak{z}(\mu),$$

a_μ, a'_μ désignant ce que deviennent les quantités $\mathcal{A}_\mu$, $\mathcal{A}'_\mu$ quand on y change les puissances en dérivées, et qu'on les divise ensuite respectivement par $\mathcal{A}_\mu$, $\mathcal{B}_\mu$, etc.

33. On trouvera avec la même facilité les formules qui correspondent aux formules (6), (7), (8) et suivantes de la deuxième partie de ce Mémoire.

§ II.

Applications diverses.

34. Nous avons vu (**23**) que n^m nombres en progression arithmétique pouvaient se partager en groupes, tels que certaines sommes de puissances de leurs termes ne changeaient pas quand on passait d'un groupe à un autre.

Les progressions géométriques dont les termes sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables jouissent de propriétés analogues.

Par exemple, φ étant une fonction de x, on aura

$$\begin{aligned}&\frac{d^i.\varphi}{\varphi}+\frac{d^i.\varphi^4}{\varphi^4}+\frac{d^i.\varphi^6}{\varphi^6}+\frac{d^i.\varphi^7}{\varphi^7}+\frac{d^i.\varphi^{10}}{\varphi^{10}}+\frac{d^i.\varphi^{11}}{\varphi^{11}}+\frac{d^i.\varphi^{13}}{\varphi^{13}}+\frac{d^i.\varphi^{16}}{\varphi^{16}}\\ =&\frac{d^i.\varphi^2}{\varphi^2}+\frac{d^i\,\varphi^3}{\varphi^3}+\frac{d^i.\varphi^5}{\varphi^5}+\frac{d^i.\varphi^8}{\varphi^8}+\frac{d^i.\varphi^9}{\varphi^9}+\frac{d^i.\varphi^{12}}{\varphi^{12}}+\frac{d^i.\varphi^{14}}{\varphi^{14}}+\frac{d^i.\varphi^{15}}{\varphi^{15}},\end{aligned}$$

pourvu que i soit moindre que 4. On aurait aussi (**31**)

$$\left(\frac{d.\varphi}{\varphi}\right)^3+\left(\frac{d.\varphi^4}{\varphi^4}\right)^3+\text{etc.}=\left(\frac{d.\varphi^2}{\varphi^2}\right)^3+\left(\frac{d.\varphi^3}{\varphi^3}\right)^3+\text{etc.}$$

35. La considération du système

$$\begin{matrix}1, & 1, & 1,\ldots, & 1,\\ a_1, & a_2, & a_3,\ldots, & a_m\end{matrix}$$

conduira aux formules suivantes :

$$\begin{matrix}(27)\\ \\ (28)\\ \\ (29)\end{matrix}\left\{\begin{aligned}&d^i.a_1a_2a_3\ldots a_m\\ &-\sum a_1d^i.a_2a_3\ldots a_m\\ &+\sum a_1a_2d^i.a_3\ldots a_m\\ &-\text{etc.}\end{aligned}\right.\left\{\begin{aligned}&=0, && i<m,\\ &=\Pi m\,da_1da_2\ldots da_m, && i=m,\\ &=\frac{\Pi(m+1)}{2}d(da_1da_2\ldots da_m), && i=m+1.\end{aligned}\right.$$

Par exemple on aurait, u, v, z étant trois fonctions quelconques,

$$\begin{aligned}&d^2.uvz-ud^2.vz-vd^2.uz-zd^2.uv+vzd^2u+uzd^2v+uvd^2z=0,\\ &d^3.uvz-ud^3.vz-vd^3.uz-\text{etc.}=6\,du\,dv\,dz,\\ &d^4.uvz-ud^4.vz-vd^4.uz-\text{etc.}=12\,d(du\,dv\,dz).\end{aligned}$$

36. Si l'on suppose

$$a_1=a_2=a_3=\ldots=a_m=\varphi,$$

on aura

$$
\begin{array}{ll}
(30) & \left.\begin{array}{l} d^i.\varphi^m - m\varphi d^i.\varphi^{m-1} \\ + \frac{m(m-1)}{1.2} d^i.\varphi^{m-2}\ldots \\ \mp m\varphi^{m-1} d^i.\varphi^1 \pm \varphi^m d^i.\varphi^0 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} = 0, & i < m, \\ = \Pi m(d\varphi)^m, & i = m, \\ = \frac{\Pi(m+1)}{2} m(d\varphi)^{m-1} d^2\varphi, & i = m+1. \end{array} \\
(31) & \\
(32) &
\end{array}
$$

37. Et, plus généralement, u étant une fonction quelconque, si l'on considère le système

$$
\begin{array}{llll}
u, & 1, & 1,\ldots, & 1, \\
u\varphi, & \varphi, & \varphi,\ldots, & \varphi,
\end{array}
$$

on aura

$$
\begin{array}{ll}
(33) & \left.\begin{array}{l} d^i.u\varphi^m - m\varphi d^i.u\varphi^{m-1} \\ + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi^2 d^i.u\varphi^{m-2}\ldots \\ \mp m\varphi^{m-1} d^i.u\varphi \pm \varphi^m d^i.u \end{array}\right\} \begin{array}{ll} = 0, & i < m, \\ = \Pi mu(d\varphi)^m, & i = m, \\ = \frac{\Pi(m+1)}{2} mu(d\varphi)^{m-1} d^2\varphi + \Pi(m+1) du(d\varphi & \\ \qquad i = m+1. & \end{array} \\
(34) & \\
(35) &
\end{array}
$$

38. La formule (33), donnée pour la première fois dans les *Commentaires de Saint-Pétersbourg* (année 1772) par Lexell, a été reproduite et étendue par Arbogast (*Calcul des dérivations*, page 329).

Lexell arrive à cette formule par induction, en cherchant à vérifier la série de Lagrange. Il montre ensuite que si la formule est vraie pour m, elle est encore vraie pour $m+1$, et l'ayant ainsi établie d'une manière rigoureuse, il s'en sert pour démontrer la série de Lagrange, ce qu'il fait à peu près de la manière suivante :

Soit

$$t - x + \varphi(x) = 0,$$

on aura

$$\psi(t) = \psi[x - \varphi(x)];$$

développant le second membre par la série de Taylor, représentant $\psi'(x)$, $\psi''(x)$,... respectivement par u, du, d^2u,..., et $\varphi(x)$ simplement par φ, ou aura

$$\psi(t) = \psi(x) - u\varphi + \frac{\varphi^2}{1.2} du - \frac{\varphi^3}{1.2.3} d^2 u + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} d^3 u - \ldots,$$

et ensuite changeant tour à tour dans cette égalité $\psi(t)$ en $\varphi(t)\,\psi'(t)$, $[(\varphi t)^2 \psi' t]'$, etc.

$$\begin{aligned}
\varphi(t)\psi'(t) &= + u\varphi - \frac{2\varphi}{1.2} d.u\varphi + \frac{3\varphi^2}{1.2.3} d^2.u\varphi - \frac{4\varphi^3}{1.2.3.4} d^3.u\varphi + \ldots,\\
\frac{1}{1.2}[(\varphi t)^2 \psi' t]' &= + \frac{1}{1.2} d.u\varphi^2 - \frac{3\varphi}{1.2.3} d^2.u\varphi^2 + \frac{6\varphi^2}{1.2.3.4} d^3.u\varphi^2 - \ldots,\\
\frac{1}{1.2.3}[(\varphi t)^3 \psi' t]'' &= + \frac{1}{1.2.3} d^2.u\varphi^3 - \frac{4\varphi}{1.2.3.4} d^3.u\varphi^3 + \ldots,\\
\frac{1}{1.2.3.4}[(\varphi t)^4 \psi' t]''' &= + \frac{1}{1.2.3.4} d^3.u\varphi^4 - \ldots
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

En ajoutant ces égalités, les termes des seconds membres se détruisent en vertu de la formule (33), à l'exception de $\psi(x)$, et il reste

$$\psi(x) = \psi t + \varphi t \psi' t + \frac{1}{1.2}[(\varphi t)^2 \psi' t]' + \frac{1}{1.2.3}[(\varphi t)^3 \psi' t]'' + \ldots,$$

ce qui est bien la série de Lagrange.

39. La formule de Lexell peut encore se généraliser. Elle n'est, en effet, qu'un cas particulier de la suivante :

$$(d^i.u\varphi^m)^k - m(d^i.u\varphi^{m-1})^k + \frac{m(m-1)}{1.2}(d^i.u\varphi^{m-2})^k \ldots = 0,$$

qui a lieu toutes les fois que ik est moindre que m (n° **31**).

§ III.

Théorèmes sur quelques déterminants de fonctions.

40. *Lemme*. Soient

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \ldots, \quad \varphi_m$$

$m+1$ fonctions de x. Si l'on appelle D le déterminant

$$\sum (\pm\, d^0\varphi_0\, d^1\varphi_1\, d^2\varphi_2 \ldots d^{m-1}\varphi_{m-1}\, d^m\varphi_m),$$

et D_1 le déterminant

$$\sum (\pm\, d^0\varphi_0 d^1\varphi_1 d^2\varphi_2 \ldots d^{m-1}\varphi_{m-1} d^{m+1}\varphi_m),$$

qui ne diffère du premier que par le changement de d^m en d^{m+1}, je dis qu'on aura

$$(36) \qquad d.\mathrm{D} = \mathrm{D}_1.$$

En effet, soient

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \ldots d^\alpha \varphi_\mu d^{\alpha+1} \varphi_\nu, \ldots, \\ \mathrm{B} &= \ldots d^\alpha \varphi_\nu d^{\alpha+1} \varphi_\mu, \ldots, \end{aligned}$$

deux termes du déterminant D, que nous supposerons ne différer que par les facteurs mis en évidence. Si l'on différentie D, le terme provenant de A par la différentiation de $d^\alpha \varphi_\mu$ et celui qui provient de B par la différentiation de $d^\alpha \varphi_\nu$ seront les mêmes. D'ailleurs, d'après les règles connues, ces deux termes ont des signes opposés : donc ils se détruisent.

Il résulte de là qu'il ne reste dans $d.\mathrm{D}$ que les termes qui proviennent de la différentiation des facteurs affectés de d^m; en sorte que $d.\mathrm{D}$ ne diffère de D que par le changement de d^m en d^{m+1} : donc $d.\mathrm{D}$ n'est autre chose que D_1.

41. *Corollaire.* Soient

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_m$$

$m+1$ fonctions inconnues déterminées par les $m+1$ équations

$$(\mathrm{N}) \left\{ \begin{array}{l} x_0 d^0\varphi_0 + x_1 d^1\varphi_0 + x_2 d^2\varphi_0 + \ldots + x_m d^m\varphi_0 = d^{m+1}\varphi_0, \\ x_0 d^0\varphi_1 + x_1 d^1\varphi_1 + x_2 d^2\varphi_1 + \ldots + x_m d^m\varphi_1 = d^{m+1}\varphi_1, \\ x_0 d^0\varphi_2 + x_1 d^1\varphi_2 + x_2 d^2\varphi_2 + \ldots + x_m d^m\varphi_2 = d^{m+1}\varphi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_0 d^0\varphi_m + x_1 d^1\varphi_m + x_2 d^2\varphi_m + \ldots + x_m d^m\varphi_m = d^{m+1}\varphi_m. \end{array} \right.$$

Si l'on cherche la valeur de x_m, on trouvera, d'après les règles connues,

$$x_m = \frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}},$$

et, à cause de l'égalité (36),

$$x_m = \frac{d.\mathrm{D}}{\mathrm{D}} = d.\log \mathrm{D}.$$

42. Considérons les équations suivantes :

$$(\mathrm{P})\left\{\begin{array}{l} x_0 d^0.u\varphi^0 + x_1 d^1.u\varphi^0 + x_2 d^2.u\varphi^0 + \ldots + x_m d^m.u\varphi^0 = d^{m+1}.u\varphi^0,\\ x_0 d^0.u\varphi^1 + x_1 d^1.u\varphi^1 + x_2 d^2.u\varphi^1 + \ldots + x_m d^m.u\varphi^1 = d^{m+1}.u\varphi^1,\\ x_0 d^0.u\varphi^2 + x_1 d^1.u\varphi^2 + x_2 d^2.u\varphi^2 + \ldots + x_m d^m.u\varphi^2 = d^{m+1}.u\varphi^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_0 d^0.u\varphi^m + x_1 d^1.u\varphi^m + x_2 d^2.u\varphi^m + \ldots + x_m d^m.u\varphi^m = d^{m+1}.u\varphi^m. \end{array}\right.$$

Si l'on ajoute ces équations, après les avoir multipliées respectivement par

$$\pm\varphi^m, \quad \mp m\varphi^{m-1}, \ldots, \quad +\frac{m(m-1)}{2}\varphi^2, \quad -m\varphi, \quad +\varphi^0,$$

on aura, en ayant égard aux formules (33), (34), (35),

$$x_m(\Pi\, m.ud\varphi^m) = \Pi\, m\,\frac{m(m+1)}{2}\,ud\varphi^{m-1}\,d^2\varphi + \Pi(m+1)\,dud\varphi^m;$$

d'où

$$x_m = \frac{m(m+1)}{2}\,\frac{d^2\varphi}{d\varphi} + (m+1)\,\frac{du}{u} = d.\log\left[u^{m+1}\,d\varphi^{\frac{m(m+1)}{2}}\right];$$

d'un autre côté, si l'on pose

$$\mathrm{D} = \sum(\pm\, d^0.u\varphi^0\, d^1.u\varphi^1 \ldots d^m.u\varphi^m),$$

on aura (n° **41**)

$$x_m = d.\log \mathrm{D};$$

donc

$$d.\log \mathrm{D} = d.\log\left[u^{m+1}\,d\varphi^{\frac{m(m+1)}{2}}\right],$$

et, par suite,

$$\mathrm{D} = \mathrm{C}u^{m+1}\,d\varphi^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

C désignant une constante.

43. Pour obtenir la constante C, observons que le déterminant

$$\sum (\pm a_0^0 a_1^1 a_2^2 \ldots a_m^m),$$

dans lequel les indices supérieurs sont des exposants, est, d'après un théorème de Vandermonde, égal au produit

$$(a_m - a_{m-1})(a_m - a_{m-2})\ldots(a_m - a_0)(a_{m-1} - a_{m-2})\ldots(a_1 - a_0).$$

Or, si l'on suppose

$$u = e^x, \quad \varphi = e^x,$$

la constante devient égale à

$$\sum [\pm 1^0 . 2^1 . 3^2 \ldots (m+1)^m],$$

ou, en appliquant le théorème de Vandermonde,

$$\Pi m \Pi(m-1)\Pi(m-2)\ldots \Pi 2 \Pi 1.$$

Si donc on désigne cette dernière expression par $\Pi^2 m$, on aura

$$C = \Pi^2 m.$$

44. Ainsi l'on aura, quelles que soient les fonctions u et φ,

$$(37) \quad \sum (\pm d^0 . u\varphi^0 d^1 . u\varphi^1 \ldots d^m . u\varphi^m) = \Pi^2 m . u^{m+1} d\varphi^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Si l'on suppose

$$u = 1,$$

les termes du premier membre qui ont pour facteur l'une des quantités $d.u\varphi^0$, $d^2.u\varphi^0$, etc., disparaissent, et l'on a plus simplement

$$(w) \qquad \sum (\pm d\varphi d^2 . \varphi^2 d^3 . \varphi^3 \ldots d^m . \varphi^m) = \Pi^2 m . d\varphi^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Cette identité remarquable est due à Wronski (voir *Philosophie de la Technie algorithmique*, tome II, page 116). M. le capitaine Abadie en a donné une belle démonstration dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, de MM. Terquem et Gerono (tome XI).

Pour mieux fixer les idées, nous avons supposé toujours que les fonctions u et φ ne dépendaient que d'une seule variable; mais il est aisé de voir, suivant la remarque déjà faite au n° **30**, que toutes les formules démontrées dans ce paragraphe sont encore vraies quand on considère des fonctions de plusieurs variables, et que d^α désigne soit α dérivations opérées successivement par rapport à ces variables, soit une différentielle totale de l'ordre α.

45. Si, dans la formule (37), on pose

$$u = \varphi,$$

et que l'on change m en $m-1$, on obtient

$$(38)\quad \sum\left(\pm d^0.\varphi^1 d^1.\varphi^2 d^2.\varphi^3 \ldots d^{m-1}.\varphi^m\right) = \Pi^2(m, -1)\,\varphi^m . d\varphi^{\frac{m(m-1)}{2}}.$$

Pour en donner une vérification dans un cas très-simple, nous supposerons $m = 3$, $\varphi = x$. Il s'agira alors de calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \\ x^3 & 3x^2 & 6x \end{vmatrix}$$

On trouve, en appliquant les règles connues,

$$12x^3 - 6x^3 + 2x^3 - 0 + 0 - 6x^3,$$

ou $2x^3$, ce qui s'accorde bien avec la formule (38).