

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. TCHEBICHEF

Note sur différentes séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 16 (1851), p. 337-346.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__337_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE SUR DIFFÉRENTES SÉRIES;

PAR M. P. TCHEBICHEF.

On parvient à des formules très-intéressantes, comme, par exemple, au développement de e^{-x} en produit d'une infinité de facteurs, à l'expression de $\sin x$ et $\cos x$ par des séries dont le calcul ne demande que la multiplication de x par différentes constantes, et encore à plusieurs autres relations curieuses, en cherchant la valeur de $f(1)$. $f(x)$ étant une fonction liée à une autre $F(x)$ par une équation de l'une de ces trois formes :

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \dots \\ F(x) &= f(x) + f(3x) + f(5x) + f(7x) + f(9x) + f(11x) + \dots \\ F(x) &= f(x) - f(3x) + f(5x) - f(7x) + f(9x) - f(11x) + \dots \end{aligned}$$

Pour y parvenir, nous allons chercher quelle est la loi des séries qui déterminent la valeur de $f(1)$ dans ces trois cas. Commençons par le premier où $f(x)$ et $F(x)$ sont liées par l'équation

$$(1) \quad Fx = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \dots$$

Il est évident qu'en vertu de cette équation, la valeur cherchée de $f(1)$ sera exprimée par une série de la forme suivante :

$$(2) \quad f(1) = A_1 F(1) + A_2 F(2) + A_3 F(3) + \dots + A_m F(m) + \dots$$

où $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ sont des coefficients numériques indépendants des fonctions $f(x)$ et $F(x)$. Pour trouver ces coefficients, supposons

$$f(x) = \frac{1}{x^r},$$

r étant une quantité quelconque supérieure à 1. Pour cette forme

particulière de $f(x)$, la fonction $F(x)$, d'après l'équation (1), sera déterminée par l'équation

$$F(x) = \frac{1}{x^r} + \frac{1}{(2x)^r} + \frac{1}{(3x)^r} + \frac{1}{(4x)^r} + \frac{1}{(5x)^r} + \frac{1}{(6x)^r} + \dots,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$F(x) = \frac{1}{x^r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^r}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^r}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^r}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^r}} \dots$$

Or, comme cette expression de $F(x)$, conjointement avec

$$f(x) = \frac{1}{x^r},$$

doit vérifier l'équation (2), nous concluons que

$$1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^r}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^r}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^r}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^r}} \dots \left(A_1 + \frac{A_2}{2^r} + \frac{A_3}{3^r} + \dots + \frac{A_m}{m^r} + \dots \right),$$

et, par conséquent,

$$A_1 + \frac{A_2}{2^r} + \frac{A_3}{3^r} + \dots + \frac{A_m}{m^r} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2^r}\right) \left(1 - \frac{1}{3^r}\right) \left(1 - \frac{1}{5^r}\right) \left(1 - \frac{1}{7^r}\right) \dots$$

D'après cette équation, et en remarquant que les coefficients $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m, \dots$ sont indépendants de r , on conclut qu'en général A_m est égal au coefficient de $\frac{1}{m^r}$ dans le développement du produit

$$\left(1 - \frac{1}{2^r}\right) \left(1 - \frac{1}{3^r}\right) \left(1 - \frac{1}{5^r}\right) \left(1 - \frac{1}{7^r}\right) \dots$$

Or, en examinant ce produit, on s'aperçoit de suite qu'il n'y entre point de termes de la forme $\frac{1}{m^r}$ toutes les fois que m est divisible par un carré; donc, pour de telles valeurs de m , le coefficient A_m sera égal à zéro. Quant aux autres valeurs de m , le coefficient A_m se réduit à 1 lorsque m a un nombre pair de diviseurs premiers, et il est égal à -1 quand le nombre des diviseurs premiers de m est impair. Ainsi nous trouvons la loi de la série (2) qui donne la valeur de $f(1)$ déter-

minée par l'équation

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \dots$$

De la même manière nous trouverons que, la fonction $f(x)$ étant déterminée par l'équation

$$F(x) = f(x) + f(3x) + f(5x) + f(7x) + f(9x) + f(11x) + \dots,$$

la valeur de $f(1)$ sera égale à

$$B_1 F(1) + B_2 F(2) + B_3 F(3) + B_4 F(4) + \dots + B_m F(m) + \dots,$$

où $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots, B_m$ sont les coefficients de $1, \frac{1}{2^r}, \frac{1}{3^r}, \frac{1}{4^r}, \dots, \frac{1}{m^r}$, dans le développement du produit

$$\left(1 - \frac{1}{3^r}\right) \left(1 - \frac{1}{5^r}\right) \left(1 - \frac{1}{7^r}\right) \left(1 - \frac{1}{11^r}\right) \dots$$

De là nous concluons que

$$B_m = 0$$

quand m est divisible par 2 ou par un carré, et que

$$B_m = +1 \text{ ou } -1,$$

suivant que le nombre des diviseurs premiers de m sera pair ou impair.

En passant au cas de

$$F(x) = f(x) - f(3x) + f(5x) - f(7x) + f(9x) - f(11x) + \dots,$$

nous trouvons

$$f(1) = C_1 F(1) + C_2 F(2) + C_3 F(3) + C_4 F(4) + \dots + C_m F(m) + \dots,$$

où $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots, C_m$ sont égaux aux coefficients de $1, \frac{1}{2^r}, \frac{1}{3^r}, \frac{1}{4^r}, \dots, \frac{1}{m^r}$ dans le développement du produit

$$\left(1 + \frac{1}{3^r}\right) \left(1 - \frac{1}{5^r}\right) \left(1 + \frac{1}{7^r}\right) \left(1 + \frac{1}{11^r}\right) \dots$$

Donc.

$$C_m = 0$$

dans le cas où m est pair ou divisible par un carré;

$$C_m = 1$$

si m a un nombre pair de diviseurs premiers de la forme $4n + 1$, et enfin

$$C_m = -1$$

si le nombre de ces diviseurs est impair.

D'après ce qui vient d'être établi, il est visible que, pour chaque formule connue de l'une de ces trois formes :

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + f(5x) + f(6x) + \dots,$$

$$F(x) = f(x) + f(3x) + f(5x) + f(7x) + f(9x) + f(11x) + \dots,$$

$$F(x) = f(x) - f(3x) + f(5x) - f(7x) + f(9x) - f(11x) + \dots,$$

on aura une formule nouvelle.

Ainsi, de la formule connue

$$\frac{1}{a^x - 1} = a^{-x} + a^{-2x} + a^{-3x} + a^{-4x} + a^{-5x} + a^{-6x} + \dots$$

nous tirons

$$a^{-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{a^3-1} - \frac{1}{a^5-1} + \frac{1}{a^6-1} - \dots$$

Le développement de $\log(1 - a^x)$ nous donne une formule qui peut être mise sous cette forme :

$$\frac{\log(1 - a^x)}{x} = -\frac{a^{-x}}{x} - \frac{a^{-2x}}{2x} - \frac{a^{-3x}}{3x} - \frac{a^{-4x}}{4x} - \frac{a^{-5x}}{5x} - \frac{a^{-6x}}{6x} - \dots;$$

d'où nous tirons, en cherchant la valeur de $-\frac{a^x}{x}$ pour $x = 1$,

$$-a = \frac{\log(1-a)}{1} - \frac{\log(1-a^2)}{2} - \frac{\log(1-a^3)}{3} - \frac{\log(1-a^5)}{5} \\ + \frac{\log(1-a^6)}{6} - \frac{\log(1-a^7)}{7} + \frac{\log(1-a^{10})}{10} - \dots,$$

et, par conséquent,

$$e^{-a} = \frac{(1-a)(1-a^6)^{\frac{1}{6}}(1-a^{10})^{\frac{1}{10}} \dots}{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}(1-a^3)^{\frac{1}{3}}(1-a^5)^{\frac{1}{5}} \dots}.$$

En partant de la formule connue

$$\text{arc tang } a^x = a^x - \frac{a^{3x}}{3} + \frac{a^{5x}}{5} - \frac{a^{7x}}{7} + \dots,$$

qui donne

$$\frac{\text{arc tang } a^x}{x} = \frac{a^x}{x} - \frac{a^{3x}}{3x} + \frac{a^{5x}}{5x} - \frac{a^{7x}}{7x} + \dots,$$

nous trouvons

$$a = \text{arc tang } a + \frac{1}{3} \text{arc tang } a^3 - \frac{1}{5} \text{arc tang } a^5 + \frac{1}{7} \text{arc tang } a^7 + \dots$$

Le développement de $\cos \frac{a}{x}$ en produit de facteurs donne

$$\cos \frac{a}{x} = \left(1 - \frac{4a^2}{\pi^2 x^2}\right) \left(1 - \frac{4a^2}{3^2 \pi^2 x^2}\right) \left(1 - \frac{4a^2}{5^2 \pi^2 x^2}\right) \dots$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} \log \left(\cos \frac{a}{x} \right) &= \log \left(1 - \frac{4a^2}{\pi^2 x^2} \right) + \log \left(1 - \frac{4a^2}{3^2 \pi^2 x^2} \right) \\ &+ \log \left(1 - \frac{4a^2}{5^2 \pi^2 x^2} \right) + \log \left(1 - \frac{4a^2}{7^2 \pi^2 x^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

et, d'après cette équation, nous trouvons

$$\begin{aligned} \log \left(1 - \frac{4a^2}{\pi^2} \right) &= \log (\cos a) - \log \left(\cos \frac{a}{3} \right) - \log \left(\cos \frac{a}{5} \right) \\ &- \log \left(\cos \frac{a}{7} \right) - \log \left(\cos \frac{a}{11} \right) - \log \left(\cos \frac{a}{13} \right) \\ &+ \log \left(\cos \frac{a}{15} \right) - \log \left(\cos \frac{a}{17} \right) - \log \left(\cos \frac{a}{19} \right) \\ &+ \log \left(\cos \frac{a}{21} \right) - \dots, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\pi^2 - 4a^2}{\pi^2} = \frac{\cos a \cdot \cos \frac{a}{15} \cdot \cos \frac{a}{21} \dots}{\cos \frac{a}{3} \cdot \cos \frac{a}{5} \cdot \cos \frac{a}{7} \dots}.$$

Voyons maintenant ce qu'on peut tirer de la valeur connue de la

série

$$\frac{\cos 2\pi\lambda x}{1^2} + \frac{\cos 2.3\pi\lambda x}{3^2} + \frac{\cos 2.5\pi\lambda x}{5^2} + \frac{\cos 2.7\pi\lambda x}{7^2} + \dots$$

Pour

$$\lambda x = m \pm \omega,$$

où m est un entier, ω une quantité positive qui ne surpasse pas $\frac{1}{2}$.
nous trouvons cette série égale à

$$\frac{\pi^2}{8}(1 - 4\omega),$$

expression que nous pouvons mettre sous la forme

$$\frac{\pi^2}{8}(1 - 4\{\lambda x\}).$$

en dénotant par le signe $\{\lambda x\}$ la plus petite quantité qu'il faut ajouter à λx ou retrancher de λx pour avoir un nombre entier. Donc on aura

$$\frac{\cos 2\pi\lambda x}{1^2} + \frac{\cos 2.3\pi\lambda x}{3^2} + \frac{\cos 2.5\pi\lambda x}{5^2} + \frac{\cos 2.7\pi\lambda x}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}(1 - 4\{\lambda x\}).$$

En faisant, dans cette formule, $x = 0$, nous trouvons

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Cette équation, combinée avec la précédente, donne

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi^2} \frac{1 - \cos 2\pi\lambda x}{x^2} + \frac{2}{\pi^2} \frac{1 - \cos 2.3\pi\lambda x}{(3x)^2} + \frac{2}{\pi^2} \frac{1 - \cos 2.5\pi\lambda x}{(5x)^2} \\ & + \frac{2}{\pi^2} \frac{1 - \cos 2.7\pi\lambda x}{(7x)^2} + \dots = \frac{1}{x^2} \{\lambda x\}. \end{aligned}$$

En cherchant, d'après cette formule, la valeur de $\frac{2}{\pi^2} \frac{1 - \cos 2\pi\lambda x}{x^2}$ pour $x = 1$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi^2}(1 - \cos 2\pi\lambda) &= \frac{\{\lambda\}}{1^2} - \frac{\{3\lambda\}}{3^2} - \frac{\{5\lambda\}}{5^2} - \frac{\{7\lambda\}}{7^2} - \frac{\{11\lambda\}}{11^2} \\ & - \frac{\{13\lambda\}}{13^2} + \frac{\{15\lambda\}}{15^2} - \dots, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\cos 2\pi\lambda = 1 - \frac{\pi^2}{2} \left\{ \frac{\{\lambda\}}{1^2} - \frac{\{3\lambda\}}{3^2} + \frac{\{5\lambda\}}{5^2} - \frac{\{7\lambda\}}{7^2} + \frac{\{11\lambda\}}{11^2} - \frac{\{13\lambda\}}{13^2} + \frac{\{15\lambda\}}{15^2} - \dots \right\}$$

Voilà une expression de $\cos 2\pi\lambda$ dont le calcul ne demande que la multiplication de λ par 1, 3, 5, 7, 11, 13, 15,.... Nous trouverons une expression pareille pour $\sin 2\pi\lambda$, en remplaçant dans la formule précédente λ par $\lambda - \frac{1}{4}$, ce qui donnera la série

$$\sin 2\pi\lambda = 1 - \frac{\pi^2}{2} \left\{ \frac{\{\lambda - \frac{1}{4}\}}{1^2} - \frac{\{3\lambda - \frac{3}{4}\}}{3^2} + \frac{\{5\lambda - \frac{5}{4}\}}{5^2} - \frac{\{7\lambda - \frac{7}{4}\}}{7^2} + \frac{\{11\lambda - \frac{11}{4}\}}{11^2} - \frac{\{13\lambda - \frac{13}{4}\}}{13^2} + \frac{\{15\lambda - \frac{15}{4}\}}{15^2} - \dots \right\}$$

qui, par la propriété de la notation $\{ \}$, se réduira à

$$\sin 2\pi\lambda = 1 - \frac{\pi^2}{2} \left\{ \frac{\{\lambda - \frac{1}{4}\}}{1^2} - \frac{\{3\lambda + \frac{1}{4}\}}{3^2} + \frac{\{5\lambda - \frac{1}{4}\}}{5^2} - \frac{\{7\lambda + \frac{1}{4}\}}{7^2} + \frac{\{11\lambda + \frac{1}{4}\}}{11^2} - \frac{\{13\lambda - \frac{1}{4}\}}{13^2} + \dots \right\}$$

La même méthode nous conduira aussi aux valeurs des séries :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \frac{1}{29} + \dots,$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{29^2} + \dots,$$

$$\frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} + \frac{1}{23^3} - \frac{1}{29^3} + \dots,$$

.....

.....

De là nous tirons la formule

$$\log S_m = \Sigma_m + \frac{1}{2} \Sigma_{2m} + \frac{1}{3} \Sigma_{3m} + \frac{1}{4} \Sigma_{4m} + \frac{1}{5} \Sigma_{5m} + \dots$$

en dénotant la somme

$$(3) \quad 1 + \frac{(-1)^m}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{(-1)^m}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \frac{(-1)^m}{11^m} + \frac{1}{13^m} + \frac{(-1)^m}{15^m} + \dots$$

par S_m , et les sommes de la forme

$$(4) \quad \frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^n}{7^n} + \frac{(-1)^n}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \dots,$$

en général, par Σ_m . En changeant dans l'équation précédente m en mx , et divisant ensuite tous ses termes par x , nous aurons

$$\frac{1}{x} \log S_{mx} = \frac{1}{x} \Sigma_{mx} + \frac{1}{2x} \Sigma_{2mx} + \frac{1}{3x} \Sigma_{3mx} + \frac{1}{4x} \Sigma_{4mx} + \frac{1}{5x} \Sigma_{5mx} + \dots$$

d'où nous tirons, pour la valeur de Σ_m ,

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= \log S_m - \frac{1}{2} \log S_{2m} - \frac{1}{3} \log S_{3m} - \frac{1}{5} \log S_{5m} \\ &\quad + \frac{1}{6} \log S_{6m} - \frac{1}{7} \log S_{7m} - \dots \end{aligned}$$

Ainsi nous parvenons à déterminer la valeur de la série Σ_m de la forme (1), composée seulement de nombres premiers, au moyen des valeurs des séries $S_m, S_{2m}, S_{5m}, S_{6m}, S_{7m}, \dots$ de la forme (3), composées de tous les nombres impairs. Dans le cas particulier de

$$m = 1, 2, 3,$$

la formule que nous venons de trouver donnera

$$\Sigma_1 = \log S_1 - \frac{1}{2} \log S_2 - \frac{1}{3} \log S_3 - \frac{1}{5} \log S_5 + \frac{1}{6} \log S_6 - \frac{1}{7} \log S_7 - \dots$$

$$\Sigma_2 = \log S_2 - \frac{1}{2} \log S_4 - \frac{1}{3} \log S_6 - \frac{1}{5} \log S_{10} + \frac{1}{6} \log S_{12} - \frac{1}{7} \log S_{14} + \dots$$

$$\Sigma_3 = \log S_3 - \frac{1}{2} \log S_6 - \frac{1}{3} \log S_9 - \frac{1}{5} \log S_{15} + \frac{1}{6} \log S_{18} - \frac{1}{7} \log S_{21} + \dots$$

Mais on sait que

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{15^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32},$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \frac{1}{13^4} + \frac{1}{15^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96},$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \frac{1}{13^5} - \frac{1}{15^5} + \dots = \frac{5\pi^5}{1536},$$

$$S_6 = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \frac{1}{13^6} + \frac{1}{15^6} + \dots = \frac{\pi^6}{960},$$

$$S_7 = 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \frac{1}{13^7} - \frac{1}{15^7} + \dots = \frac{61\pi^7}{184320},$$

$$S_8 = 1 - \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} - \frac{1}{11^8} + \frac{1}{13^8} - \frac{1}{15^8} + \dots = \frac{277\pi^8}{8257536},$$

$$S_{10} = 1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \frac{1}{9^{10}} + \frac{1}{11^{10}} + \frac{1}{13^{10}} + \frac{1}{15^{10}} + \dots = \frac{31\pi^{10}}{2903040}.$$

.....

Donc, d'après les formules précédentes, nous aurons

$$\Sigma_1 = \log \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{3} \log \frac{\pi^3}{32} - \frac{1}{5} \log \frac{5\pi^5}{1536} + \frac{1}{6} \log \frac{\pi^6}{960} - \frac{1}{7} \log \frac{61\pi^7}{184320} \\ + \frac{1}{10} \log \frac{31\pi^{10}}{2903040} - \dots,$$

$$\Sigma_2 = \log \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \log \frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{3} \log \frac{\pi^6}{960} - \frac{1}{5} \log \frac{31\pi^{10}}{2903040} - \dots,$$

$$\Sigma_3 = \log \frac{\pi^3}{32} - \frac{1}{2} \log \frac{\pi^6}{960} - \frac{1}{3} \log \frac{277\pi^8}{8257536} - \dots,$$

ce qui donne

$$\Sigma_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \dots = -0,33498\dots,$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \dots = 0,20224\dots,$$

$$\Sigma_3 = -\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} + \dots = -0,03225\dots$$