JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

Sur le même théorème

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 87-90.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__87_0>

SUR LE MÊME THÉORÈME;

Par M. PUISEUX.

(Extrait d'une Lettre à M. Liouville.)

« Besançon, le 12 janvier 1848.

» ... Vous avez donné dans le cahier de juillet 1847 du *Journal de Mathématiques* une démonstration d'un théorème de M. Gauss. La lecture de cet article m'a rappelé qu'il y a un an environ, j'avais rédigé une démonstration de la même proposition : elle est comprise implicitement dans la méthode plus générale que vous avez suivie; cependant, comme elle n'exige que des calculs assez simples, peut-être jugerez-vous à propos de la publier. Je la transcris :

» Étant données deux surfaces, on peut toujours, et cela d'une infinité de manières, faire correspondre chaque point de l'une à un point de l'autre, de façon qu'à toute figure tracée sur la première réponde une figure tracée sur la seconde. Nous dirons que les deux surfaces peuvent se transformer l'une dans l'autre, si l'on peut faire en sorte que les arcs correspondants soient égaux : cette condition remplie, il s'ensuit que les aires et les angles correspondants sont aussi égaux, comme on le voit par la décomposition des surfaces en triangles infiniment petits.

» Cela posé, le théorème énoncé par M. Gauss est le suivant :

« Si deux surfaces peuvent être transformées l'une dans l'autre, le
» produit des rayons de courbure principaux en chaque point de
» l'une est égal au produit de ces mêmes rayons au point corres-
» pondant de l'autre. »

» Pour le prouver, observons d'abord que si l'on trace sur la première surface une ligne géodésique, c'est-à-dire qui soit la plus courte entre deux de ses points, la ligne correspondante sur la seconde surface sera aussi une ligne géodésique : car si entre deux des points de cette dernière on pouvait mener une plus courte ligne sur la seconde surface, il existerait aussi entre les deux points correspondants sur la première surface une ligne plus courte que la ligne géodésique qui les joint: ce qui est contre la définition.

» Imaginons maintenant que, par un point A de l'une de nos surfaces, on mène toutes les lignes géodésiques qui y aboutissent, et qu'on prenne sur chacune d'elles un petit arc d'une même longueur σ; les extrémités de ces arcs formeront une courbe fermée. Faisons la même construction sur la seconde surface à partir du point A′ correspondant à A; nous obtiendrons une nouvelle courbe fermée qui sera la correspondante de la première, et devra, par conséquent, avoir la même longueur. De cette égalité résulte, comme on va le voir, le théorème en question.

» Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la première surface; faisons, suivant l'usage,

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

d'où il suit

$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

Appelons s l'arc d'une ligne géodésique passant au point (x, y, z): on sait que le rayon de courbure de cette ligne est normal à la surface; il en résulte, en prenant s pour variable indépendante,

$$d^2x + p\,d^2z = 0, \quad d^2y + q\,d^2z = 0,$$

d'où, en différentiant,

$$d^3x + p\,d^3z + (r\,dx + s\,dy)\,d^2z = 0,$$
$$d^3y + q\,d^3z + (s\,dx + t\,dy)\,d^2z = 0.$$

De plus, si nous appelons ξ, η, ζ les coordonnées de l'extrémité d'un arc égal à σ porté sur cette ligne à partir du point (x, y, z), nous aurons

$$\xi = x + \frac{dx}{ds}\sigma + \frac{d^2x}{ds^2}\frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3x}{ds^3}\frac{\sigma^3}{6} + \ldots,$$
$$\eta = y + \frac{dy}{ds}\sigma + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3y}{ds^3}\frac{\sigma^3}{6} + \ldots,$$
$$\zeta = z + \frac{dz}{ds}\sigma + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{\sigma^2}{2} + \ldots.$$

» Supposons maintenant que le point (x, y, z) soit le point désigné ci-dessus par A ; prenons ce point pour origine des coordonnées, l'axe des z étant dirigé suivant la normale à la surface, nous aurons

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

On peut d'ailleurs disposer de l'axe des x de façon que l'on ait $s = 0$. Il suit de ces hypothèses, et des équations écrites plus haut,

$$dz = 0, \quad d^2z = r dx^2 + t dy^2, \quad d^2x = 0, \quad d^2y = 0,$$
$$d^3x + r^2 dx^3 + rt dx\, dy^2 = 0, \quad d^3y + rt dx^2 dy + t^2 dy^3 = 0.$$

Nommons α l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à l'arc σ menée par l'origine, de sorte qu'on ait

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha;$$

nous en conclurons

$$\frac{d^2z}{ds^2} = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha,$$
$$\frac{d^3x}{ds^3} = -r^2\cos^3\alpha - rt\cos\alpha\sin^2\alpha,$$
$$\frac{d^3y}{ds^3} = -rt\cos^2\alpha\sin\alpha - t^2\sin^3\alpha,$$

et, par conséquent,

$$\xi = \sigma\cos\alpha - \frac{\sigma^3}{6}(r^2\cos^3\alpha + rt\cos\alpha\sin^2\alpha) + \ldots,$$
$$\eta = \sigma\sin\alpha - \frac{\sigma^3}{6}(rt\cos^2\alpha\sin\alpha + t^2\sin^3\alpha) + \ldots.$$
$$\zeta = \frac{\sigma^2}{2}(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha) + \ldots.$$

En donnant à α toutes les valeurs de zéro à 2π, on aura successivement par ces formules tous les points de la courbe fermée définie plus haut. Si maintenant nous désignons par λ l'arc de cette courbe, lequel est une fonction de α, on aura

$$d\lambda = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2},$$

ou bien, en ayant égard aux valeurs précédentes de ξ, η, ζ et observant que α seul est variable,

$$d\lambda = d\alpha\sqrt{\sigma^2 - \frac{rt\sigma^4}{3} + \ldots} = d\alpha\left(\sigma - \frac{rt\sigma^3}{6} + \ldots\right).$$

Pour avoir la longueur totale l de la courbe, il suffit d'intégrer $d\lambda$ depuis zéro jusqu'à 2π; on trouve ainsi

$$l = 2\pi\sigma - \frac{\pi rt\sigma^3}{3} + \ldots,$$

ou bien, en appelant R et R_1 les rayons de courbure principaux de la surface au point A,

$$l = 2\pi\sigma - \frac{\pi\sigma^3}{3RR_1} + \ldots.$$

Pour la courbe correspondante construite sur la seconde surface, on trouvera semblablement

$$l' = 2\pi\sigma - \frac{\pi\sigma^3}{3R'R'_1} + \ldots.$$

Les expressions de l et de l' devant être égales, quelque petit que soit σ, les coefficients des mêmes puissances de cet arc doivent être égaux; on a donc

$$RR_1 = R'R'_1.$$

Ce qu'il fallait démontrer. »