JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WOEPCKE

Nouveaux théorèmes relatifs aux intersections de certains systèmes de courbes ou de surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 139-142.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__139_0>

Nouveaux théorèmes relatifs aux intersections de certains systèmes de courbes ou de surfaces;

Par M. WOEPCKE.

I.

Soient

$$B_1, B_2, \ldots, B_n \quad \text{et} \quad C_1, C_2, \ldots, C_n$$

deux séries de fonctions de p variables et de degré m; posons

$$A_1 = B_1 + \lambda_1 C_1, \quad A_2 = B_2 + \lambda_2 C_2, \ldots, \quad A_{n-1} = B_{n-1} + \lambda_{n-1} C_{n-1}, \quad A_n = B_n + \lambda_n C_n,$$

$$\Sigma_{1,2} = \lambda_1 B_2 C_1 - \lambda_2 B_1 C_2, \ldots, \quad \Sigma_{1,n-1} = \lambda_1 B_{n-1} C_1 - \lambda_{n-1} B_1 C_{n-1}, \quad \Sigma_{1,n} = \lambda_1 B_n C_1 - \lambda_n B_1 C_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma_{n-2,n-1} = \lambda_{n-2} B_{n-1} C_{n-2} - \lambda_{n-1} B_{n-2} C_{n-1}, \quad \Sigma_{n-2,n} = \lambda_{n-2} B_n C_{n-2} - \lambda_n B_{n-2} C_n,$$

$$\Sigma_{n-1,n} = \lambda_{n-1} B_n C_{n-1} - \lambda_n B_{n-1} C_n;$$

et désignons par $\nu(M = 0, N = 0)$ la totalité des systèmes de valeurs des variables satisfaisant simultanément à deux équations $M = 0$ et $N = 0$. Il est évident

1°. Que

$$\nu(B_\alpha = 0, C_\alpha = 0)$$

satisfait aussi à $A_\alpha = 0$;

2°. Que

$$\nu(B_\alpha = 0, B_\beta = 0), \ \nu(B_\alpha = 0, C_\alpha = 0), \ \nu(C_\beta = 0, B_\beta = 0),$$

$$\nu(C_\beta = 0, C_\alpha = 0), \ \nu(A_\alpha = 0, A_\beta = 0),$$

$$\nu\left(A'_\alpha = B_\alpha + \frac{1}{\lambda_\beta} C_\alpha = 0, \ A'_\beta = B_\beta + \frac{1}{\lambda_\alpha} C_\beta = 0\right),$$

ainsi que tous les $\nu(\Sigma_{\rho,\alpha} = 0, \Sigma_{\rho,\beta} = 0)$, que l'on obtient en donnant à ρ successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, à l'exception de $\rho = \alpha$ et $\rho = \beta$, satisfont simultanément à une seule et même équation du $(2m)^{ième}$ degré

$$\Sigma_{\alpha,\beta} = 0.$$

Si les $B = 0$ et $C = 0$ sont des équations de surfaces ou de courbes de degré m, on obtient que la surface ou courbe du $(2m)^{ième}$ degré $\Sigma_{\alpha,\beta}$ passe à la fois par les intersections de B_α avec B_β, de B_α avec C_α, de C_β avec B_β, de C_β avec C_α, de A_α avec A_β, de A'_α avec A'_β, qui sont des surfaces ou courbes du $m^{ième}$ degré, et, en outre, par les intersections de tous les couples de surfaces ou courbes du $(2m)^{ième}$ degré $\Sigma_{\rho,}\ = 0$ et $\Sigma_{\rho,\beta} = 0$, que l'on obtient en donnant à ρ successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, à l'exception de $\rho = \alpha$ et $\rho = \beta$.

Ainsi, lorsque les $B = 0$ et $C = 0$ représentent des courbes de degré m, on trouve que les $(4n - 2)m^2$ points d'intersection auxquels donnent lieu les six couples de courbes du $m^{ième}$ degré et les $n - 2$ couples de courbes du $(2m)^{ieme}$ degré, sont tous sur une seule et même courbe du $(2m)^{ième}$ degré.

Si l'on remplace chacune des fonctions B par une seule et même fonction U, on obtient les théorèmes précédemment énoncés. (*Voir* le cahier de décembre 1854 du présent Journal, page 407.)

II.

Soient

$$\begin{array}{l} B_1,\ B_2, \ldots,\ B_n, \\ C_1,\ C_2, \ldots,\ C_n, \\ \ldots\ldots\ldots \\ R_1,\ R_2, \ldots,\ R_n, \end{array}$$

q séries de fonctions de p variables et de degré m, q étant un nombre pair.

Formons les fonctions de degré qm

$$\Sigma_{\alpha,\beta} = \lambda_\alpha . B_\beta . C_\alpha . D_\beta . E_\alpha \ldots Q_\beta . R_\alpha - \lambda_\beta . B_\alpha . C_\beta . D_\alpha . E_\beta \ldots Q_\alpha . R_\beta,$$

en donnant à α et β, successivement et indépendamment l'un de l'autre, les valeurs $1, 2, \ldots, n$, et en excluant les combinaisons $\alpha = \beta$.

La fonction $\Sigma_{\alpha,\beta}$ est la différence de deux produits que nous désignerons un instant par $\lambda_\alpha . \pi_{\alpha,\beta}$ et $\lambda_\beta . \pi_{\beta,\alpha}$. Divisons le produit $\pi_{\alpha,\beta}$ d'une façon quelconque en deux produits $\varphi_{\alpha,\beta}$ et $\psi_{\alpha,\beta}$, de telle sorte que

$$\Sigma_{\alpha,\beta} = \lambda_\alpha . \varphi_{\alpha,\beta} . \psi_{\alpha,\beta} - \lambda_\beta . \varphi_{\beta,\alpha} . \psi_{\beta,\alpha},$$

et formons les fonctions

$$\sigma_{\alpha,\beta} = \lambda_\alpha . \varphi_{\alpha,\beta} - \psi_{\beta,\alpha}, \quad \sigma_{\beta,\alpha} = \lambda_\beta . \varphi_{\beta,\alpha} - \psi_{\alpha,\beta}.$$

Nous obtiendrons ainsi : q fonctions $\sigma_{\alpha,\beta}$ de degré $(q-1)m$, telles que

$$\lambda_\alpha . B_\beta - C_\beta . D_\alpha . E_\beta \ldots Q_\alpha . R_\beta, \text{ etc.};$$

$\frac{q(q-1)}{1.2}$ fonctions $\sigma_{\alpha,\beta}$ de degré $(q-2)m$, telles que

$$\lambda_\alpha . B_\beta . C_\alpha - D_\alpha . E_\beta \ldots Q_\alpha . R_\beta, \text{ etc.},$$

et ainsi de suite; enfin, $\dfrac{q(q-1)\ldots\left(\frac{q}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{q}{2}}$ fonctions $\sigma_{\alpha,\beta}$ de degré $\frac{q}{2}m$, telles que

$$\lambda_\alpha . B_\beta . C_\alpha . D_\beta \ldots J_\alpha - K_\alpha . L_\beta M_\alpha \ldots R_\beta, \text{ etc.}$$

Il est évident que :

1°. $\nu(B_\beta = 0, B_\alpha = 0), \quad \nu(B_\beta = 0, C_\beta = 0), \ldots, \quad \nu(B_\beta = 0, R_\beta = 0),$

$\nu(C_\alpha = 0, B_\alpha = 0), \quad \nu(C_\alpha = 0, C_\beta = 0), \ldots, \quad \nu(C_\alpha = 0, R_\beta = 0),$

. . . .

$\nu(R_\alpha = 0, B_\alpha = 0), \quad \nu(R_\alpha = 0, C_\beta = 0), \ldots, \quad \nu(R_\alpha = 0, R_\beta = 0);$

2°. Tous les $\qquad \nu(\Sigma_{\rho,\alpha} = 0, \quad \Sigma_{\rho,\beta} = 0)$

que l'on obtient en donnant à ρ successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, à l'exception de $\rho = \alpha$ et $\rho = \beta$;

3°. Tous les $\qquad \nu(\sigma_{\alpha,\beta} = 0, \quad \sigma_{\beta,\alpha} = 0),$

satisfont simultanément à une seule et même équation du $(qm)^{ième}$ degré

$$\Sigma_{\alpha,\beta}=0.$$

Donc, pour parler seulement de courbes, on voit que les $(qm)^2$ points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons $(B_\beta=0, B_\alpha=0)$, etc., les $(n-2)(qm)^2$ points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons $(\Sigma_{\rho,\alpha}=0,\ \Sigma_{\rho,\beta}=0)$, et les

$$\left[q(q-1)^2+\frac{q(q-1)}{1.2}(q-2)^2+\ldots+\frac{q(q-1)\ldots\left(\frac{q}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{q}{2}}\left(\frac{q}{2}\right)^2\right]m^2$$

points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons

$$(\sigma_{\alpha,\beta}=0,\quad \sigma_{\beta,\alpha}=0),$$

sont tous sur une seule et même courbe du $(qm)^{ième}$ degré.