

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BESGE

**Addition à la note sur une transformation d'intégrales
définies, insérée dans le cahier de mars**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 18 (1853), p. 168.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1853_1_18__168_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Addition à la Note sur une transformation d'intégrales définies,
insérée dans le cahier de mars;*

PAR M. BESGE.

On m'a demandé la démonstration rigoureuse que je dis avoir de l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin 2u) \cos u \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 u) \cos u \, du$$

La voici en peu de mots. Dans l'intégrale placée au premier membre, je groupe les éléments relatifs aux valeurs de la variable à égale distance des deux limites, moyennant quoi cette intégrale devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi(\sin 2u) (\cos u + \sin u) \, du.$$

Puis je fais $\sin 2u = \cos^2 x$, d'où $\cos 2u \, du = -\sin x \cos x \, dx$; et j'observe que u variant de 0 à $\frac{\pi}{4}$, x varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0. Je trouve ainsi notre intégrale égale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 x) \frac{\sin x \cos x \, dx}{\cos 2u} (\cos u + \sin u).$$

Mais

$$(\cos u + \sin u)^2 = 1 + \sin 2u = 1 + \cos^2 x;$$

donc

$$\cos u + \sin u = \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

D'un autre côté

$$\cos 2u = \sqrt{1 - \cos^4 x} = \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

L'intégrale dont nous nous occupons est donc finalement égale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 x) \cos x \, dx:$$

ce qu'il fallait démontrer.