

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Note sur l'intégration des équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 17 (1852), p. 175-176.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__175_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Note sur l'intégration des équations différentielles;

PAR M. J. BERTRAND.

L'intégrale générale d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

doit fournir l'expression de y en fonction de x et d'une constante arbitraire C . La détermination de cette intégrale équivaut donc à la recherche d'une fonction de deux variables. Mais lorsque, par la nature de l'équation, on peut prévoir de quelle manière la constante figure dans l'expression générale de y , il ne reste plus qu'une fonction d'une seule variable à déterminer, et le problème se ramène, en général, aux quadratures.

Cette remarque conduit d'une manière simple à l'intégration des équations différentielles que l'on prend le plus ordinairement pour exemples dans les Traités de calcul intégral.

Soit une équation homogène

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

on démontre, bien facilement, que l'intégrale représente une série de courbes semblables ayant pour centre de similitude l'origine et ayant une équation générale de la forme

$$x = CF\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{ou} \quad \log x = \log C + \log F\left(\frac{y}{x}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dx}{x} = \frac{F'\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right)}{F\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Si l'on pose $\log x = U$, $\frac{y}{x} = z$, cette équation deviendra

$$dU = \frac{F'(z) dz}{F(z)},$$

et les variables seront séparées.

Soit l'équation linéaire

$$\frac{dy}{dx} + \gamma \varphi(x) + \psi(x) = 0;$$

l'intégrale est évidemment de la forme

$$\gamma = \varphi_1(x) + C \psi_1(x), \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma}{\psi_1(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} + C,$$

ce qui donne, par la différentiation,

$$\frac{d \cdot \frac{\gamma}{\psi_1(x)}}{dx} = \frac{d \cdot \frac{\varphi_1}{\psi_1}}{dx}.$$

Si donc on pose $\frac{\gamma}{\psi_1(x)} = z$, les variables seront séparées; et l'on est conduit de cette manière à représenter γ par le produit de deux fonctions inconnues de x , ce qui est, comme on sait, le procédé ordinaire d'intégration.

On peut démontrer d'une manière analogue le théorème fondamental de la théorie des équations linéaires. Soit

$$\frac{d^m \gamma}{du^m} + P_1 \frac{d^{m-1} \gamma}{du^{m-1}} + \dots + P_m \gamma = 0$$

une équation linéaire. On établit bien facilement que son intégrale est de la forme

$$\gamma = C_1 \gamma_1 + C_2 \gamma_2 + \dots + C_n \gamma_n,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = C_1 + C_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \dots + C_n \frac{\gamma_n}{\gamma_1},$$

d'où

$$\frac{d \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} \right)}{dx} = C_2 \frac{d \cdot \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)}{dx} + \dots + C_n \frac{d \cdot \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_1} \right)}{dx};$$

ce qui montre que $\frac{d \cdot \gamma}{dx}$ est l'intégrale générale d'une équation linéaire d'ordre $n-1$. Si donc on connaît γ_1 , en posant $\frac{\gamma}{\gamma_1} = u$, et prenant $\frac{du}{dx}$ pour inconnue, on sera conduit à une équation linéaire d'ordre $n-1$, en sorte que la connaissance d'une intégrale permet d'abaisser d'une unité l'ordre de l'équation différentielle sans lui faire perdre sa forme linéaire.

