

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'équation différentielle $\frac{d.(x-x^3)\frac{dy}{dx}}{dx} - xy = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 19 (1854), p. 151-152.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19_151_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$\frac{d.(x-x^2)\frac{dy}{dx}}{dx} - xy = 0;$$

PAR J. LIOUVILLE.

C'est l'équation à laquelle conduit la fonction elliptique complète de première espèce; et comme cette équation ne change pas quand on y remplace x par $\sqrt{1-x^2}$, on en a de suite deux intégrales particulières, d'où l'on a conclu l'intégrale générale. Ces deux intégrales sont

$$y = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$$

et

$$y = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2+x^2t^2)}}.$$

Elles se présentent sous forme réelle quand x^2 est < 1 , comme on le suppose ordinairement. Mais si l'on prenait $x^2 > 1$, la première deviendrait imaginaire. Or j'observe qu'en y séparant la partie réelle de l'imaginaire, on est conduit alors aux deux intégrales que voici :

$$y = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$$

et

$$y = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(x^2t^2-1)}}.$$

Des quatre valeurs particulières de γ que je viens d'écrire, la dernière doit être supprimée comme rentrant dans la seconde, à laquelle on la réduit en faisant

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2(x^2 - 1)}};$$

mais la troisième donne une intégrale distincte, qui remplacera la première dans la composition de l'intégrale générale pour le cas de $x^2 > 1$: en posant $xt = \theta$, elle prend cette forme simple

$$\gamma = \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - \theta^2)(x^2 - \theta^2)}}.$$

Ainsi, A et B désignant deux constantes arbitraires, l'intégrale complète de notre équation différentielle est

$$\gamma = A \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - x^2 t^2)}} + B \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - t^2 + x^2 t^2)}},$$

pour $x^2 < 1$, et

$$\gamma = A \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(x^2 - t^2)}} + B \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - t^2 + x^2 t^2)}},$$

pour $x^2 > 1$.

