

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. HOLMGREN

**Sur la convergence des séries trigonométriques procédant
suivant les multiples d'un même arc**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 16 (1851), p. 186-190.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__186_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur la convergence des séries trigonométriques procédant
suivant les multiples d'un même arc;*

PAR M. H. HOLMGREN.

Dans un Mémoire inséré au Journal de M. Grunert (*Archiv der Mathematik und Physik*), M. Malmsten a démontré que les séries réelles infinies

$$u_0 + u_1 \cos x + u_2 \cos 2x + u_3 \cos 3x + \dots,$$

$$u_1 \sin x + u_2 \sin 2x + u_3 \sin 3x + \dots,$$

sont convergentes quand la fonction u_n tendant vers zéro finit par être toujours de même signe et sans cesse numériquement décroissante pour des valeurs croissantes de n ; pourvu toutefois que x ne soit pas de la forme $2k\pi$, k étant un nombre entier positif, nul ou négatif.

Voici une nouvelle démonstration de ce théorème remarquable.

Pour comprendre nos deux séries dans un même calcul, considérons la somme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} S_n &= u_0 \cos \mu x + u_1 \cos (\mu + 1)x + u_2 \cos (\mu + 2)x + \dots \\ &\quad + u_{n-1} \cos (\mu + n - 1)x + u_n \cos (\mu + n)x, \end{aligned} \right.$$

où μ est une quantité quelconque, et où nous supposons d'abord la fonction u_n quelconque aussi, sauf à lui imposer plus tard des conditions. Multiplions cette somme par $2 \sin \frac{1}{2} x$, puis décomposons chaque terme du second membre d'après la formule

$$2 \sin \frac{1}{2} x \cos (\mu + i)x = \sin \left(\mu + i + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(\mu + i - \frac{1}{2} \right) x:$$

nous aurons

[illegible]

et, en joignant les termes deux à deux diagonalement,

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & 2 \sin \frac{1}{2} x \cdot S_n \\ & = -u_0 \sin \left(\mu - \frac{1}{2} \right) x + (u_0 - u_1) \sin \left(\mu + \frac{1}{2} \right) x + (u_1 - u_2) \sin \left(\mu + \frac{3}{2} \right) x \\ & \quad + (u_{n-1} - u_n) \sin \left(\mu + \frac{2n-1}{2} \right) x + u_n \sin \left(\mu + \frac{2n+1}{2} \right) x. \end{aligned} \right.$$

Faisant, pour abréger,

$$(3) \quad \begin{cases} -u_0 \sin \left(\mu - \frac{1}{2} \right) x + (u_0 - u_1) \sin \left(\mu + \frac{1}{2} \right) x + (u_1 - u_2) \sin \left(\mu + \frac{3}{2} \right) x \\ \quad + (u_{n-1} - u_n) \sin \left(\mu + \frac{2n-1}{2} \right) x = U_n, \end{cases}$$

on a

$$2 \sin \frac{1}{2} x . S_n = U_n + u_n \sin \left(\mu + \frac{2n+1}{2} \right) x,$$

d'où

$$(4) \quad S_n = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x} \left[U_n + u_n \sin \left(\mu + \frac{2n+1}{2} x \right) \right].$$

Cette formule, n'étant qu'une identité, subsiste quel que soit le nombre entier n . Supposant donc n infiniment grand, nous avons

$\lim S_n$ ou la somme de la série infinie

$$(5) \quad \begin{cases} u_0 \cos \mu x + u_1 \cos (\mu + 1) x + u_2 \cos (\mu + 2) x + \dots \\ = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x} \left[\lim U_n + \lim u_n \sin \left(\mu + \frac{2n+1}{2} x \right) \right]. \end{cases}$$

Dans cette formule,

$$(6) \quad \begin{cases} \lim U_n = -u_0 \sin \left(\mu - \frac{1}{2} \right) x + (u_0 - u_1) \sin \left(\mu + \frac{1}{2} \right) x \\ \quad \quad \quad + (u_1 - u_2) \sin \left(\mu + \frac{3}{2} \right) x + \dots \end{cases}$$

est aussi une série infinie; mais on démontre facilement que cette série a une somme *finie et déterminée* lorsque la fonction u_n est constamment de même signe et numériquement décroissante pour des valeurs très-grandes et croissantes de n : jusqu'ici, du reste, peu importe que $\lim u_n$ soit égale ou non à zéro.

En effet, supposons que depuis $n = m$ (m étant un nombre *fini* et entier) u_n décroisse constamment en restant, par exemple, positive, et désignons par A la quantité finie et déterminée

$$\begin{aligned} -u_0 \sin \left(\mu - \frac{1}{2} \right) x + (u_0 - u_1) \sin \left(\mu + \frac{1}{2} \right) x + (u_1 - u_2) \sin \left(\mu + \frac{3}{2} \right) x + \dots \\ + (u_{m-1} - u_m) \sin \left(\mu + \frac{2m-1}{2} \right) x; \end{aligned}$$

nous aurons, en prenant $n > m$,

$$\begin{aligned} n - A = (u_m - u_{m+1}) \sin \left(\mu + \frac{2m+1}{2} \right) x + (u_{m+1} - u_{m+2}) \sin \left(\mu + \frac{2m+3}{2} \right) x + \dots \\ + (u_{n-1} - u_n) \sin \left(\mu + \frac{2n-1}{2} \right) x. \end{aligned}$$

Les différences $u_m - u_{m+1}$, $u_{m+1} - u_{m+2}$, ... étant toutes positives, et les facteurs par lesquels elles sont multipliées étant tout au plus égaux à l'unité quant à leurs valeurs numériques, le second membre de cette égalité ne peut pas être numériquement plus grand que la somme

$$(u_m - u_{m+1}) + (u_{m+1} - u_{m+2}) + \dots + (u_{n-1} - u_n) = u_m - u_n;$$

par conséquent,

$$U_n - A \stackrel{=}{<} u_m - u_n,$$

en ayant égard seulement à la valeur numérique de $U_n - A$. Or A , u_m et u_n sont toujours des quantités finies; donc U_n et $\lim U_n$ sont aussi des quantités finies.

Pour démontrer que $\lim U_n$ est aussi une quantité déterminée, il suffit de prouver que la somme d'un nombre quelconque de termes qui, dans cette série, suivent le $r^{\text{ième}}$ terme, diminue à mesure que r devient plus grand et s'évanouit pour $r = \infty$, puisque alors la quantité finie $\lim U_n$ devient indépendante de n , et, par conséquent, déterminée. Prenons donc un nombre quelconque k de ces termes; nous trouvons, par un raisonnement tout à fait semblable à celui que nous venons d'employer, que la valeur numérique de leur somme

$$\begin{aligned} (u_r - u_{r+1}) \sin \left(\mu + \frac{2r+1}{2} \right) x + (u_{r+1} - u_{r+2}) \sin \left(\mu + \frac{2r+3}{2} \right) x + \dots \\ + (u_{r+k-1} - u_{r+k}) \sin \left[\mu + \frac{2(r+k)-1}{2} \right] x, \end{aligned}$$

ne peut surpasser $u_r - u_{r+k}$; or, à mesure que r croît, cette différence diminue et s'évanouit lorsque $r = \infty$, puisque, d'après la condition relative à u_n , on a nécessairement

$$\lim u_r = \lim u_{r+k}.$$

Ainsi $\lim U_n$ est une quantité finie et déterminée.

Revenant maintenant à l'équation (5), nous en tirons immédiatement la conclusion suivante :

Pourvu que $\sin \frac{1}{2}x$ ne soit pas nul ou que x ne soit pas de la forme $2k\pi$ (k étant un nombre entier positif, nul ou négatif), la somme de la série infinie

$$u_0 \cos \mu x + u_1 \cos (\mu + 1) x + u_2 \cos (\mu + 2) x + u_3 \cos (\mu + 3) x + \dots$$

est toujours finie lorsque u_n finit par être constamment de même signe et numériquement décroissante pour des valeurs croissantes du nombre entier n . Cette somme est, du reste, déterminée lorsque $\lim u_n = 0$,

mais indéterminée à cause du facteur $\sin \left(\mu + \frac{2n+1}{2} \right) x$, dans le cas où $\lim u_n$ n'est pas zéro.

Remarquons d'ailleurs que lorsque $\lim u_n$ diffère de zéro, la formule (5) permet d'assigner complètement le mode d'indétermination de la somme.

Mettons, dans la formule (5), $\mu - \frac{\pi}{2x}$ au lieu de μ , nous aurons

$$(7) \quad \begin{cases} u_0 \sin \mu x + u_1 \sin (\mu + 1) x + u_2 \sin (\mu + 2) x + \dots \\ = - \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x} \left[\lim U_n + \lim u_n \cos \left(\mu + \frac{2n+1}{2} \right) x \right], \end{cases}$$

où

$$(8) \quad \begin{cases} \lim U_n = - u_0 \cos \left(\mu - \frac{1}{2} \right) x + (u_0 - u_1) \cos \left(\mu + \frac{1}{2} \right) x \\ \quad \quad \quad + (u_1 - u_2) \cos \left(\mu + \frac{3}{2} \right) x + \dots \end{cases}$$

et nous voyons immédiatement que la série infinie

$$u_0 \sin \mu x + u_1 \sin (\mu + 1) x + u_2 \sin (\mu + 2) x + u_3 \sin (\mu + 3) x + \dots,$$

est assujettie aux mêmes conditions de convergence que nous venons de trouver pour la série dont elle dérive.

Pour $\mu = 0$, nous avons les séries traitées par M. Malmsten.

