JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TCHEBICHEF

**Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 17 (1852), p. 341-365.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__341_0>

SUR

# LA TOTALITÉ DES NOMBRES PREMIERS

## INFÉRIEURS A UNE LIMITE DONNÉE;

**PAR M. TCHEBICHEF.**

(Présenté à l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg, en 1848.)

### § I^er.

Legendre, dans sa *Théorie des Nombres* [*], propose une formule pour déterminer combien il y a de nombres premiers depuis 1 jusqu'à une limite donnée très-grande. Il commence par comparer sa formule avec l'énumération immédiate des nombres premiers faite dans les Tables les plus étendues, nommément depuis 10 000 jusqu'à 1 000 000, et l'applique ensuite à la solution de plusieurs questions. Plus tard, cette même formule a donné lieu à des recherches de M. Lejeune-Dirichlet qui, dans un de ses Mémoires, contenu dans le tome XVIII du Journal de Crelle, annonce avoir traité les questions de ce genre par une méthode analytique rigoureuse. En attendant la publication du travail encore inédit de cet illustre géomètre, nous allons donner ici les résultats des recherches que nous avons nous-même entreprises sur ce sujet curieux.

### § II.

THÉORÈME I. *Si l'on représente par* $\varphi(x)$ *la totalité des nombres premiers inférieurs à* $x$, *par* $n$ *un entier quelconque, enfin par* $\rho$ *une*

[*] Tome II, page 65, troisième édition.

*quantité* $> 0$, *la somme*

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\frac{1}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

*jouira de la propriété de s'approcher d'une limite finie, à mesure que* $\rho$ *converge vers zéro.*

*Démonstration.* Commençons par démontrer que la propriété en question a lieu pour les fonctions que l'on obtient par la différentiation successive des trois expressions

$$\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho},\quad \log\rho-\sum\left(1-\frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right),$$
$$\sum\log\left(1-\frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right)+\sum\frac{1}{\mu^{1+\rho}},$$

par rapport à $\rho$; ici, comme par la suite, la sommation par rapport à $m$ s'étend à tous les entiers depuis $m=2$ jusqu'à $m=\infty$, et par rapport à $\mu$ seulement aux nombres premiers, également depuis $\mu=2$ jusqu'à $\mu=\infty$.

Considérons la première expression. Il est facile de voir que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^x-1}\,x^\rho\,dx=\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}\cdot\int_0^\infty e^{-x}x^\rho\,dx,$$
$$\int_0^\infty e^{-x}x^{-1+\rho}\,dx=\frac{1}{\rho}\int_0^\infty e^{-x}x^\rho\,dx,$$

et, par conséquent,

$$\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho}=\frac{\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}x^\rho\,dx}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^\rho\,dx}.$$

En vertu de cette équation, la dérivée d'un ordre quelconque $n$ de $\sum\frac{1}{m^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho}$ par rapport à $\rho$ sera égale à une fraction dont le dénominateur est $\left[\int_0^\infty e^{-x}x^\rho\,dx\right]^{n+1}$ et le numérateur une fonction entière des expressions

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, x^\rho\, dx\,,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, x^\rho \log x\, dx\,,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, x^\rho \log^2 x\, dx\,,\ldots,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, x^\rho \log^n x\, dx\,,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^\rho\, dx\,,\quad \int_0^\infty e^{-x}\, x^\rho \log x\, dx\,,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^\rho \log^2 x\, dx,\ldots,\quad \int_0^\infty e^{-x}\, x^\rho \log^n x\, dx.$$

Or une telle fraction, pour $n = 0$ aussi bien que pour $n > 0$, s'approche d'une limite finie à mesure que $\rho$ converge vers zéro; car la limite de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^\rho\, dx$$

pour $\rho = 0$ est $1$, et les intégrales

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, x^\rho\, dx\,,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, x^\rho \log x\, dx\,,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, x^\rho \log^2 x\, dx\,,\ldots,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, x^\rho \log^n x\, dx\,,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^\rho \log x\, dx\,,\quad \int_0^\infty e^{-x}\, x^\rho \log^2 x\, dx\,,\ldots,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^\rho \log^n x\, dx$$

pour $\rho = 0$ conservent évidemment des valeurs finies.

Ainsi, il est certain que la fonction $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$, aussi bien que ses dérivées successives, resteront finies à mesure que $\rho$ convergera vers la limite zéro.

Considérons actuellement la fonction

$$\log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right).$$

On sait que

$$\left[\left(1 - \frac{1}{2^{1+\rho}}\right)\left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}}\right)\left(1 - \frac{1}{5^{1+\rho}}\right)\cdots\right]^{-1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2^{1+\rho}} + \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{4^{1+\rho}} + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$-\log\left(1 - \frac{1}{2^{1+\rho}}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{5^{1+\rho}}\right) - \ldots$$
$$= \log\left(1 + \frac{1}{2^{1+\rho}} + \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{4^{1+\rho}} + \ldots\right),$$

équation qui, d'après la notation admise plus haut, peut être écrite de cette manière,

$$-\sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) = \log\left(1 + \sum \frac{1}{m^{1+\rho}}\right).$$

Donc

$$\log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) = \log\left(1 + \sum \frac{1}{m^{1+\rho}}\right)\rho,$$

ou bien

$$\log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) = \log\left[1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}\right)\rho\right].$$

Cette équation fait voir que toutes les dérivées de

$$\log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right),$$

suivant $\rho$, s'exprimeront au moyen d'un nombre fini de fractions, dont les dénominateurs seront des puissances entières et positives de

$$1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}\right)\rho,$$

et les numérateurs des fonctions entières de $\rho$, de l'expression

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$$

et de ses dérivées par rapport à $\rho$. Or de telles fractions s'approcheront d'une limite finie à mesure que $\rho$ convergera vers zéro; car l'expression

$$1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}\right)\rho,$$

qui entre dans les dénominateurs de ces fractions, tendra vers la limite 1 à mesure que $\rho$ s'approchera de zéro, et cela parce que la différence $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$, dans cette hypothèse, reste finie comme nous l'avons démontré plus haut. Quant à ce qui concerne les numérateurs, comme ils ne contiennent la différence $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$ et ses dérivées que sous forme entière, et que ces fonctions tendent vers une limite finie quand $\rho$ converge vers zéro, il en sera de même pour ses numérateurs.

Il nous reste encore à démontrer que la même propriété a lieu relativement aux dérivées de la fonction

$$\sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}}.$$

Nous remarquerons d'abord que sa première dérivée sera

$$\sum \frac{1}{\mu^{2+2\rho}} \cdot \frac{\log \mu}{1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}}.$$

Il est facile de voir par la forme de cette fonction que les dérivées des ordres supérieurs s'exprimeront également au moyen d'un nombre fini de termes tels que

$$\sum \frac{1}{\mu^{2+2\rho}} \cdot \frac{\log^p \mu}{1-\frac{1}{\mu^{1+\rho}}} \cdot \frac{1}{\mu^{q+q\rho}\left(1-\frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right)^r},$$

$p, q, r$ n'étant pas inférieurs à zéro. Mais chaque terme de cette nature, pour des valeurs de $\rho$ non inférieures à zéro, a une valeur finie; en effet, pour $\rho = 0$ et $\rho > 0$, la fonction sous le signe $\sum$ sera une quantité infiniment petite d'un ordre non inférieur au second par rapport à $\frac{1}{\mu}$.

Après nous être convaincu que les dérivées des trois expressions

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}, \quad \log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right).$$

$$\sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}},$$

pour des valeurs de $\rho$ convergentes vers zéro, tendent vers une limite finie, nous concluons que la même propriété aura également lieu par rapport à l'expression

$$\frac{d^n\left[\sum \log\left(1-\frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right]}{d\rho^n} + \frac{d^n\left[\log \rho - \sum \log\left(1-\frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right)\right]}{d\rho^n}$$

$$+ \frac{d^{n-1}\left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}\right)}{d\rho^{n-1}},$$

laquelle, après les différentiations effectuées, se réduira à

$$\pm \left(\sum \frac{\log^n \mu}{\mu^{1+\rho}} - \sum \frac{\log^{n-1} m}{m^{1+\rho}}\right).$$

Ce qui vient d'être dit renferme le théorème énoncé plus haut, car il est facile de remarquer que, d'après notre notation, la différence

$$\sum \frac{\log^n \mu}{\mu^{1+\rho}} - \sum \frac{\log^{n-1} m}{m^{1+\rho}}$$

est identique avec l'expression

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi x-\frac{1}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

ou bien, ce qui revient au même, avec

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}-\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log^{n-1} x}{x^{1+\rho}}.$$

Pour le faire voir, il n'y a qu'à observer que le premier terme de cette différence est simplement égal à $\sum\frac{\log^n \mu}{\mu^{1+\rho}}$, parce que le facteur $\varphi(x+1)-\varphi(x)$ de $\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$ se réduit, par la définition même de la fonction $\varphi$, à 1 ou à 0, suivant que $x$ est un nombre premier ou un nombre composé. Quant au second terme $\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log^{n-1} x}{x^{1+\rho}}$, il se transforme évidemment en $\sum\frac{\log^{n-1} m}{m^{1+\rho}}$ par le changement de $x$ en $m$.

De cette manière, la proposition que nous avions en vue de démontrer se trouve complétement établie.

## § III.

Le théorème dont on vient de donner la démonstration conduit à plusieurs propriétés curieuses de la fonction qui détermine combien il y a de nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Et, d'abord, observons que la différence

$$\frac{1}{\log x}-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x},$$

pour $x$ très-grand, est une quantité infiniment petite du premier ordre par rapport à $\frac{1}{x}$; par conséquent, l'expression

$$\left(\frac{1}{\log x}-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

pour $x$ très-grand, sera de l'ordre $2+\rho$ relativement à $\frac{1}{x}$: d'après cela, la somme

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left(\frac{1}{\log x}-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

pour des valeurs de $\rho$ non inférieures à zéro, restera finie. Ajoutant cette somme à l'expression

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\frac{1}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

pour laquelle le théorème I a lieu, nous concluons que la valeur de

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

restera finie à mesure que $\rho$ convergera vers la limite zéro. De là on tire le théorème suivant :

THÉORÈME II. *La fonction $\varphi(x)$, qui désigne combien il y a de nombres premiers inférieurs à $x$, satisfera, entre les limites $x=2$ et $x=\infty$, une infinité de fois aux deux inégalités*

$$\varphi(x)>\int_2^x\frac{dx}{\log x}-\frac{\alpha x}{\log^n x}\quad\text{et}\quad\varphi(x)<\int_2^x\frac{dx}{\log x}+\frac{\alpha x}{\log^n x},$$

*quelque petite que soit la valeur de $\alpha$, supposée positive, et quelque grand que soit en même temps le nombre $n$.*

*Démonstration.* Nous nous contenterons de démontrer l'une de ces deux inégalités, parce que l'autre s'établira tout à fait de la même manière. Choisissons, par exemple, la suivante:

$$(1)\qquad \varphi(x)<\int_2^x\frac{dx}{\log x}+\frac{\alpha x}{\log^n x}.$$

Pour prouver que cette inégalité est satisfaite une infinité de fois, admettons d'abord que le contraire ait lieu, et voyons quelles seront les conséquences de cette hypothèse. Soit $a$ un entier supérieur à $e^n$

et supérieur en même temps au plus grand nombre qui satisfait à l'inégalité (1). Dans cette supposition, on aura pour $x > a$ l'inégalité

$$\varphi(x) \geqq \int^{x} \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad \log x > n,$$

et, par conséquent,

$$\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \geqq \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad \frac{n}{\log x} < 1. \tag{2}$$

Or, si l'on admettait les inégalités (2), il en résulterait, contrairement à ce qui a été démontré plus haut, que l'expression

$$\sum_{x=2}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

au lieu de converger vers une limite finie pour des valeurs très petites de $\rho$, s'approcherait de la limite $+\infty$. En effet, nous pouvons considérer cette expression comme la limite de

$$\sum_{x=2}^{x=s} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

pour $s = \infty$. Supposant donc $s > a$, cette quantité peut être mise sous la forme

$$C + \sum_{x=a+1}^{x=s} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}, \tag{3}$$

en faisant, pour abréger,

$$C = \sum_{x=2}^{x=a} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

et observant que C désignera une quantité finie pour $\rho = 0$ et $\rho > 0$.

Or l'expression (3), en vertu de la formule connue

$$\sum_{a+1}^{s} u_x (v_{x+1} - v_x) = u_s v_{s+1} - u_a v_{a+1} - \sum_{a+1}^{s} v_x (u_x - u_{x-1}),$$

et après avoir fait

$$v_x = \varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}, \quad u_x = \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

se transformera dans la suivante :

$$\mathrm{C} - \left[\varphi(a+1) - \int_2^{a+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n a}{a^{1+\rho}} + \left[\varphi(s+1) - \int_2^{s+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n s}{s^{1+\rho}}$$
$$- \sum_{x=a+1}^{x=s} \left[\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right] \left[\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}} - \frac{\log^n(x-1)}{(x-1)^{1+\rho}}\right],$$

qui, à son tour, en faisant $\theta > 0$ et $< 1$, pourra s'écrire comme il suit :

$$\mathrm{C} - \left[\varphi(a+1) - \int_2^{a+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n a}{a^{1+\rho}} + \left[\varphi(s+1) - \int_2^{s+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n s}{s^{1+\rho}}$$
$$+ \sum_{x=a+1}^{x=s} \left[\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right] \left[1 + \rho - \frac{n}{\log(x-\theta)}\right] \frac{\log^n(x-\theta)}{(x-\theta)^{2+\rho}}.$$

Si l'on représente par F la somme des deux premiers termes de cette expression, et si l'on observe de plus que le troisième est positif en vertu de la condition (2), on sera en droit de conclure que l'expression précédente a une valeur supérieure à

$$\mathrm{F} + \sum_{x=a+1}^{x=s} \left[\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right] \left[1 + \rho - \frac{n}{\log(x-\theta)}\right] \frac{\log^n(x-\theta)}{(x-\theta)^{2+\rho}}.$$

Les mêmes conditions (2) font voir que, dans cette expression, la fonction sous le signe $\sum$ conservera une valeur positive entre les limites. En outre on aura, entre les limites de la sommation.

1°. $$1 + \rho - \frac{n}{\log(x-\theta)} > 1 - \frac{n}{\log x};$$

car

$$\rho > 0, \quad \theta > 0;$$

2°. $$\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} > \alpha \cdot \frac{x-\theta}{\log^n(x-\theta)};$$

car

$$\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \overset{=}{>} \frac{\alpha x}{\log^n x}$$

en vertu de la première des inégalités (2), et en vertu de la seconde. la dérivée de $\frac{\alpha x}{\log^n x}$, égale à $\frac{\alpha}{\log^n x}\left(1 - \frac{n}{\log x}\right)$, est positive, ce qui donne

$$\frac{\alpha x}{\log^n x} > \frac{\alpha(x-\theta)}{\log^n(x-\theta)}.$$

Donc l'expression précédente surpasse la somme

$$F + \sum_{x=a+1}^{x=s} \frac{\alpha(x-\theta)}{\log^n(x-\theta)}\left(1 - \frac{n}{\log a}\right)\frac{\log^n(x-\theta)}{(x-\theta)^{2+\rho}},$$

qui, après les réductions, devient

$$F + \alpha\left(1 - \frac{n}{\log a}\right)\sum_{x=a+1}^{x=s} \frac{1}{(x-\theta)^{1+\rho}};$$

or cette dernière expression est évidemment supérieure à

$$F + \alpha\left(1 - \frac{n}{\log a}\right)\sum_{x=a+1}^{x=s} \frac{1}{x^{1+\rho}};$$

laquelle, pour $s = \infty$, se réduit à

$$F + \alpha\left(1 - \frac{n}{\log a}\right)\sum_{x=a+1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{1+\rho}} = F + \alpha\left(1 - \frac{n}{\log a}\right)\frac{\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{e^x - 1} x^\rho \, dx}{\int_0^\infty e^{-x} x^\rho \, dx}.$$

Il est facile de faire voir que la quantité à laquelle nous sommes parvenu converge vers la limite $+\infty$ pour $\rho = 0$. En effet, on a d'abord

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{e^x - 1} dx = +\infty, \quad \int_0^\infty e^{-x} dx = 1;$$

de plus, $\alpha$ et $1 - \frac{n}{\log a}$ sont toutes deux des quantités positives, la première par hypothèse, et la seconde en vertu de la dernière inégalité (2).

Nous étant assuré de cette manière que, dans l'hypothèse admise, non-seulement la somme

$$\sum_{x=a}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

mais aussi une quantité plus petite qu'elle se réduit à $+\infty$, nous sommes en droit de conclure que l'hypothèse en question est inadmissible; d'où découle de suite la légitimité du théorème II.

## § IV.

Il sera facile actuellement, en vertu de la proposition précédente, de démontrer le théorème qui suit :

Théorème III. *L'expression* $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$, *pour* $x = \infty$, *ne peut avoir une limite différente de* $-1$.

*Démonstration.* Soit L la limite de la différence $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ pour $x = \infty$. Dans cette hypothèse, on pourra toujours trouver un nombre N tellement grand, que pour $x > N$ la valeur de $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ sera comprise entre les limites $L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$, $\varepsilon$ étant aussi petite qu'on voudra. Ainsi, pour de semblables valeurs de $x$, et lorsque $\varepsilon > 0$, on aura

$$(4) \qquad \frac{x}{\varphi(x)} - \log x > L - \varepsilon, \quad \frac{x}{\varphi(x)} - \log x < L + \varepsilon.$$

Mais, en vertu du théorème précédent, les inégalités

$$\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad \varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x},$$

sont satisfaites par une infinité de valeurs de $x$, et, par conséquent aussi, par des valeurs de $x$ supérieures à N, pour lesquelles les inégalités (4) ont lieu. Or ces inégalités, combinées avec celles que nous venons d'écrire, conduisent à

$$\frac{x}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}} - \log x > \mathrm{L} - \varepsilon,$$

$$\frac{x}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}} - \log x < \mathrm{L} + \varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{L} + 1 < \frac{x - (\log x - 1)\left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}\right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}} + \varepsilon,$$

$$\mathrm{L} + 1 > \frac{x - (\log x - 1)\left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}\right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}} - \varepsilon.$$

On voit, par ces inégalités, que la valeur numérique de $\mathrm{L}+1$ ne surpasse pas celle de l'une des expressions qui en forment les seconds membres. De plus, comme $\varepsilon$ peut devenir aussi petite qu'on voudra dans l'hypothèse de N très-grand, on peut en dire autant de chacune des quantités

$$\frac{x - (\log x - 1)\left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{\alpha x}{\log^n x}\right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{\alpha x}{\log^n x}} \pm \varepsilon;$$

car, pour $x = \infty$, on trouve, par les principes du calcul différentiel, que leur limite commune est zéro. Nous étant ainsi convaincu que les limites de la valeur numérique de $\mathrm{L}+1$ peuvent être diminuées à volonté, nous sommes en droit de conclure que

$$\mathrm{L} + 1 = 0,$$

et, par conséquent,

$$L = -1,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Ce que nous venons de prouver relativement à la limite de la valeur de $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$, pour $x = \infty$, ne s'accorde pas avec une formule donnée par Legendre pour déterminer approximativement combien il y a de nombres premiers inférieurs à une limite donnée. D'après lui, la fonction $\varphi(x)$, pour $x$ très-grand, est exprimée avec une approximation suffisante par la formule

$$\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1,08366},$$

qui donne, pour la limite de $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$, le nombre $-1,08366$, au lieu de $-1$.

## § V.

En partant du théorème II, on peut déterminer la limite supérieure du degré de précision avec lequel la fonction, désignée par $\varphi(x)$, peut être remplacée par toute autre fonction donnée $f(x)$. Dans ce qui va suivre, nous comparerons la différence $f(x) - \varphi(x)$ avec les expressions

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log^2 x}, \quad \frac{x}{\log^3 x}, \ldots,$$

et, pour abréger le discours, nous dirons que A est *une quantité de l'ordre* $\frac{x}{\log^n x}$, quand le rapport de A à $\frac{x}{\log^m x}$, pour $x = \infty$, sera *infini* pour $m > n$, et *zéro* pour $m < n$. Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème IV. *Quand l'expression*

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right],$$

*pour* $x = \infty$, *a pour limite une quantité finie ou infinie, la fonction*

*$(x)$ ne peut représenter $\varphi(x)$ exactement en quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ inclusivement.*

*Démonstration.* Soit L la limite vers laquelle converge l'expression

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right]$$

à mesure que $x$ s'approche de l'infini. Comme L, par hypothèse, est différente de zéro, elle ne pourra être égale qu'à une quantité positive ou négative. Supposons-la positive; notre raisonnement s'appliquera sans difficulté au cas de $\mathrm{L} < 0$.

Si la limite L de l'expression que nous considérons, pour $x = \infty$, est supérieure à zéro, nous pourrons trouver un nombre N assez grand et tel que, pour $x > \mathrm{N}$, la valeur de l'expression

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right]$$

reste constamment supérieure à une certaine quantité positive $l$. Nous aurons donc, pour $x > \mathrm{N}$,

$$(5) \qquad \frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right] > l.$$

Mais, en vertu du théorème II, quelque petit que soit $\alpha = \frac{l}{2}$, nous aurons, pour un nombre infini de valeurs de $x$, l'inégalité

$$(6) \qquad \varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x},$$

qui donne

$$f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} < f(x) - \varphi(x) + \frac{\alpha x}{\log^n x};$$

en la multipliant par $\frac{\log^n x}{x}$, et observant que $\alpha = \frac{l}{2}$, on trouve

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right] < \frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \varphi(x)\right] + \frac{l}{2},$$

ou bien, en vertu de l'inégalité (5),

$$\frac{\log^n x}{x}[f(x) - \varphi(x)] > \frac{l}{2}.$$

Or cette inégalité, ayant lieu en même temps que celles marquées par les numéros (5) et (6) pour une infinité de valeurs de $x$, prouve, à cause de $\frac{l}{2} > 0$, que la limite de

$$\frac{\log^n x}{x}[f(x) - \varphi(x)],$$

pour $x = \infty$, ne peut pas être égale à zéro. Si donc cette limite est différente de zéro, la différence $f(x) - \varphi(x)$, d'après la convention établie plus haut, est une quantité de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ ou d'un ordre inférieur; par conséquent, $f(x)$ diffère de $\varphi(x)$ d'une quantité de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$, ou bien d'un ordre inférieur; ce qu'il s'agissait de démontrer.

En nous basant sur ce théorème, nous pouvons faire voir que la formule de Legendre $\frac{x}{\log x - 1{,}08366}$, par laquelle la limite de l'expression

$$\frac{\log^2 x}{x}\left(\frac{x}{\log x - 1{,}08366} - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right),$$

quand $x = \infty$, est égale à $0{,}08366$, ne peut exprimer $\varphi(x)$ avec un degré de précision allant jusqu'aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^2 x}$ inclusivement.

On trouve avec la même facilité les valeurs des constantes A et B telles, que la fonction $\frac{x}{A\log x + B}$ puisse représenter $\varphi(x)$ avec une précision poussée aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^2 x}$ inclusivement. En vertu du théorème précédent, de telles valeurs de A et de B doivent satisfaire à l'équation

$$\lim\left[\frac{\log^2 x}{x}\left(\frac{x}{A\log x + B} - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right)\right]_{x=\infty} = 0.$$

Le développement de $\frac{x}{A\log x + B}$ donne

$$\frac{x}{A\log x + B} = \frac{1}{A}\cdot\frac{x}{\log x} - \frac{B}{A^2}\cdot\frac{x}{\log^2 x} + \frac{B^2}{A^3}\cdot\frac{x}{\log^3 x} - \ldots.$$

De plus, intégrant $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ par parties, on trouve

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x} = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + 2\int_2^x \frac{dx}{\log^3 x} + C.$$

En vertu de ce qui vient d'être trouvé, l'équation précédente se réduit à

$$\lim\left\{\frac{\log^2 x}{x}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{A}\cdot\frac{x}{\log x} - \frac{B}{A^2}\cdot\frac{x}{\log^2 x} + \frac{B^2}{A^3}\cdot\frac{x}{\log^3 x} - \ldots\\ - \frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x} - 2\int_2^x \frac{dx}{\log^3 x} - C\end{array}\right\}\right\}_{x=\infty} = 0,$$

ou bien

$$\lim\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{A} - 1\right)\log x - \left(\frac{B}{A^2} + 1\right) + \frac{B^2}{A^3}\cdot\frac{1}{\log x} - \ldots\\ - 2\frac{\log^2 x}{x}\int_2^x \frac{dx}{\log^3 x} - C\frac{\log^2 x}{x}\end{array}\right\}_{x=\infty} = 0.$$

Or, si l'on observe que tous les termes à partir du troisième convergent vers zéro pour des valeurs croissantes de $x$, on verra immédiatement qu'on ne peut satisfaire à l'équation précédente qu'en faisant

$$\frac{1}{A} - 1 = 0, \quad \frac{B}{A^2} + 1 = 0,$$

d'où

$$A = 1, \quad B = -1.$$

Ainsi, de toutes les fonctions de la forme $\frac{x}{A\log x + B}$, la seule $\frac{x}{\log x - 1}$ peut exprimer $\varphi(x)$ avec une précision poussée aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^2 x}$ inclusivement.

## § VI.

Démontrons actuellement un théorème concernant le choix de la fonction qui détermine, avec un degré de précision requis, la fonction que nous avons représentée par $\varphi(x)$.

THÉORÈME V. *Si la fonction $\varphi(x)$, qui désigne combien il y a de nombres premiers inférieurs à $x$, peut être représentée algébriquement avec une précision poussée aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ inclusivement au moyen des fonctions $x$, $\log x$, $e^x$, alors elle s'exprimera par la formule*

$$\frac{x}{\log x} + \frac{1 \cdot x}{\log^2 x} + \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\log^3 x} + \ldots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) x}{\log^n x}.$$

*Démonstration.* Soit $f(x)$ la fonction qui, contenant sous forme algébrique $x$, $\log x$, $e^x$, exprime $\varphi(x)$ exactement jusqu'aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ inclusivement; l'expression

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{1 \cdot x}{\log^2 x} - \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\log^3 x} - \ldots - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) x}{\log^n x}\right]$$

pour des valeurs croissantes de $x$, devra converger soit vers zéro, soit vers une limite finie ou infiniment grande. En effet, s'il n'en était pas ainsi, la première dérivée de cette expression changerait de signe une infinité de fois pour des valeurs de $x$ croissantes jusqu'à $+\infty$, ce qui ne peut arriver, comme il est facile de s'en assurer, avec une fonction algébrique de $x$, $\log x$, $e^x$ [*].

---

[*] Il est très-facile de s'assurer qu'une fonction algébrique de $x$, $\log x$, $e^x$ cesse de changer de signe pour une valeur de $x$ surpassant une certaine limite. Si la fonction dont il s'agit est entière, alors son signe dépendra d'un terme de la forme

$$K x^{m'} \cdot \log^{m''} x \cdot e^{m'''x}$$

pour des valeurs de $x$ plus ou moins considérables, ce terme ne changeant pas de signe pour $x < 1$. Pour toute autre fonction algébrique de $x$, $\log x$, $e^x$, que nous représenterons par $y$, on démontrera la même proposition de la manière suivante. Ob-

Ainsi, on aura nécessairement pour $f(x)$

$$(7)\quad \lim\left\{\frac{\log^n x}{x}\left[\begin{array}{l} f(x)-\dfrac{x}{\log x}-\dfrac{1.x}{\log^2 x}-\dfrac{1.2.x}{\log^3 x}-\ldots \\ -\dfrac{1.2.3\ldots(n-1)x}{\log^n x}\end{array}\right]\right\}_{x=\infty}=\mathrm{L}.$$

Mais, d'un autre côté, il est facile de s'assurer que

$$\lim\left\{\frac{\log^n x}{x}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{\log x}+\dfrac{1.x}{\log^2 x}+\dfrac{1.2.x}{\log^3 x}+\ldots \\ +\dfrac{1.2.3\ldots(n-1)x}{\log^n x}-\displaystyle\int_2^x\frac{dx}{\log x}\end{array}\right\}\right\}_{x=\infty}=0;$$

cette équation ajoutée à la précédente donne

$$\lim\left[\frac{\log^n x}{x}\left(f(x)-\int_2^x\frac{dx}{\log x}\right)\right]_{x=\infty}=\mathrm{L}.$$

Or, comme, par hypothèse, $f(x)$ représente $\varphi(x)$ exactement jusqu'aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ inclusivement, et que, d'après le théorème IV, cela ne peut avoir lieu si la limite de

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x)-\int_2^x\frac{dx}{\log x}\right],$$

---

servons d'abord que la fonction $y$ sera racine de l'équation

$$u_0 y^m + u_1 y^{m-1} + u_2 y^{m-2} + \ldots + u_{m-1} y + u_m = 0,$$

$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u_m$ étant des fonctions entières de $x$, $\log x$, $e^x$; si l'on représente par $v$ la fonction qui résulte de l'élimination de $y$ entre l'équation précédente et sa dérivée, alors les fonctions $u_0$, $u_m$ et $v$, comme entières, finiront par ne plus se réduire à zéro ou à changer de signe pour des valeurs de $x$ surpassant une certaine limite; il arrivera donc que $y$ conservera également son signe, car, pour des valeurs de $x$ qui ne réduisent pas $v$ à zéro, l'équation

$$u_0 y^m + u_1 y^{m-1} + \ldots + u_{m-1} y + u_m = 0$$

ne peut avoir de racines égales, et quand les racines sont inégales, le signe de l'un d'elles ne peut changer qu'en supposant que le signe de $u_0$ ou $u_m$ change. Cette propriété peut être étendue à beaucoup d'autres fonctions, pour lesquelles, par cette raison, le théorème V, ainsi que les conséquences qui s'en déduisent, auront également lieu.

pour $x = \infty$, n'est pas zéro, on aura $\mathrm{L} = 0$; cela posé, l'équation (7), pour $\mathrm{L} = 0$, se réduit à

$$\lim \left\{ \frac{\log^n x}{x} \left[ \begin{array}{l} f(x) - \dfrac{x}{\log x} - \dfrac{1.x}{\log^2 x} - \dfrac{1.2.x}{\log^3 x} - \ldots \\ - \dfrac{1.2.3\ldots(n-1)x}{\log^n x} \end{array} \right] \right\}_{x=\infty} = 0,$$

ce qui prouve que la fonction

$$\frac{x}{\log x} + \frac{1.x}{\log^2 x} + \frac{1.2.x}{\log^3 x} + \ldots + \frac{1.2.3\ldots(n-1)x}{\log^n x}$$

ne diffère pas de $f(x)$ de quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ et d'ordres inférieurs, et que, par conséquent, elle peut, aussi bien que $f(x)$, représenter $\varphi(x)$ avec une précision poussée jusqu'aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ inclusivement; ce qu'il s'agissait de démontrer.

D'après le théorème que nous venons d'établir, nous concluons que si la fonction $\varphi(x)$ qui représente combien il y a de nombres premiers inférieurs à $x$, peut être exprimée algébriquement au moyen de $x$, $\log x$, $e^x$, jusqu'aux quantités des ordres

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log^2 x}, \quad \frac{x}{\log^3 x}, \ldots$$

inclusivement, elle devra s'exprimer par

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log x} + \frac{1.x}{\log^2 x}, \quad \frac{x}{\log x} + \frac{1.x}{\log^2 x} + \frac{1.2.x}{\log^3 x}, \ldots.$$

De plus, comme ces sommes ne sont autre chose que les valeurs successives de l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, poussées aux quantités des ordres

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log^2 x}, \quad \frac{x}{\log^3 x}, \ldots,$$

nous sommes en droit de conclure que dans toutes ces hypothèses l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ exprimera $\varphi(x)$ avec exactitude jusqu'aux quantités de l'ordre pour lequel elle peut encore s'exprimer algébriquement au moyen de $x$, $\log x$, $e^x$.

Il est facile de se convaincre par les Tables des nombres premiers que l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, pour $x$ très-grand, exprime avec assez de précision combien il y a de nombres premiers inférieurs à $x$. Mais ces Tables sont trop peu étendues pour pouvoir décider de la supériorité de la formule $\int_2^x \frac{x}{\log x}$ sur la formule de Legendre $\frac{x}{\log x - 1,08366}$ ou sur toute autre analogue. Dans les limites de ces Tables, les deux fonctions $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ et $\frac{x}{\log x - 1,08366}$ diffèrent peu entre elles; mais leur différence $\frac{x}{\log x - 1,08366} - \int_2^x \frac{dx}{\log x}$, ayant un *minimum* pour

$$x = e^{\frac{(1,08366)^2}{0,08366}} = 1247646,$$

croîtra constamment jusqu'à l'infini après cette valeur, et déjà, pour $x > 10000000$, aura une valeur considérable. C'est pour des nombres de cette grandeur que l'avantage de l'une des deux formules

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x}, \quad \frac{x}{\log x - 1,08366}$$

devra se manifester. Mais pour effectuer cette vérification, il faudrait avoir des Tables de nombres premiers beaucoup plus étendues que celles que l'on possède.

## § VII.

En adoptant l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ pour la valeur approchée de $\varphi(x)$, nous serons obligé de changer toutes les formules auxquelles Legendre est parvenu en partant de l'hypothèse

$$\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1,08366};$$

nos formules ne seront pas plus compliquées que les siennes, et auront sur elles l'avantage d'être plus approchées d'après les théorèmes qui ont été démontrés plus haut.

Appliquons notre formule à la détermination de la somme

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X},$$

et du produit

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{X}\right),$$

pour X très-grand.

Pour déterminer la somme

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X},$$

nous observerons que, d'après la notation admise plus haut, on a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}=\sum_{x=2}^{x=X}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x},$$

car $\varphi(x)$ représentant la totalité des nombres premiers inférieurs à $x$, la différence $\varphi(x+1)-\varphi(x)$ se réduira à zéro toutes les fois que $x$ sera un nombre composé, et à 1 quand $x$ sera premier.

Supposons X très-grand, et désignons par $\lambda$ un nombre inférieur à X, mais assez grand cependant pour que la fonction $\varphi(x)$, entre les limites $x=\lambda$ et $x=X$, puisse être représentée avec une exactitude suffisante par l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$. Dans cette hypothèse, l'équation précédente pourra s'écrire de cette manière :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}=\sum_{x=2}^{x=\lambda-1}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}+\sum_{x=\lambda}^{x=X}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}.$$

Remplaçant dans la dernière somme $\varphi(x)$ par $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, on aura

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}=\sum_{x=2}^{x=\lambda-1}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}+\sum_{x=\lambda}^{x=X}\frac{\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}}{x}.$$

Or l'intégrale $\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}$ peut être représentée avec exactitude par

$\frac{1}{\log x}$ jusqu'aux quantités de l'ordre $\frac{1}{x}$; de plus, la somme $\sum\limits_{x=\lambda}^{x=X} \frac{1}{x \log x}$ peut être remplacée par l'intégrale $\int_\lambda^X \frac{dx}{x \log x}$ avec le même degré de précision.

Sous ces conditions, l'équation précédente viendra

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X} = \sum_{x=2}^{x=\lambda-1} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x} + \int_\lambda^X \frac{dx}{x \log x};$$

ou bien, effectuant l'intégration,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X} = \sum_{x=2}^{x=\lambda-1} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x} - \mathrm{l} \log \lambda + \mathrm{l} \log X.$$

Enfin, si l'on remplace par C la quantité

$$\sum_{x=2}^{x=\lambda-1} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x} - \mathrm{l} \log \lambda,$$

indépendante de $x$, on trouvera

$$(8) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X} = C + \mathrm{l} \log X.$$

Lorsque l'on aura déterminé la valeur de la constante C, cette équation pourra servir à trouver, par approximation, la somme de la série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X}$$

quand X sera très-grand.

La formule que nous venons de trouver est plus simple que celle de Legendre, d'après laquelle on a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X} = \log(\log X - 0{,}08366) + C.$$

Passons maintenant à la détermination du produit

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{X}\right) = P.$$

Prenant le logarithme des deux membres de cette équation, on aura la formule

$$\log P = \log\left(1-\frac{1}{2}\right) + \log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \log\left(1-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \log\left(1-\frac{1}{X}\right),$$

qui peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$\log P = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}\right) + \frac{1}{2} + \log\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{3} + \log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} + \log\left(1-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \frac{1}{X} + \log\left(1-\frac{1}{X}\right).$$

Observons actuellement que la série finie

$$\frac{1}{2} + \log\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} + \log\left(1-\frac{1}{5}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{X} + \log\left(1-\frac{1}{X}\right),$$

aux quantités de l'ordre $\frac{1}{X}$ près, peut être remplacée par la série infinie

$$\frac{1}{2} + \log\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} + \log\left(1-\frac{1}{5}\right) + \ldots.$$

En effet, la différence entre ces deux séries est évidemment inférieure à la somme

$$\frac{1}{X+1} + \log\left(1-\frac{1}{X+1}\right) + \frac{1}{X+2} + \log\left(1-\frac{1}{X+2}\right)$$
$$+ \frac{1}{X+3} + \log\left(1-\frac{1}{X+3}\right) + \ldots,$$

qui, elle-même, est inférieure à l'intégrale

$$\int_X^\infty \left[\frac{1}{x} + \log\left(1-\frac{1}{x}\right)\right] dx = 1 - (X-1)\log\left(1-\frac{1}{X}\right) :$$

de plus, comme la valeur de $1-(X-1)\log\left(1-\frac{1}{X}\right)$, pour X très-grand, est une quantité infiniment petite du premier ordre par rapport à $\frac{1}{X}$, nous en concluons que la substitution qui vient d'être indiquée est permise.

D'après ce qui vient d'être dit, si l'on représente par C' la somme de la série infinie

$$\frac{1}{2} + \log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} + \log\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \ldots,$$

la valeur de $\log P$ s'exprimera, aux quantités de l'ordre $\frac{1}{X}$ près, par la formule

$$\log P = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X}\right) + C'.$$

Substituant pour $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X}$ la valeur (8) trouvée plus haut, on obtiendra

$$\log P = -C - \mathrm{l}\log X + C',$$

d'où

$$P = \frac{e^{C'-C}}{\log X}.$$

Enfin, faisant, pour abréger,

$$e^{C'-C} = C_0,$$

et remplaçant P par le produit

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{X}\right),$$

nous aurons

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{X}\right) = \frac{C_0}{\log X}.$$

Legendre, pour la valeur du même produit, a trouvé la formule suivante :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{X}\right) = \frac{C_0}{\log X - 0,08366}.$$