

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Sur une question relative à la théorie des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 14 (1849), p. 21-30.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__21_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

.....

SUR

UNE QUESTION RELATIVE A LA THÉORIE DES NOMBRES ;

PAR M. HERMITE.

—————

Soient $n + 1$ nombres entiers

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa, \lambda,$$

dont le plus grand commun diviseur est l'unité; on propose de trouver tous les systèmes de $n(n + 1)$ autres nombres, savoir :

$$\begin{array}{ccc} \alpha', & \alpha'', \dots, & \alpha^{(n)}, \\ \beta', & \beta'', \dots, & \beta^{(n)}, \\ \gamma', & \gamma'', \dots, & \gamma^{(n)}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \kappa', & \kappa'', \dots, & \kappa^{(n)}, \\ \lambda', & \lambda'', \dots, & \lambda^{(n)}, \end{array}$$

qui rendent le déterminant

$$\begin{array}{cccc} \alpha, & \alpha', \dots, & \alpha^{(i)}, \dots, & \alpha^{(n)}, \\ \beta, & \beta', \dots, & \beta^{(i)}, \dots, & \beta^{(n)}, \\ \gamma, & \gamma', \dots, & \gamma^{(i)}, \dots, & \gamma^{(n)}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \kappa, & \kappa', \dots, & \kappa^{(i)}, \dots, & \kappa^{(n)}, \\ \lambda, & \lambda', \dots, & \lambda^{(i)}, \dots, & \lambda^{(n)}, \end{array}$$

égal à plus ou moins un.

Solution. Nommons respectivement

π_1	le plus grand commun diviseur de α	et β .
π_2	<i>idem</i>	π_1 et γ ,
π_3	<i>idem</i>	π_2 et δ .
.		
π_{n-1}	<i>idem</i>	π_{n-2} et α ,
π_n	<i>idem</i>	π_{n-1} et λ ;

dans l'hypothèse admise, π_n sera l'unité. Prenons ensuite les nombres entiers

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \dots, \quad h, \quad l,$$

$$c', \quad d', \dots, \quad h', \quad l'.$$

d'après les conditions

$$\alpha\beta - b\alpha = \pi_1,$$

$$c'\gamma - c\pi_1 = \pi_2,$$

$$d'\delta - d\pi_2 = \pi_3,$$

$$.$$

$$k'\alpha - k\pi_{n-2} = \pi_{n-1},$$

$$l'\lambda - l\pi_{n-1} = \pi_n = 1.$$

On satisfera à la question proposée par les valeurs suivantes

$$\alpha_i = am_i + M_i \frac{\alpha}{\pi_1},$$

$$\beta_i = bm_i + M_i \frac{\beta}{\pi_1},$$

$$\gamma_i = cn_i + N_i \frac{\gamma}{\pi_2},$$

$$\delta_i = dp_i + P_i \frac{\delta}{\pi_3},$$

$$.$$

$$\alpha_i = ks_i + S_i \frac{\alpha}{\pi_{n-1}},$$

$$\lambda_i = lt_i + T_i \frac{\lambda}{\pi_n},$$

les quantités

$$M_i, \quad N_i, \quad P_i, \dots, \quad S_i, \quad T_i$$

dépendant des nombres entiers

$$m_i, \quad n_i, \quad p_i, \dots, \quad s_i, \quad t_i$$

par les équations

$$M_i = c' n_i + N_i \frac{\pi}{\pi'},$$

$$N_i = d' p_i + P_i \frac{\pi}{\pi'},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_i = l' t_i + T_i \frac{\pi_{n-1}}{\pi_n},$$

et toutes les solutions possibles s'obtiendront en prenant toutes les valeurs des n^2 quantités

$$m_i, \quad n_i, \quad p_i, \dots, \quad s_i, \quad t_i,$$

pour lesquelles le déterminant

$$m_1, \quad m_2, \dots, \quad m_n,$$

$$n_1, \quad n_2, \dots, \quad n_n,$$

$$p_1, \quad p_2, \dots, \quad p_n,$$

$$\vdots$$

$$s_1, \quad s_2, \dots, \quad s_n,$$

$$t_1, \quad t_2, \dots, \quad t_n,$$

égale plus ou moins un.

Ainsi, par exemple, lorsque $n = 2$, s'il s'agit de rendre égal à l'unité le déterminant

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{pmatrix} = \alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')$$

on aura

$$\alpha' = am_1 + M_1 \frac{\alpha}{\pi_1},$$

$$\beta' = bm_1 + M_1 \frac{\beta}{\pi_1},$$

$$\gamma' = cn_1 + N_1 \gamma,$$

avec

$$M_1 = c' n_1 + N_1 \pi_1,$$

ce qui donne

$$\alpha' = am_1 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_1 + N_1 \alpha,$$

$$\beta' = bm_1 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_1 + N_1 \beta,$$

$$\gamma' = cn_1 + N_1 \gamma;$$

on trouvera ensuite semblablement

$$\alpha'' = am_2 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_2 + N_2 \alpha,$$

$$\beta'' = bm_2 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_2 + N_2 \beta,$$

$$\gamma'' = cn_2 + N_2 \gamma,$$

et l'on devra prendre pour m_1, n_1, m_2, n_2 indéfiniment tous les nombres entiers pour lesquels

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = \pm 1.$$

Si $n = 3$, la solution générale de l'équation

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \alpha''' \\ \beta, & \beta', & \beta'', & \beta''' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'', & \gamma''' \\ \delta, & \delta', & \delta'', & \delta''' \end{pmatrix} = \pm 1$$

sera de même comprise dans les formules

$$\alpha' = am_1 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_1 + \frac{\alpha d'}{\pi_2} p_1 + P_1 \alpha,$$

$$\beta' = bm_1 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_1 + \frac{\beta d'}{\pi_2} p_1 + P_1 \beta,$$

$$\gamma' = cn_1 + \frac{\gamma d'}{\pi_2} p_1 + P_1 \gamma,$$

$$\delta' = dp_1 + P_1 \delta;$$

$$\delta^{v'} = dp_2 + P_2 \delta^i;$$

$$\delta''' = dp_3 + P_3 \delta^1.$$

$$(A) \quad \alpha^{(i)}, \beta^{(i)}, \gamma^{(i)}, \dots, \lambda^{(i)},$$
$$(B) \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \beta, & 0, & 0, \dots, & 0, \\ \mathfrak{A}'_1 & -\alpha, & \gamma, & 0, \dots, & 0, \\ \mathfrak{A}''_1 & 0, & -\beta, & \delta, \dots, & 0, \\ \mathfrak{A}'''_1 & 0, & 0, & -\gamma, \dots, & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathfrak{A}^{(n-1)}_1 & 0, & 0, & 0, \dots, & \lambda, \\ \mathfrak{A}^{(n)}_1 & 0, & 0, & 0, \dots, & -\lambda, \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} \alpha \xi + \beta \xi' + \gamma \xi'' + \dots + \lambda \xi^{(n)} &= 1, \\ \alpha' \xi + \beta' \xi' + \gamma' \xi'' + \dots + \lambda' \xi^{(n)} &= 0, \\ \alpha'' \xi + \beta'' \xi' + \gamma'' \xi'' + \dots + \lambda'' \xi^{(n)} &= 0, \\ &\vdots \\ \alpha^{(n)} \xi + \beta^{(n)} \xi' + \gamma^{(n)} \xi'' + \dots + \lambda^{(n)} \xi^{(n)} &= 0. \end{aligned}$$

De la composition des systèmes (A) et (B) résultera le nouveau système

$$\begin{array}{cccccc}
 1, & 0, & 0, \dots, & 0, \dots, & 0, & \\
 0, & \alpha' \beta - \beta' \alpha, & \alpha'' \beta - \beta'' \alpha, \dots, & \alpha^{(i)} \beta - \beta^{(i)} \alpha, \dots, & \alpha^{(n)} \beta - \beta^{(n)} \alpha, & \\
 0, & \beta' \gamma - \gamma' \beta, & \beta'' \gamma - \gamma'' \beta, \dots, & \beta^{(i)} \gamma - \gamma^{(i)} \beta, \dots, & \beta^{(n)} \gamma - \gamma^{(n)} \beta, & \\
 0, & \gamma' \delta - \delta' \gamma, & \gamma'' \delta - \delta'' \gamma, \dots, & \gamma^{(i)} \delta - \delta^{(i)} \gamma, \dots, & \gamma^{(n)} \delta - \delta^{(n)} \gamma, & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 0, & \alpha' \lambda - \lambda' \alpha, & \alpha'' \lambda - \lambda'' \alpha, \dots, & \alpha^{(i)} \lambda - \lambda^{(i)} \alpha, \dots, & \alpha^{(n)} \lambda - \lambda^{(n)} \alpha, &
 \end{array}$$

En appelant C son déterminant, ou, ce qui revient au même, celui des n^2 quantités

$$(C) \quad \alpha^{(i)} \beta - \beta^{(i)} \alpha, \quad \beta^{(i)} \gamma - \gamma^{(i)} \beta, \dots, \quad \alpha^{(i)} \lambda - \lambda^{(i)} \alpha,$$

on aura, par ce théorème connu,

$$C = AB.$$

Or on trouve facilement, au signe près,

$$B = \beta \gamma \delta \dots \alpha;$$

donc on peut remplacer la condition proposée, savoir

$$A = \pm 1,$$

par la suivante,

$$C = \pm \beta \gamma \delta \dots \alpha,$$

dont nous allons nous occuper.

Exposons d'abord une transformation des termes du système (C); j'observe, à cet effet, que π_i désignant le plus grand commun diviseur de α et β , on aura nécessairement

$$\alpha^{(i)} \beta - \beta^{(i)} \alpha = m_i \pi_i,$$

d'où l'on tire

$$\alpha^{(i)} = am_i + M_i \frac{\alpha}{\pi_i},$$

$$\beta^{(i)} = bm_i + M_i \frac{\beta}{\pi_i},$$

les nombres entiers m_i et M_i restant entièrement arbitraires, et a et b étant déterminés par l'équation

$$a\beta - b\alpha = \pi_1.$$

Au moyen de cette valeur de $\beta^{(i)}$, on trouve

$$\beta^{(i)}\gamma - \gamma^{(i)}\beta = b\gamma m_i + \frac{\beta}{\pi_1} (M_i\gamma - \gamma^{(i)}\pi_1).$$

Or, π_2 désignant le plus grand commun diviseur de π_1 et γ , on aura nécessairement

$$M_i\gamma - \gamma^{(i)}\pi_1 = n_i\pi_2,$$

d'où

$$M_i = c'n_i + N_i \frac{\pi_1}{\pi_2},$$

$$\gamma^{(i)} = cn_i + N_i \frac{\gamma}{\pi_1},$$

les nombres entiers n_i et N_i étant quelconques, c et c' dépendant de l'équation

$$c'\gamma - c\pi_1 = \pi_2.$$

La répétition du même calcul nous conduira de l'expression précédente de $\gamma^{(i)}$ à celle de $\delta^{(i)}$; il vient, en effet,

$$\gamma^{(i)}\delta - \delta^{(i)}\gamma = c\delta n_i + \frac{\gamma}{\pi_2} (N_i\delta - \delta^{(i)}\pi_2),$$

et posant encore

$$N_i\delta - \delta^{(i)}\pi_2 = p_i\pi_3,$$

π_3 étant le plus grand commun diviseur de π_2 et δ , on en conclura

$$N_i = d'p_i + P_i \frac{\pi_2}{\pi_3},$$

$$\delta^{(i)} = dp_i + P_i \frac{\delta}{\pi_3},$$

d et d' étant donnés par l'équation

$$d'\delta - d\pi_2 = \pi_3.$$

La loi que suivent ces opérations est maintenant évidente, et on en

conclura, d'une part,

$$\begin{aligned}\alpha^{(i)}\beta - \beta^{(i)}\alpha &= m_i\pi_1, \\ \beta^{(i)}\gamma - \gamma^{(i)}\beta &= b\gamma m_i + \frac{\beta\pi_2}{\pi_1} n_i, \\ \gamma^{(i)}\delta - \delta^{(i)}\gamma &= c\delta n_i + \frac{\gamma\pi_3}{\pi_2} p_i, \\ &\dots\dots\dots \\ \chi^{(i)}\lambda - \lambda^{(i)}\chi &= k\lambda s_i + \frac{\chi\pi_n}{\pi_{n-1}} t_i,\end{aligned}$$

où il est essentiel d'observer que $m_i, n_i, \dots, s_i, t_i$ restent jusqu'à présent des entiers entièrement arbitraires.

D'un autre côté, nous obtenons d'ailleurs

$$\begin{aligned}\alpha^{(i)} &= am_i + M_i \frac{\alpha}{\pi_1}, \\ \beta^{(i)} &= bm_i + M_i \frac{\beta}{\pi_1}, \\ \gamma^{(i)} &= cn_i + N_i \frac{\gamma}{\pi_2}, \\ \delta^{(i)} &= dp_i + P_i \frac{\delta}{\pi_3}, \\ &\dots\dots\dots \\ \chi^{(i)} &= ks_i + S_i \frac{\chi}{\pi_{n-1}}, \\ \lambda^{(i)} &= lt_i + T_i \frac{\lambda}{\pi_n},\end{aligned}$$

et les entiers $M_i, N_i, P_i, \dots$ s'expriment de proche en proche, uniquement par $m_i, n_i, p_i, \dots$ au moyen de ces autres équations

$$\begin{aligned}M_i &= c'n_i + N_i \frac{\pi_1}{\pi_2}, \\ N_i &= d'p_i + P_i \frac{\pi_2}{\pi_3}, \\ &\vdots \\ S_i &= h't_i + T_i \frac{\pi_{n-1}}{\pi_n},\end{aligned}$$

lesquelles ne laissent d'indéterminé que T_i .

Ces résultats obtenus, reportons-nous maintenant au système (C), qui a été transformé dans le suivant, savoir,

$$\begin{array}{cccc} m_1 \pi_1, & m_2 \pi_1, \dots, & m_i \pi_1, \dots, & m_n \pi_1, \\ b\gamma m_1 + \frac{\beta \pi_2}{\pi_1} n_1, & b\gamma m_2 + \frac{\beta \pi_2}{\pi_1} n_2, \dots, & b\gamma m_i + \frac{\beta \pi_2}{\pi_1} n_i, \dots, & b\gamma m_n + \frac{\beta \pi_2}{\pi_1} n_n, \\ c\delta n_1 + \frac{\gamma \pi_3}{\pi_2} p_1, & c\delta n_2 + \frac{\gamma \pi_3}{\pi_2} p_2, \dots, & c\delta n_i + \frac{\gamma \pi_3}{\pi_2} p_i, \dots, & c\delta n_n + \frac{\gamma \pi_3}{\pi_2} p_n, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k\lambda s_1 + \frac{\alpha \pi_n}{\pi_{n-1}} t_1, & k\lambda s_2 + \frac{\alpha \pi_n}{\pi_{n-1}} t_2, \dots, & k\lambda s_i + \frac{\alpha \pi_n}{\pi_{n-1}} t_i, \dots, & k\lambda s_n + \frac{\alpha \pi_n}{\pi_{n-1}} t_n. \end{array}$$

On reconnaît bien facilement qu'un pareil système provient de la composition des deux autres, que voici :

$$(1) \quad \left(\begin{array}{cccc} m_1, & m_2, \dots, & m_i, \dots, & m_n, \\ n_1, & n_2, \dots, & n_i, \dots, & n_n, \\ p_1, & p_2, \dots, & p_i, \dots, & p_n, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1, & s_2, \dots, & s_i, \dots, & s_n, \\ t_1, & t_2, \dots, & t_i, \dots, & t_n, \end{array} \right)$$

et

$$(2) \quad \left(\begin{array}{ccccc} \pi_1, & b\gamma, & 0, & 0, \dots, & 0, \\ 0, & \frac{\beta \pi_2}{\pi_1}, & c\delta, & 0, \dots, & 0, \\ 0, & 0, & \frac{\gamma \pi_3}{\pi_2}, & d\varepsilon, \dots, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & \frac{\delta \pi_4}{\pi_3}, \dots, & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, \dots, & k\lambda, \\ 0, & 0, & 0, & 0, \dots, & \frac{\alpha \pi_n}{\pi_{n-1}}. \end{array} \right)$$

donc son déterminant, et, par suite, celui du système (C) est le produit des déterminants de ces deux systèmes.

Or le déterminant du système (2) se réduit à son terme principal

$$\beta\gamma\dots\alpha\pi_n$$

ou simplement

$$\beta\gamma\dots\alpha.$$

puisque π_n est l'unité; la condition proposée

$$C = \pm \beta\gamma\dots\alpha$$

sera donc remplie en prenant égal à l'unité en valeur absolue le déterminant des n^2 nombres entiers du système (1), ce qui est la conclusion que nous avons annoncée, et qu'il s'agissait d'obtenir.

