

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STURM

Sur les fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 1 (1856), p. 231-233.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__231_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR

LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

[Note rédigée par M. STURM d'après un Mémoire de M. DESPEYROUS.]

L'intégrale sous forme algébrique de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

s'obtient aisément, comme on sait [*], au moyen d'une intégration par parties. En mettant cette équation sous la forme

$$dx \sqrt{1-y^2} + dy \sqrt{1-x^2} = 0,$$

on en déduit

$$\int dx \sqrt{1-y^2} + \int dy \sqrt{1-x^2} = \text{constante.}$$

Or en intégrant par parties, on a

$$\int dx \sqrt{1-y^2} = x \sqrt{1-y^2} + \int \frac{xy \, dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

et

$$\int dy \sqrt{1-x^2} = y \sqrt{1-x^2} + \int \frac{xy \, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ajoutant et observant que les termes sous le signe $\int$ donnent une somme nulle en vertu de l'équation proposée, on trouve l'intégrale algébrique

$$x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} = \text{constante.}$$

La constante arbitraire qu'elle contient est la valeur de y pour $x = 0$. Posons

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \alpha, \quad x = \sin \alpha, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos \alpha,$$

[*] Voir, par exemple, LACROIX, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, tome II, page 473.

et de même

$$\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-y^2}} = \beta, \quad y = \sin \beta, \quad \sqrt{1-y^2} = \cos \beta.$$

Nous aurons

$$d\alpha + d\beta = 0,$$

d'où

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

γ étant une constante. D'ailleurs, pour $\alpha = 0$, on a

$$x = 0, \quad \beta = \gamma, \quad y = \sin \gamma.$$

La constante de notre intégrale est donc $\sin \gamma$. Par suite, il vient

$$\sin \gamma \quad \text{ou} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

C'est la formule fondamentale de la théorie des fonctions circulaires.

Le même procédé s'applique facilement à la recherche de l'intégrale d'Euler qui donne la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques.

Soit, en effet,

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-c^2 x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2} \sqrt{1-c^2 y^2}} = 0.$$

En multipliant par le produit des dénominateurs et divisant par $1 - c^2 x^2 y^2$, on a

$$\int \frac{\sqrt{1-y^2} \sqrt{1-c^2 y^2}}{1 - c^2 x^2 y^2} dx + \int \frac{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-c^2 x^2}}{1 - c^2 x^2 y^2} dy = \text{constante}.$$

Or en intégrant le premier terme par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1-y^2} \sqrt{1-c^2 y^2}}{1 - c^2 x^2 y^2} dx &= \frac{x \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-c^2 y^2}}{1 - c^2 x^2 y^2} \\ &+ \int xy \frac{(1+c^2)(1+c^2 x^2 y^2) - 2c^2 x^2 - 2c^2 y^2}{(1 - c^2 x^2 y^2)^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2} \sqrt{1-c^2 y^2}} \\ &- 2c^2 \int \frac{x^2 y^2}{(1 - c^2 x^2 y^2)^2} \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-c^2 y^2} dx. \end{aligned}$$

En échangeant entre elles les deux lettres x et y , on aura le second terme; ajoutant donc et observant que les termes sous le signe $\int$ donnent une somme nulle en vertu de l'équation différentielle proposée, on trouvera

$$\frac{x \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-c^2 y^2} + y \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-c^2 x^2}}{1-c^2 x^2 y^2} = \text{constante.}$$

La constante du second membre est la valeur de y pour $x = 0$. Posons

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-c^2 x^2}} = \alpha, \quad x = S(\alpha), \quad \sqrt{1-x^2} = C(\alpha),$$

$$\sqrt{1-c^2 x^2} = R(\alpha),$$

et de même

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2} \sqrt{1-c^2 y^2}} = \beta, \quad y = S(\beta), \quad \sqrt{1-y^2} = C(\beta),$$

$$\sqrt{1-c^2 y^2} = R(\beta).$$

Nous aurons

$$d\alpha + d\beta = 0,$$

d'où

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

γ étant une constante. D'ailleurs pour $\alpha = 0$, on a

$$x = 0, \quad \beta = \gamma, \quad y = S(\gamma).$$

La constante de notre intégrale est donc $S(\gamma)$. Par suite il vient

$$S(\gamma) \text{ ou } S(\alpha + \beta) = \frac{S(\alpha) C(\beta) R(\beta) + S(\beta) C(\alpha) R(\alpha)}{1 - c^2 S(\alpha)^2 S(\beta)^2}.$$

C'est la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques.

Elle donne $S(\alpha - \beta)$ en changeant le signe de $S(\beta)$. On peut aussi en déduire $C(\alpha \pm \beta)$ et $R(\alpha \pm \beta)$.