

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

EISENSTEIN

Extrait d'une lettre adressé à M. Charles Hermite

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 17 (1852), p. 473-477.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__473_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Extrait d'une Lettre adressée à M. CHARLES HERMITE,
par M. EISENSTEIN.*

Dans la communication que vous me faites sur les formes ternaires, etc., vous vous êtes extrêmement approché d'une théorie que j'ai imaginée pour la comparaison des formes de déterminants *quelconques différents*, et à laquelle je vous ai déjà fait une légère allusion lors de votre séjour à Berlin. Pour les formes binaires, on arrive par des transformations rationnelles toujours à des formes dont les déterminants sont en raison de *nombres carrés*, mais vous verrez bientôt que la chose est toute différente pour les formes ternaires et pour toutes celles d'un nombre impair d'indéterminées. Soit proposée, par exemple, la forme

$$x^2 + y^2 + z^2;$$

D étant un entier quelconque, elle se change par une substitution S de déterminant D², en général, dans une forme de déterminant D⁴; mais si l'on ajoute la condition que tous les coefficients de la forme transformée soient divisibles par D, on obtient DF, la forme F ayant le nombre D pour déterminant. Cette forme est alors exprimée ainsi :

$F = \frac{1}{D} [(ax + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2],$
le système linéaire

$$S = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix},$$

étant assujetti à la condition que tous les coefficients de F soient des entiers.

La question principale est maintenant celle-ci : Quelles sont ces formes F de déterminant D qui naissent de la forme très-simple

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{D} & \frac{1}{D} & \frac{1}{D} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et pour chacune quelles sont les substitutions différentes?

Je trouve qu'en général toutes ces formes F appartiennent à des genres déterminés, et que, réciproquement, toutes les formes de ces genres ont la propriété dont il s'agit; pour le nombre des transformations il y a des théorèmes très-simples. Pour abréger, je suppose $D = pp'p'' \dots$ égal au produit de plusieurs nombres premiers inégaux, deux excepté. On a, dans ce cas, les théorèmes qui suivent. Nommions deux systèmes S et T équivalents à droite si l'on a une relation de la forme $S = T \times E$, et équivalents à gauche si ces systèmes sont liés par une relation de la forme $S = E \times T$, le signe $\times$ dénotant la composition des systèmes, et E étant un système quelconque de déterminant 1. Il faut bien distinguer ces deux notions d'équivalence pour les systèmes linéaires, c'est-à-dire pour les substitutions ou transformations; au reste, il existe quelque chose d'analogue pour les formes simultanées de degrés supérieurs. Cela posé, j'espère que vous donnerez votre approbation aux théorèmes suivants :

1. Toute forme

$$F = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

de déterminant $D = pp'p'' \dots$ et à coefficients entiers qui se tire de la forme

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{D}, & \frac{1}{D}, & \frac{1}{D} \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

par une transformation de déterminant D^2 , a la propriété que l'un des trois nombres $b^2 - a'a''$, $b'^2 - aa''$, $b''^2 - aa'$ est résidu quadratique de D ; plus généralement $\Phi RD[*]$, Φ étant la forme adjointe de F , savoir,

$$\Phi = \begin{pmatrix} b^2 - a'a'', & b'^2 - aa'', & b''^2 - aa' \\ ab - bb'', & a'b' - bb'', & a''b'' - bb' \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que cette forme réunit les caractères ΦRp , $\Phi Rp'$, $\Phi Rp''$,

[*] D'après la notation de M. Gauss, pour exprimer que la forme Φ est résidu quadratique du nombre D .

et que tout nombre représentable par Φ et premier à p est résidu quadratique de p , que tout nombre représentable par Φ et premier à p' est résidu quadratique de p' , etc. Remarquez que Φ est une forme négative, et ainsi

$$-\Phi = \begin{pmatrix} a'a'' - b^2, \dots \\ \dots \dots \dots \end{pmatrix}$$

une forme positive.

2. Cette condition est nécessaire, mais elle est aussi *suffisante*, et dans le genre auquel conviennent les caractères $\Phi R p$, $\Phi R p'$, $\Phi R p''$, etc. (genre principal si vous voulez), toute forme est renfermée dans G; ainsi *toutes les formes non équivalentes de ce genre se dérivent de la même source*.

3. La forme F étant une quelconque de ce genre, le nombre N total des transformations de G en F est $= 24 \cdot 2^\mu$, μ étant le nombre des facteurs premiers $p, p', p'', \dots$, de D. Il est très-remarquable que ce nombre $24 \cdot 2^\mu$ est parfaitement indépendant de la classe individuelle à laquelle la forme F appartient, et toujours la même pour toutes les classes du genre entier. Le nombre des *substitutions non équivalentes à droite* ne monte qu'à $\frac{24 \cdot 2^\mu}{\delta}$ [*], δ se rapportant à F, car toutes ces N transformations de G en F se divisent naturellement en un nombre de groupes dont chacun contient δ substitutions équivalentes à droite, et qui se dérivent les unes des autres par la composition avec les transformations de F en elle-même dont le nombre est δ . Pour arriver à ces résultats, je m'occupe d'abord du problème d'assigner toutes les classes de substitutions (ou, si vous voulez, toutes les substitutions réduites) de déterminant D^2 par lesquelles la forme adjointe Φ d'une forme définie positive de déterminant D, se change en une forme divisible par D^2 (le quotient de la division sera une forme quelconque de déterminant 1 et ainsi équivalente à

[*] La quantité δ désigne, dans les travaux de M. Eisenstein, le nombre des transformations par lesquelles une forme quadratique ternaire se change en elle-même.

$x^2 + y^2 + z^2$). Je trouve le nombre de ces classes de substitutions par lesquelles Φ devient divisible par D^2 , sans la moindre difficulté égal à 2^μ , supposé que la condition ΦRD soit remplie, autrement le problème n'a point de solution. Or vous verrez que le nombre des substitutions non équivalentes à gauche de G en F est le même que celui de ces classes de substitutions, c'est-à-dire égal à 2^μ (pour voir cela, pensez à la transposition des systèmes); enfin, on déduit de là le nombre total $24 \cdot 2^\mu$ des transformations de G en F , 24 étant le nombre des transformations de G en elle-même qu'il faut composer avec les 2^μ substitutions déjà trouvées. Dans ces recherches, il faut toujours bien distinguer l'ordre de la composition des substitutions.

4. $F, F', F'', \dots$ étant le système complet des formes non équivalentes de déterminant D et du genre dont il s'agit, et $\delta, \delta', \delta'', \dots$ étant les nombres de transformations en elles-mêmes, bien connus pour ces différentes formes respectivement, on obtient d'après le n° 3 pour le nombre des substitutions non équivalentes à droite, de G en F , de G en F' , etc., respectivement $\frac{24 \cdot 2^\mu}{\delta}, \frac{24 \cdot 2^\mu}{\delta'}, \frac{24 \cdot 2^\mu}{\delta''}, \dots$, ces substitutions étant réparties en raison de la densité [*].

Il suit de là que le nombre total de toutes les substitutions non équivalentes à droite, par lesquelles G se change dans une *quelconque* des formes $F, F', F'', \dots$, monte à

$$\frac{24 \cdot 2^\mu}{\delta} + \frac{24 \cdot 2^\mu}{\delta'} + \frac{24 \cdot 2^\mu}{\delta''} + \dots = 24 \cdot 2^\mu \sum \frac{1}{\delta}.$$

C'est donc aussi le nombre total des substitutions non équivalentes à droite par lesquelles la forme

$$x^2 + y^2 + z^2$$

se change en une forme divisible par D .

5. On peut, d'un autre côté, trouver ces substitutions par un procédé bien différent, en cherchant directement toutes les classes de

[*] Cette notion nouvelle et importante d'arithmétique transcendante se trouve exposée dans le Mémoire intitulé : *Neue theoreme der hoherer arithmetik*. CH. H.

substitutions

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix}$$

(toutes les substitutions réduites de déterminant D^2), qui satisfont à la congruence

$$\begin{aligned} & (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 \\ & + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2 \equiv 0 \pmod{D}, \end{aligned}$$

qu'il faut résoudre indépendamment de x, y, z ; je trouve le nombre des substitutions essentiellement différentes, c'est-à-dire des systèmes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, non équivalents à droite (ou réduits) égal à

$$(p+1)(p'+1)(p''+1)\dots$$

6. Des nos 5 et 4 comparés, on tire ce résultat remarquable,

$$24 \cdot 2^\mu \sum \frac{1}{\delta} = (p+1)(p'+1)(p''+1)\dots,$$

donc

$$\sum \frac{1}{\delta} = \frac{1}{24 \cdot 2^\mu} (p+1)(p'+1)(p''+1)\dots$$

Voilà la démonstration d'un de mes théorèmes sur la quantité $\sum \frac{1}{\delta} [^*]$, du moins pour le genre dont les caractères sont $\Phi R p$, $\Phi R p'$, $\Phi R p''$, etc.

7. Je fais une application de ce dernier résultat à la théorie des formes quaternaires, en démontrant que le nombre des représentations de D par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2$$

est égal à

$$8 \cdot 24 \cdot 2^\mu \sum \frac{1}{\delta} = 8(p+1)(p'+1)(p''+1)\dots,$$

comme le trouve aussi M. Jacobi par la théorie des fonctions elliptiques.

[*] Voir le Mémoire cité plus haut. Journal de M. Crelle, tome XXXV. CH. H.