

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Valeur d'une intégrale définie qui se rattache aux intégrales trinômes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 20 (1855), p. 133-134.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__133_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Valeur d'une intégrale définie qui se rattache aux intégrales trinômes;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Voici la composition de cette intégrale définie. Posons

$$P = (1 + ax_1)(1 + ax_1 + ax_2) \dots (1 + ax_1 + ax_2 + \dots + ax_{n-1})$$

et

$$Q = x_1 x_2 \dots x_{n-1} (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}),$$

a désignant une constante, et $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ des variables en nombre $(n-1)$. Soit de plus

$$p = \frac{1-\mu}{n}, \quad q = \frac{\mu}{n} - 1,$$

μ étant une constante positive, ou du moins à partie réelle positive. Cela posé, l'intégrale dont je veux parler, et que je représenterai par U , est

$$U = \int \int \dots \int P^p Q^q dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1};$$

l'intégration s'étend à tous les systèmes de valeurs *positives* des variables $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ pour lesquels on a

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} < 1;$$

on pourra donc intégrer d'abord par rapport à x_{n-1} entre les limites

$$x_{n-1} = 0, \quad x_{n-1} = 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-2},$$

puis par rapport à x_{n-2} , entre les limites

$$x_{n-2} = 0, \quad x_{n-2} = 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-3},$$

et ainsi de suite, la dernière intégrale relative à x_1 étant prise de $x_1 = 0$ à $x_1 = 1$.

J'ai obtenu pour l'intégrale U la valeur suivante, où Γ désigne à l'ordinaire l'intégrale eulérienne de seconde espèce,

$$U = \frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n \left(\frac{\sqrt[n]{1+a-1}}{a}\right)^{\mu-1}.$$

En posant $a = 0$, on a $P = 1$; et l'équation

$$\int \int \dots \int Q^q dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n,$$

à laquelle on arrive alors, n'est qu'un cas très-particulier d'un résultat bien connu.

On aurait une seconde vérification facile et du même genre en supposant $\mu = 1$; mais cette fois encore a disparaîtrait.

Il restera si l'on prend $\mu = n$. On doit avoir alors

$$\int \int \dots \int P^{\frac{1-n}{n}} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} = \frac{n^{n-1}}{\Gamma(n)} \left(\frac{\sqrt[n]{1+a-1}}{a} \right)^{n-1};$$

or on peut aisément s'assurer qu'il en est ainsi en effectuant les intégrations qui sont ici très-faciles.

Si l'on pose $n = 2$, U n'est plus qu'une intégrale simple. Notre formule donne pour ce cas :

$$\int_0^1 (1+ax_1)^{\frac{1-\mu}{2}} [x_1(1-x_1)]^{\frac{\mu}{2}-1} dx_1 = \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{1+a-1}}{a} \right)^{\mu-1}.$$

Pour $n = 3$, l'intégrale U est double : notre formule devient

$$\begin{aligned} \int_0^1 x_1^{\frac{\mu}{3}-1} (1+ax_1)^{\frac{1-\mu}{3}} dx_1 \int_0^{1-x_1} (1+ax_1+ax_2)^{\frac{1-\mu}{3}} [x_2(1-x_1-x_2)]^{\frac{\mu}{3}-1} dx_2 \\ = \frac{3^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right)^3 \left(\frac{\sqrt[3]{1+a-1}}{a} \right)^{\mu-1}. \end{aligned}$$

Et ainsi de suite.

La formule pour U n'est pas la seule de cette espèce que l'on puisse trouver. L'emploi des différentielles à indices quelconques m'en a fait rencontrer beaucoup d'autres : les équations qu'on obtient d'abord contiennent même une fonction arbitraire. Mais la place me manque pour les écrire : je crois utile, d'ailleurs, de fixer un moment l'attention sur la formule particulière ci-dessus, qui me semble importante.

L'intégrale simple qui répond au cas de $n = 2$ est une intégrale trinôme. En m'occupant de ce genre d'intégrales, je suis arrivé à des résultats intéressants qui feront le sujet d'un autre article.