

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 16 (1851), p. 499-500.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__499_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure;

PAR M. J.-A. SERRET.

Dans un Mémoire publié au tome précédent de ce Recueil, M. Bertrand a démontré que les normales *principales* d'une courbe à double courbure donnée ne peuvent être les normales principales d'une autre courbe, à moins qu'il n'existe une relation linéaire entre les deux courbures de la courbe donnée. On démontre ce théorème d'une manière très-simple et très-élégante en faisant usage des formules que j'ai données dans un Mémoire qui fait partie du présent volume (page 193).

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de la courbe donnée; $\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu; \xi, \psi, \zeta$ les angles formés avec les axes par la tangente, par l'axe du plan osculateur, et par la normale principale respectivement; ds la différentielle de l'arc de la courbe; ρ le rayon de la première courbure; et r le rayon de la deuxième courbure ou le rayon de torsion. On a (*voyez* le Mémoire cité plus haut)

$$(1) \quad d \cos \alpha = \frac{ds}{\rho} \cos \xi, \quad d \cos \lambda = \frac{ds}{r} \cos \xi, \quad d \cos \xi = -\frac{ds}{\rho} \cos \alpha - \frac{ds}{r} \cos \lambda.$$

Des formules semblables ont lieu à l'égard des deux autres axes coordonnés.

Cela posé, cherchons la condition pour que les normales principales de la courbe donnée soient aussi celles d'une autre courbe. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de cette deuxième courbe, ds_1 la différentielle de l'arc, et $d\omega$ l'angle de contingence. On doit avoir, a étant une constante,

$$(2) \quad x_1 = x + a \cos \xi \quad \text{et} \quad (3) \quad d \frac{dx_1}{ds_1} = \cos \xi d\omega.$$

Différentiant l'équation (2), il vient, à cause de $dx = ds \cos \alpha$,

$$dx_1 = \left[\left(1 - \frac{a}{\rho} \right) \cos \alpha - \frac{a}{r} \cos \lambda \right] ds;$$

de cette équation et des deux autres semblables relatives aux axes des y et des z , on déduit

$$ds_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho} \right)^2 + \frac{a^2}{r^2}} ds = R ds;$$

on a, d'après cela,

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \frac{1}{R} \left[\left(1 - \frac{a}{\rho} \right) \cos \alpha - \frac{a}{r} \cos \lambda \right];$$

différentiant cette dernière équation et comparant le résultat avec l'équation (3), il vient

$$(4) \quad \begin{cases} \left[\frac{1}{\rho} - a \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} \right) - R \frac{d\omega}{ds} \right] ds \cos \xi - \left[ad \frac{1}{\rho} + \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) \frac{dR}{R} \right] \cos \alpha \\ - \left(ad \frac{1}{r} - \frac{a}{r} \frac{dR}{R} \right) \cos \lambda = 0. \end{cases}$$

Il est évident que cette équation aura lieu encore si l'on remplace α, λ, ξ par β, μ, ν ou par γ, ν, ξ respectivement; d'où il suit que les coefficients de $\cos \xi, \cos \alpha, \cos \lambda$ sont nuls. On a donc

$$(5) \quad \begin{cases} d\omega = \left[\frac{1}{\rho} - a \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right] \frac{ds}{R}, \\ ad \frac{1}{\rho} + \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) \frac{dR}{R} = 0, \\ d \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{dR}{R} = 0. \end{cases}$$

Ces équations (5) sont le résultat de l'élimination de x_1, y_1, z_1 , entre les équations (2), (3) et les quatre semblables relatives aux axes des y et des z . Les deux dernières ne contiennent que ρ et r , car

$$R = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho} \right)^2 + \frac{a^2}{r^2}},$$

et elles conduisent au même résultat par l'intégration. On déduit de l'une ou de l'autre

$$(6) \quad \frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1,$$

b désignant la constante arbitraire. Telle est la condition à laquelle doit satisfaire la courbe donnée pour que ses normales principales appartiennent à une autre courbe. Quant à la première des équations (5), elle fait connaître l'angle de contingence $d\omega$ de la seconde courbe.

FIN DU SEIZIÈME VOLUME.