

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FAA DE BRUNO

**Note sur un nouveau procédé pour reconnaître immédiatement,
dans certains cas, l'existence de racines imaginaires
dans une équation numérique**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 15 (1850), p. 363-364.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15_363_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

Sur un nouveau procédé pour reconnaître immédiatement, dans certains cas, l'existence de racines imaginaires dans une équation numérique;

PAR M. FAA DE BRUNO.

THÉORÈME. *L'équation*

$$(1) \quad x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Rx^2 + Sx + T = 0,$$

dont les coefficients sont numériquement donnés, admet des racines imaginaires si

$$(2) \quad P^2 - 2Q < m\sqrt{T^2}.$$

On sait, en effet, que A, B, C, ... étant des quantités positives et m leur nombre, on a

$$A + B + C + \dots > m\sqrt{ABC\dots},$$

c'est-à-dire que la moyenne arithmétique entre plusieurs quantités est supérieure à leur moyenne géométrique [*]. Si donc les racines de l'équation (1) sont toutes réelles, et qu'on prenne pour A, B, C, ... leurs carrés, ce qui donne

$$A + B + C + \dots = P^2 - 2Q, \quad ABC\dots = T^2,$$

on en conclura

$$P^2 - 2Q > m\sqrt{T^2}.$$

L'inégalité (2) n'a donc jamais lieu quand l'équation (1) a toutes ses

[*] Voyez le *Cours d'Analyse* de M. Cauchy.

racines réelles, et si cette inégalité est vérifiée, on peut être assuré qu'il y a des racines imaginaires dans l'équation proposée.

S'il arrive que $P^2 - 2Q$ soit plus grand que $m\sqrt{T^2}$, on devra appliquer encore le même principe aux coefficients correspondants dans l'équation aux racines réciproques, et l'on trouvera quelquefois

$$(3) \quad \frac{S^2}{T^2} - 2\frac{R}{T} < m\sqrt{\frac{1}{T^2}},$$

ce qui rendra évidente l'existence de racines imaginaires, qui n'était point révélée par les coefficients P et Q . Lorsque les inégalités (2) et (3) n'auront pas lieu, on ne pourra rien conclure sur la réalité ou la non-réalité des racines. Mais cet indice nouveau, combiné avec d'autres que l'on connaît déjà ou que l'on pourrait encore trouver en développant le principe indiqué ci-dessus, suffira, dans un grand nombre de cas, pour constater immédiatement et d'une manière très-simple la présence de racines imaginaires dans une équation.

